

**Bedeutung, detaillierte Herleitung und Berechnung  
der mittleren Temperaturdifferenz, der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz,  
der mittleren Stofftemperaturen (Medientemperaturen) und der Behälteraufheizzeiten  
bei der Wärmeübertragung zwischen stofflich getrennten Medien  
– Wärmeübertrager, Raumheizflächen, Behälteraufheizung –**

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, 2017

---

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
	Stationär arbeitende Wärmeübertrager	3
	Instationäre Behälteraufheizung bei gerührtem Inhalt	4
	Mittlere Temperaturdifferenz und mittlere logarithmische Temperaturdifferenz	4
	Vorgehensweise bei der Ermittlung der mittleren Temperaturdifferenz	5
<b>1</b>	<b>Parallelströmer</b>	<b>6</b>
1.1	Mittlere Temperaturdifferenz bei gegebenen Ein- und Austrittstemperaturen	8
1.2	Verlauf der Stofftemperaturen längs der Wärmeübertragerfläche	9
1.3	Mittlere Stoffstromtemperaturen längs der Wärmeübertragerfläche	10
1.4	Wärmebilanzen und Wärmestrom durch die Wärmeübertragerfläche	11
1.5	Beispiel: Bemessung eines Gleichstrom-Wärmeübertragers	12
1.6	Beispiel: Bemessung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers	13
1.7	Austrittstemperaturen bei gegebenen Eintrittstemperaturen, Stoffströmen und bekanntem Wärmeübertrager – Einführung der Betriebscharakteristik	15
	Wann ist mit $\Phi_1$ und wann mit $\Phi_2$ zu arbeiten?	16
1.8	Weitere charakteristische Größen bei bekannter Betriebscharakteristik	17
1.9	Grafische Darstellung der Betriebscharakteristiken nach konventioneller Form	18
1.10	Beispiel: Nachrechnung eines Gleichstrom-Wärmeübertragers	19
1.11	Beispiel: Nachrechnung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers	21
1.12	Anwendung der Betriebscharakteristik in aktueller Form und Diagrammdarstellung	23
1.13	Nachrechnung des Gleichstrom-Wärmeübertragers gemäß Abschnitt 1.10	26
1.14	Nachrechnung des Gegenstrom-Wärmeübertragers gemäß Abschnitt 1.11	26
1.15	Warum wird die Nutzung der aktuellen Darstellung empfohlen?	28
<b>2</b>	<b>Kreuzgegenströmer in der Klimatechnik – Zusammenfassung der Diagramm-ergebnisse zur vereinfachten, praktischen Nutzung</b>	<b>29</b>
	Näherungsweise Bestimmung der Betriebscharakteristik	29
<b>3</b>	<b>Raumheizflächen</b>	<b>33</b>
3.1	Heizflächenexponent	33

Glück: Mittlere Temperaturdifferenz bei Wärmeübertragern, Raumheizflächen und Behälteraufheizung		2
3.2	Mittlere Temperaturdifferenz bei Raumheizkörpern mit temperaturabhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten	35
3.3	Mittlere Temperaturdifferenz bei Raumheizkörpern mit konstantem Wärmedurchgangskoeffizienten	36
3.4	Beispiel: Berechnung der mittleren Temperatur für einen Raumheizkörper	38
<b>4</b>	<b>Behälteraufheizung mit Dampf</b>	<b>41</b>
4.1	Behälteraufheizung mit Dampf ohne Wärmeverluste und Durchströmung	41
4.2	Behälteraufheizung mit Dampf bei Wärmeverlusten und gleichzeitiger Durchströmung	42
4.3	Beispiel: Behälteraufheizung mit Sattdampf	44
<b>5</b>	<b>Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom</b>	<b>47</b>
5.1	Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom ohne Wärmeverluste und Durchströmung	47
5.2	Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom bei Wärmeverlusten und gleichzeitiger Durchströmung	49
5.3	Beispiel: Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom	54

Diese Abhandlung ersetzt meine frühere Veröffentlichung:

"Wärmeübertragung längs getrennter Medien – Ermittlung der mittleren Temperaturdifferenz vom Heizrohr bis zur Behälteraufheizung"

Heizung-Lüftung-Haustechnik H. 9/1999

Die vorliegende Ausarbeitung ist stofflich umfangreicher und detaillierter in der Darstellung.

## Literatur

- [1] GLÜCK, B.: Wärmeübertragung; Wärmeabgabe von Raumheizflächen und Rohren (Reihe: Bausteine der Heizungstechnik). Berlin: Verlag für Bauwesen 1989, ISBN 3-345-00310-4, 2. Auflage Berlin: Verlag für Bauwesen 1990, ISBN 3-345-00426-7

Download als PDF-Datei unter: <http://www.berndglueck.de/Waermeuebertragung>

- [2] ROETZEL, W., SPANG, B.: Wärmetlas, Abschnitt Ca, Düsseldorf: VDI Verlag 1994, 2006

- [3] GLÜCK, B.: Vergleichsprozesse der Klimatechnik. Heidelberg: C. F. Müller Verlag 1998 (ISBN 3-7880-7643-7)

Download als PDF-Datei unter: <http://www.berndglueck.de/Klimaprozess>

## 0 Einleitung

Bei der Definition der mittleren Temperaturdifferenz ist trotz vieler Gemeinsamkeiten zwischen der stationären Wärmeübertragung und der instationären Behälteraufheizung zu unterscheiden.

### Stationär arbeitende Wärmeübertrager

Die wärmetechnische Forderung beispielsweise ein Heizmedium 1 mit dem Wärmekapazitätsstrom  $\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_1$  von der Temperatur  $t_1'$  auf  $t_1''$  abzukühlen und/oder ein Kühlmedium 2 mit dem Wärmekapazitätsstrom  $\dot{C}_2 = \dot{m}_2 c_2$  von der Temperatur  $t_2'$  auf  $t_2''$  aufzuwärmen ist bei Wärmeübertragern mit Stoffstromtrennung nur erfüllbar, wenn der dazu erforderliche Wärmestrom auch durch die Wärmeübertragerfläche transportiert werden kann. D. h., es muss die Wärmebilanz

$$\dot{Q} = \dot{C}_1 (t_1' - t_1'') = \dot{C}_2 (t_2'' - t_2') = k A \Delta t_m \quad (\text{adiabater Wärmeübertrager}) \quad (0.1)$$

erfüllt sein, was die **große Bedeutung der mittleren Temperaturdifferenz** verdeutlicht.

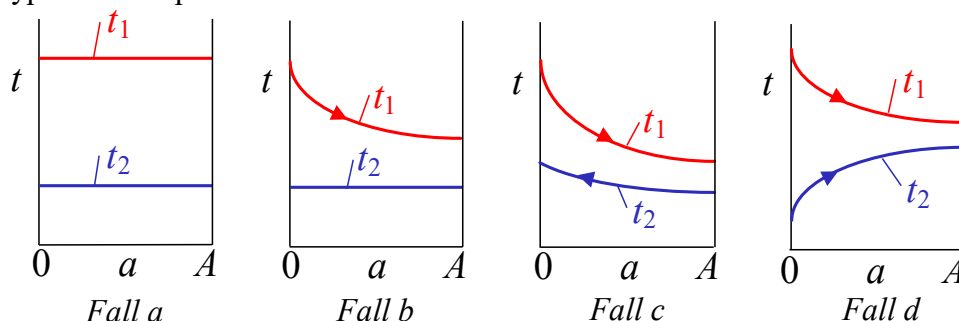
Während die Wärmeübertragerfläche  $A$  eine geometrische Größe verkörpert, sind der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  und die mittlere Temperaturdifferenz  $\Delta t_m$  Größen, die in vielfältiger Weise von den Strömungswegen und somit von der Bauart des Wärmeübertragers, den örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten, Verschmutzungsbelägen u. a. m. abhängen. Auch untereinander besteht eine Beziehung zwischen  $k$  und  $\Delta t_m$ , beispielsweise bedingt durch örtlich unterschiedliche Stoffwerte. Dies alles beachtend, würde eine Berechnung der Wärmeübertrager nur unter Einbeziehen numerischer Strömungssimulationen ermöglichen. Die bisherige Berechnungspraxis lehrt aber, dass sehr gute Ergebnisse auch mit pragmatischen Ansätzen erreichbar sind. So geht man beispielsweise von einem konstantem Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  aus, der als Mittelwert über die Heizfläche im Vorhinein bestimmt wurde und eventuell iterativ angepasst wird. Damit folgt aus Gl. (0.1) die **Definitionsgleichung für die mittlere Temperaturdifferenz gebildet über  $A$** :

$$\Delta t_m = \frac{\dot{Q}}{k A} \quad \text{bzw. unter Einbeziehen eines Wärmeverluststromes} \quad \Delta t_m = \frac{\dot{Q} + \dot{Q}_{\text{Verlust}}}{k A} \quad (0.2)$$

Allgemein kann somit die mittlere Temperaturdifferenz als integraler Mittelwert der örtlich gegebenen Temperaturdifferenzen, die bei einem Wärmeübertragungsvorgang zwischen dem Heizmedium 1 und dem Kühlmedium 2 auftreten, verstanden werden. Bildet man in diesem Sinne auch die mittleren Stofftemperaturen  $\bar{t}_1$  und  $\bar{t}_2$  über die Wärmeübertragerfläche  $A$  so gilt auch

$$\Delta t_m = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 \quad (0.3)$$

Für die Verläufe der Stofftemperaturen  $t$  gelten im allgemeinsten Fall  $t = t(a)$ , wobei  $a$  die Heizflächenkoordinate zwischen  $a = 0 \dots A$  darstellt. Zum Verständnis zeigt Bild 0.1 beispielhaft einige typische Temperaturverläufe.



**Bild 0.1** Beispielhafte Temperaturverläufe längs der Wärmeübertragerfläche  $a$  bei stationär arbeitenden Wärmeübertragern

*Fall a* zeigt den Trivialfall – beispielsweise einen mit Sattdampf beheizten Raumheizkörper –, der keiner speziellen Berechnung der mittleren Temperaturdifferenz bedarf, da die Temperaturdifferenz  $t_1 - t_2$  unverändert über der gesamten Heizfläche gilt. *Fall b* gibt den einfachsten Berechnungsfall an, z. B. die Abkühlung des Heizwassers  $t_1$  in einem Raumheizkörper bei konstanter Raumtemperatur  $t_2$ . *Fall c* und *Fall d* stellen die Temperaturverläufe in einem Gegenstrom- bzw. Gleichstromwärmeübertrager dar.

### **Instationäre Behälteraufheizung bei gerührtem Inhalt**

Es besteht beispielsweise die Forderung durch das Heizmedium 1 mit dem Wärmekapazitätsstrom  $\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_1$  von der konstanten Eintrittstemperatur  $t_1'$  innerhalb der Aufheizzeit  $Z$  den Behälterinhalt 2 mit der Wärmekapazität  $C_2 = m_2 c_2$  von der Temperatur  $t_{20}$  auf  $t_{2Z}$  aufzuheizen, wozu während  $Z$  die Wärme  $Q$  durch die Wärmeübertragerfläche zu transportieren ist:

$$Q = C_2 (t_{2Z} - t_{20}) = k A \Delta t_m Z. \quad (\text{adiabater Behälter}) \quad (0.4)$$

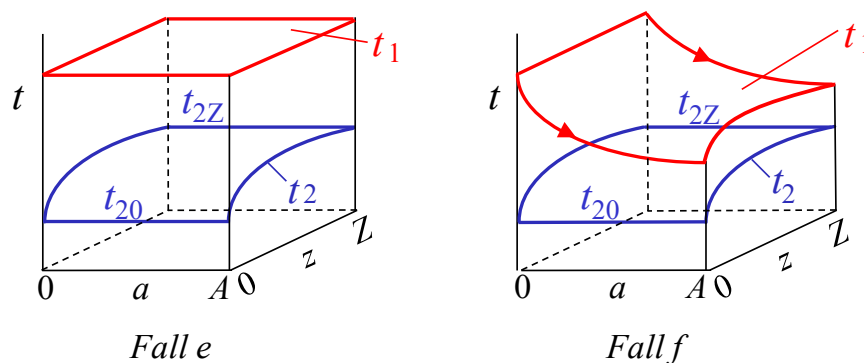
Wiederum wird die **große Bedeutung der mittleren Temperaturdifferenz** deutlich. Geht man auch in diesem Fall von einem konstanten Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  aus, der als Mittelwert über die Heizfläche  $A$  und über die Zeit  $Z$  im Vorhinein bestimmt wurde, folgt als **Definitionsgleichung für die mittlere Temperaturdifferenz** gebildet über  $A$  und  $Z$ :

$$\Delta t_m = \frac{Q}{k A Z} \quad \text{bzw. unter Einbeziehen eines Wärmeverlustes} \quad \Delta t_m = \frac{Q + Q_{\text{Verlust}}}{k A Z}. \quad (0.5)$$

Mit den mittleren Stofftemperaturen  $\bar{t}_1$  (Mittel über  $A$  und  $Z$ ) und  $\bar{t}_2$  (Mittel über  $Z$ ) gilt auch

$$\Delta t_m = \bar{t}_1 - \bar{t}_2. \quad (0.6)$$

Für die Stofftemperaturverläufe bei gerührtem Behälterinhalt mit zu jeder Zeit  $z$  einheitlicher Behältertemperatur sind im allgemeinsten Fall  $t_1 = t_1(a, z)$  und  $t_2 = t_2(z)$  zu beachten (Bild 0.2), wobei außer der Heizflächenkoordinate  $a = 0 \dots A$  die Zeitkoordinate  $z = 0 \dots Z$  gilt.



**Bild 0.2** Beispielhafte Temperaturverläufe längs der Wärmeübertragerfläche  $a$  und der Zeit  $z$  bei instationärer Behälteraufheizung

*Fall e* zeigt den Sonderfall eines mit Sattdampf beheizten Warmwasserbereiters, wobei nur die Behältertemperatur  $t_2$  eine Zeitfunktion  $t_2 = t_2(z)$  darstellt. *Fall f* verkörpert dagegen den allgemeinen Fall, eine Behälterbeheizung mittels eines flüssigen Wärmeträgers ohne latenten Wärmekapazitätsanteil.

### **Mittlere Temperaturdifferenz und mittlere logarithmische Temperaturdifferenz**

Für die angegebenen Temperaturverläufe der *Fälle b* bis *e* sind "eindimensionale" Mittelwertbil-

dungen erforderlich, entweder längs der Heizflächenkoordinate oder im letzten Fall längs der Zeitkoordinate. Die Besonderheit des Falles  $e$  besteht darin, dass die Temperatur-Zeit-Verläufe an jeder Stelle der Heizfläche identisch sind. Im Fall  $f$  macht sich eine "zweidimensionale" Mittelwertbildungen erforderlich.

Im Weiteren wird gezeigt, dass unter den Voraussetzungen **konstanter, temperaturunabhängiger Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  und wärmeverlustrfrei arbeitender Wärmeübertrager** die mittleren Temperaturdifferenzen sich als **logarithmische Mittel** darstellen.

Dies betrifft die "eindimensionale" Mittelung längs der Heizfläche unter stationären Bedingungen (Fälle  $b$  bis  $d$ ) als auch längs der Zeit bei Behälteraufheizung mit einem Heizmedium unendlich großer Wärmekapazität (Fall  $e$ ).

Dies liegt im Wesen der natürlichen Ausgleichsvorgänge von Potentialunterschieden begründet, die sich im Allgemeinen als abklingende  $e^{-x}$ -Funktion bzw. durch deren Umkehrfunktion darstellen lassen. Dies gilt interessanterweise auch für die "zweidimensionale" Mittelung (Fall  $f$ ). Hierbei wird das Produkt aus zwei logarithmischen Mittelungen, erstens über die Heizfläche und zweitens über die Zeit gebildet.

**Gelten die oben genannten Bedingungen nicht, so entsprechen die mittleren Temperaturdifferenzen gemäß den theoretischen Ableitungen nicht den reinen logarithmischen Mittelungen.**

Der Unterschied zwischen der mittleren Temperaturdifferenz und der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz ist vielen Nutzern nicht bewusst. Man verbindet bei wärmetechnischen Prozessen die Mittelung der Temperaturdifferenzen automatisch mit dem logarithmischen Mittel.

**In den meisten praktischen Anwendungsfällen erweisen sich die logarithmischen Mittelungen aber dennoch als sehr brauchbar. Die Wärmedurchgangskoeffizienten sind allerdings auf die geltenden Mittelwerte zu beziehen (Stoffwerte für mittlere Temperaturen verwenden, mittlere Widerstände eventueller Verschmutzungen berücksichtigen). Die Wärmeverlustströme der Behälter sind für die zeitlich gemittelte Behältertemperatur zu bilden usw.**

Aus den genannten Gründen müssen die Temperaturmittelwerte genau bestimmbar sein. In den nachfolgenden Anwendungsfällen werden deshalb auch die Berechnungsgleichungen für die Temperaturmittelwerte angegeben.

### ***Vorgehensweise bei der Ermittlung der mittleren Temperaturdifferenz***

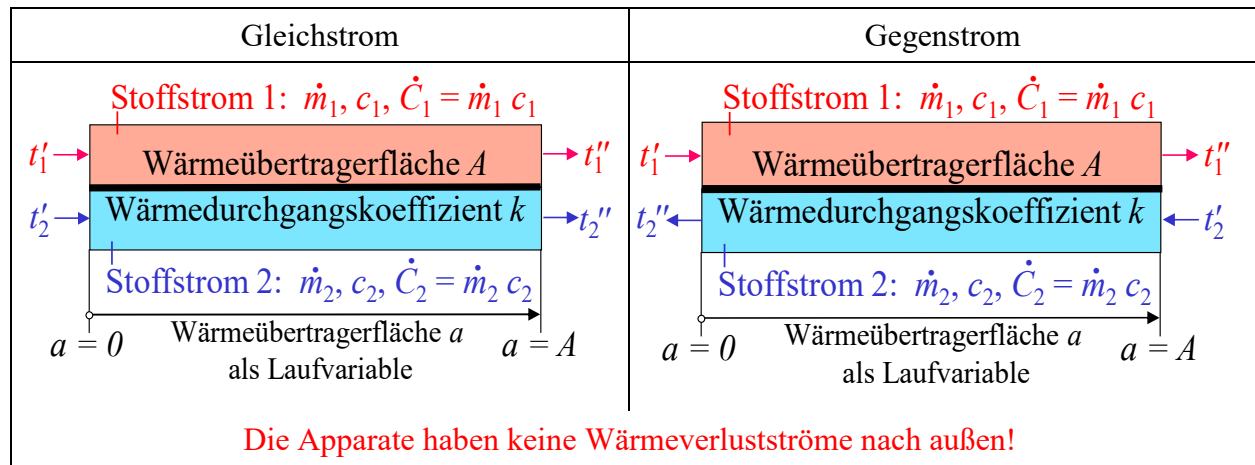
Obwohl die Algorithmen zur Berechnung der wärmetechnischen Zusammenhänge üblicher Lehrstoff sind, wird zum besseren Verständnis eine lückenlose Darstellung in den einzelnen Kapiteln vorgenommen und nur Bezüge zwischen vergleichbaren Ergebnissen hergestellt.

Generell sind verschiedene Berechnungswege möglich.

- Bei Parallelströmern ist es üblich, die örtliche Temperaturdifferenz  $\Delta t(a)$  zwischen den Stoffströmen aufzustellen und das integrale Mittel  $\Delta t_m$  durch Integration über  $A$  zu bilden. In praxi werden die Stofftemperaturen als arithmetische Mittelwerte zwischen Ein- und Austrittstemperaturen bestimmt. Nachfolgend werden aber auch die exakten Mitteltemperaturen hergeleitet. Sind  $t_1$  und  $t_2$  Funktionen von  $a$ , ist der rechnerische Aufwand groß. Ist  $t_1$  oder  $t_2$  konstant, folgt die relevante Mitteltemperatur mit  $\Delta t_m$  direkt aus Gl. (0.3).  
Wärmeverluste sind praktisch vernachlässigbar, da diese – falls überhaupt vorhanden – meist relativ klein gegenüber den übertragenen Wärmeströmen sind.
- Bei der Behälteraufheizung ist es zweckmäßig zunächst die Aufheizzeit  $Z$  zu ermitteln. Bei verlustfreier Aufheizung ist  $Q$  bekannt, sodass aus Gl. (0.5)  $\Delta t_m$  folgt. Bei Behälteraufheizung mit Wärmeverlusten und/oder gleichzeitiger Durchströmung ist es meistens zweckmäßiger die mittleren Temperaturen und dann nach Gl. (0.6)  $\Delta t_m$  zu bestimmen. Beide Verfahren werden demonstriert.

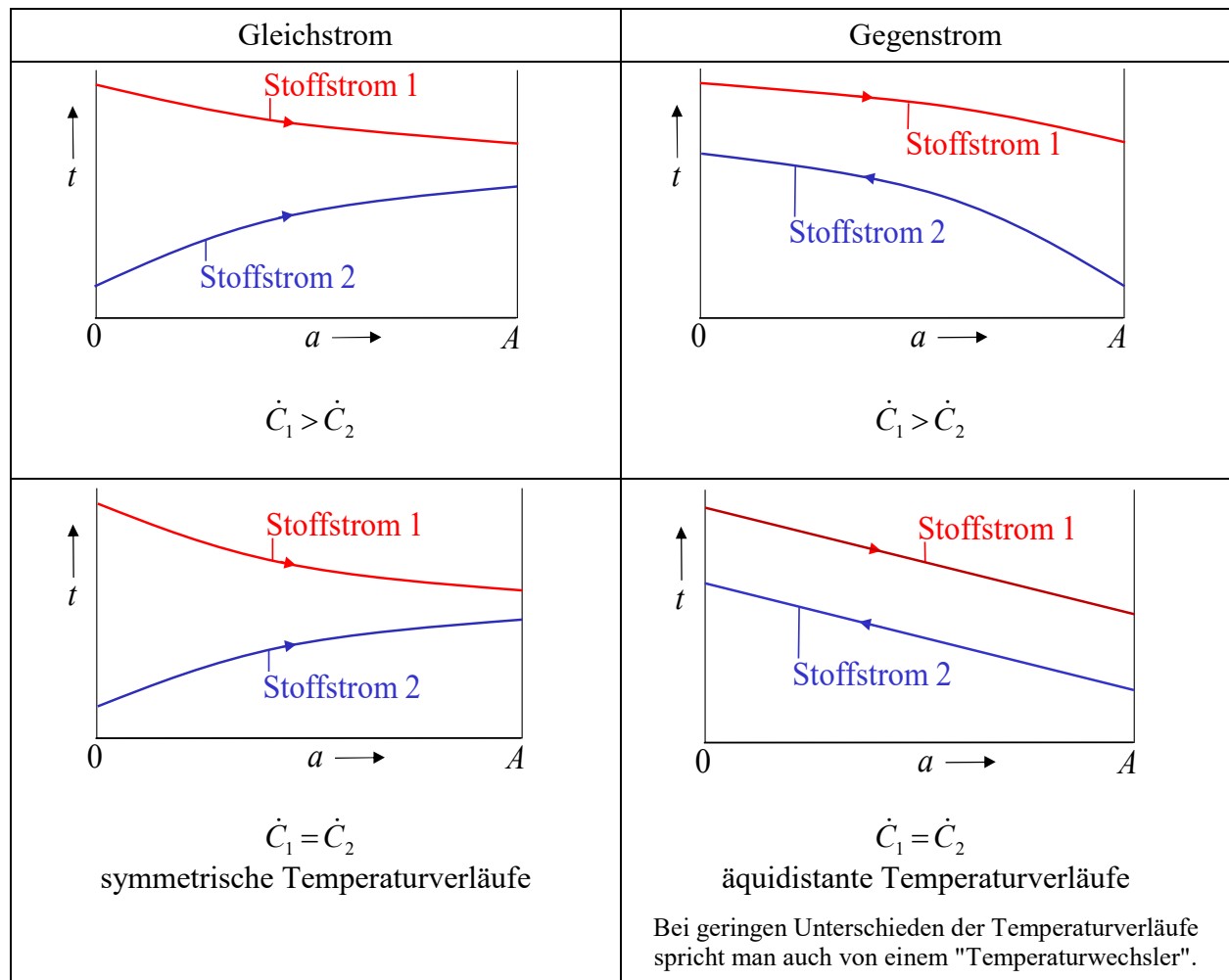
# 1 Parallelströmer

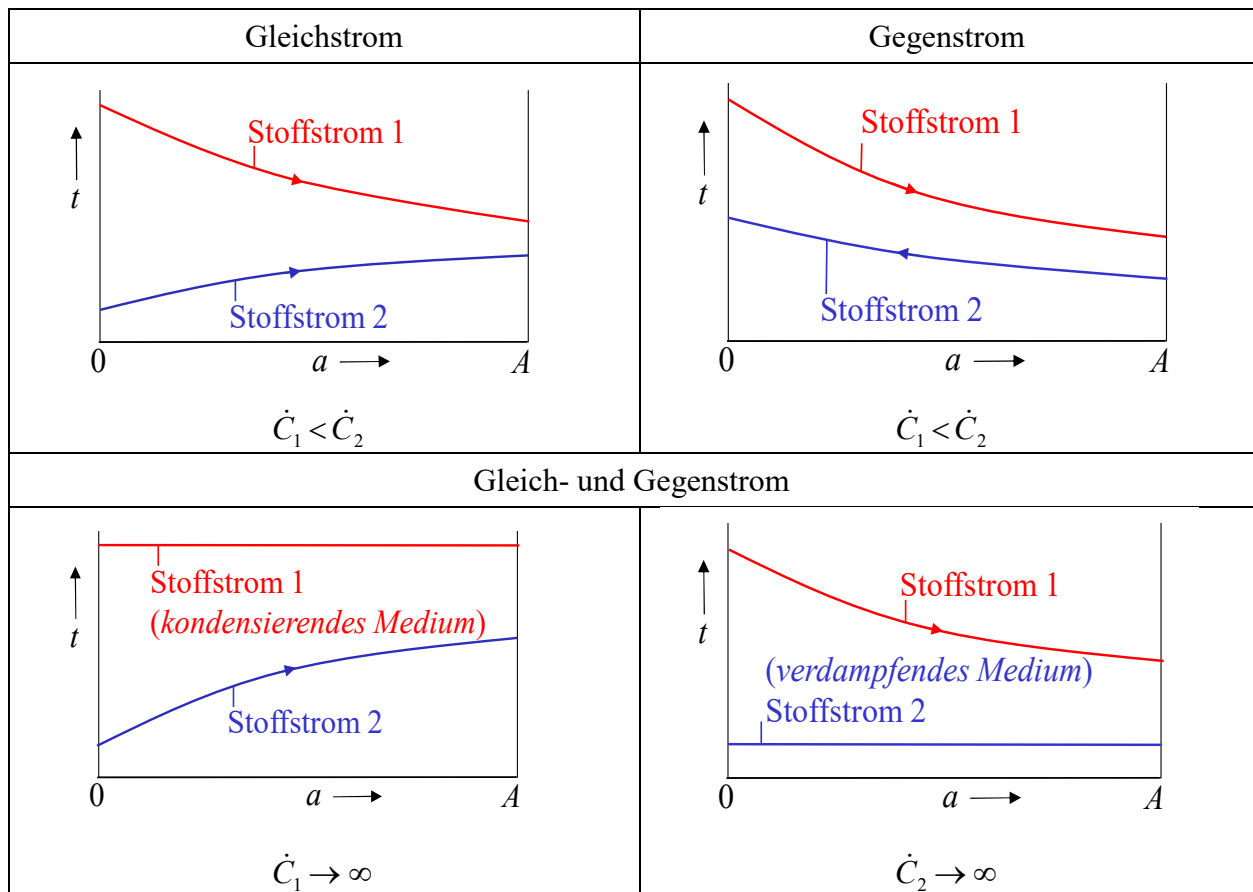
Unter Parallelströmer werden reine Gleich- und Gegenstromapparate subsumiert. Dabei kann es sich um Rohrbündel- oder Plattenwärmeübertrager handeln, wenn die Schaltung der Stoffströme entsprechend gestaltet ist.



Die Temperaturverläufe auf beiden Seiten der Wärmeübertragerfläche sind von der Größe der Wärmekapazitätsströme  $\dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_1$  und  $\dot{C}_2 = \dot{m}_2 c_2$  abhängig.

Es sind folgende acht Formen möglich:





Nur diese dargestellten Temperaturverläufe sind in einem einfachen Wärmeübertrager möglich! (Würde beispielsweise der Stoffstrom fühlbare Wärme aufnehmen und anschließend verdampfen, so handelt es sich definitionsgemäß um einen gekoppelten Wärmeübertrager.)

Häufige Prüfungsfragen verlangen das Skizzieren der Temperaturverläufe in Rekuperatoren unter gegebenen Randbedingungen. Die Vorgabe der Wärmekapazitätsströme liefert sofort die Verhältnisse der Abkühlung bzw. Aufheizung der Stoffströme, wobei der Temperaturverlauf des Stoffstromes mit der kleineren Wärmekapazität sich der größeren stärker nähert. Das Finden der Form der Temperaturkurven breitet dagegen oftmals Schwierigkeiten. (Aus didaktischen Gründen werden fehlerhafte Verläufe nicht dargestellt.) Als Hilfestellung dient die folgende Überlegung: Würde man gedanklich die Wärmeübertragerfläche stark vergrößern eventuell bis zu einer unendlichen Größe, so müssten sich die Temperaturkurven asymptotisch annähern. Denn alle natürlichen Ausgleichsvorgänge führen zu einer stetigen Temperaturannäherung und niemals zu einem Schnittpunkt! Damit ist das Auffinden der richtigen Kurvenkrümmung leicht möglich.

Das thermische Verhalten der Rekuperatoren ist allgemeiner Wissensstand. Die Ableitungen werden in der Regel zusammengefasst für beide Strömungsarten durchgeführt. Diese komprimierte Art ist elegant, aber nicht in jedem Zwischenschritt sofort überschaubar. Da die Zwischenergebnisse mitunter aber gefragt sind, erfolgen die nachfolgenden Ableitungen einzeln, aber parallel nebeneinander.

Je nach Aufgabenstellung – beispielsweise Bemessung eines Wärmeübertragers oder Nachrechnung eines bestehenden Apparates – sind unterschiedliche Algorithmen erforderlich. Im ersten

Fall sind die gewünschten Ein- und Austrittstemperaturen vorgegeben und die Wärmeübertragergröße gesucht, im zweiten Fall sind in der Regel die Eintrittstemperaturen und die Wärmeübertragergröße bekannt und die Austrittstemperaturen gesucht.

### 1.1 Mittlere Temperaturdifferenz bei gegebenen Ein- und Austrittstemperaturen

Gleichstrom	Gegenstrom
$d\dot{Q} = -\dot{C}_1 dt_1 = k da (t_1 - t_2)$ $d\dot{Q} = \dot{C}_2 dt_2 = k da (t_1 - t_2)$	$d\dot{Q} = -\dot{C}_1 dt_1 = k da (t_1 - t_2)$ $d\dot{Q} = -\dot{C}_2 dt_2 = k da (t_1 - t_2)$
<p style="color: red;">Der Wärmedurchgangskoeffizient <math>k</math> wird als eine Konstante betrachtet. Wäre er eine Funktion des Ortes <math>a</math> und/oder der Temperatur <math>t</math>, ergäbe sich später die mittlere Temperaturdifferenz <b>nicht</b> als logarithmisches Mittel!</p>	

Umformung:

$dt_1 = \frac{k da (t_1 - t_2)}{-\dot{C}_1} \quad \text{und} \quad dt_2 = \frac{k da (t_1 - t_2)}{\dot{C}_2}$	$dt_1 = \frac{k da (t_1 - t_2)}{-\dot{C}_1} \quad \text{und} \quad dt_2 = \frac{k da (t_1 - t_2)}{-\dot{C}_2}$
---	--

Subtraktion  $dt_1 - dt_2 = d(t_1 - t_2)$

$d(t_1 - t_2) = -k da (t_1 - t_2) \left( \frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \right)$	$d(t_1 - t_2) = -k da (t_1 - t_2) \left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right)$
---	---

Mit der Abkürzung  $\Delta t = t_1 - t_2$  und Trennung der Variablen sowie Integration über die Wärmeübertragerfläche  $a$  folgt für die Temperaturdifferenz  $\Delta t_a$ :

$\int_{\Delta t_0}^{\Delta t_a} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = - \left( \frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k \int_0^a da$ $\Delta t_a = \Delta t_0 e^{-\left( \frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k a} \quad (1.1)$	$\int_{\Delta t_0}^{\Delta t_a} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = - \left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k \int_0^a da$ $\Delta t_a = \Delta t_0 e^{-\left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k a} \quad (1.1)$
--	--

Am Ende der Wärmeübertragerfläche  $a = A$  gilt dann:

$\Delta t_A = \Delta t_0 e^{-\left( \frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k A} \quad (1.2)$	$\Delta t_A = \Delta t_0 e^{-\left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right) k A} \quad (1.2)$
---	---

Die mittlere integrale Temperatur über die Wärmeübertragerfläche ergibt sich mit Gl. (1.1) zu:

$$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta t_a da .$$

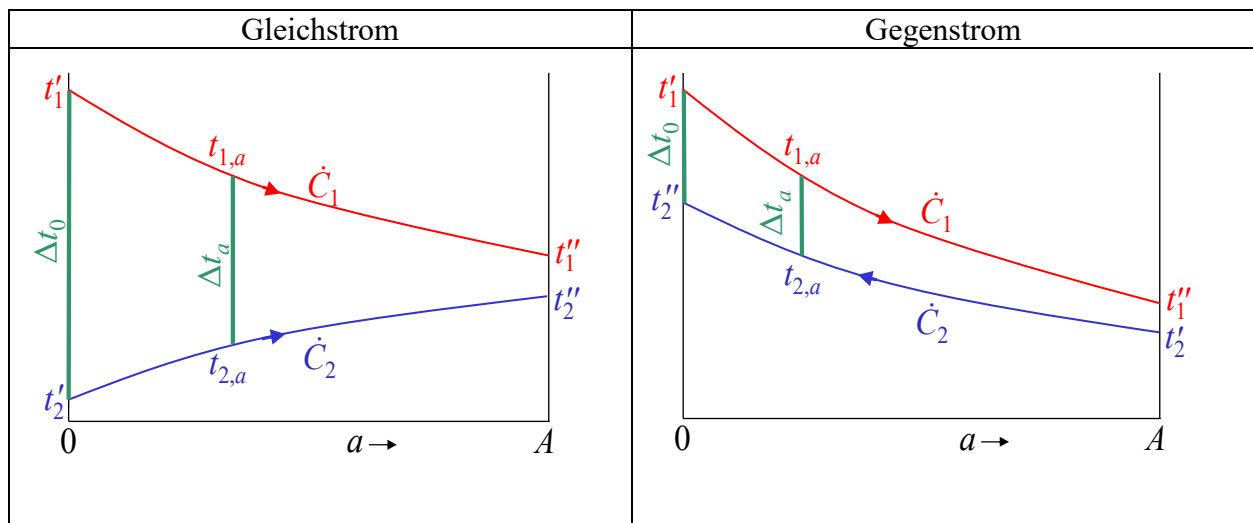


Gleichstrom	Gegenstrom
$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} da \quad (1.3)$	$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} da \quad (1.3)$
$\Delta t_m = \frac{1}{A} \frac{1}{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)k} \Delta t_0 \left( e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)kA} - 1 \right)$	$\Delta t_m = \frac{1}{A} \frac{1}{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)k} \Delta t_0 \left( e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)kA} - 1 \right)$
$\Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{-kA \left( \frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2} \right)} \quad (1.4)$	$\Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{-kA \left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right)} \quad (1.4)$

Mit Gl. (1.2) folgt die einheitliche Berechnungsgleichung der **mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz  $\Delta t_m$**  für Gleich- und Gegenströmer:

$\Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{\ln \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}} = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{\ln \frac{\Delta t_0}{\Delta t_A}} \quad (1.5)$	Für den Sonderfall eines Gegenströmers mit $\dot{C}_1 = \dot{C}_2$ gilt:
	$\Delta t_m = \Delta t_0 = \Delta t_A \quad (1.5a)$

## 1.2 Verlauf der Stoffstromtemperaturen längs der Wärmeübertragerfläche



Wärmebilanz und Ermittlung von  $t_{2,a}$ :

$\dot{C}_1 (t'_1 - t_{1,a}) = \dot{C}_2 (t_{2,a} - t'_2)$	$\dot{C}_1 (t'_1 - t_{1,a}) = \dot{C}_2 (t''_2 - t_{2,a})$
$t_{2,a} = t'_2 + (t'_1 - t_{1,a}) \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \quad (1.6)$	$t_{2,a} = t''_2 - (t'_1 - t_{1,a}) \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \quad (1.6)$

Temperaturdifferenz der Stoffströme  $\Delta t_a$  an der Stelle  $a$ :

$\Delta t_a = t_{1,a} - t_{2,a} = t_{1,a} \left( 1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right) - t'_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} - t'_2$ <p>Erweiterung:</p> $\Delta t_a = t_{1,a} \left( 1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right) - t'_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} - t'_2 + t'_1 - t'_1$	$\Delta t_a = t_{1,a} - t_{2,a} = t_{1,a} \left( 1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right) + t'_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} - t''_2$ <p>Erweiterung:</p> $\Delta t_a = t_{1,a} \left( 1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \right) + t'_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} - t''_2 + t'_1 - t'_1$
---	---

Gleichstrom	Gegenstrom
$\Delta t_a = t_{1,a} \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) - t'_1 \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) + \Delta t_0$	$\Delta t_a = t_{1,a} \left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) - t'_1 \left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) + \Delta t_0$

Substitution der Gl. (1.1) und Umformung zur **Temperatur  $t_{1,a}$**  in Abhängigkeit vom Ort  $a$ :

$t_{1,a} \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) - t'_1 \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) = \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$	$t_{1,a} \left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) - t'_1 \left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) = \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$
$t_{1,a} = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$ (1.7)	$t_{1,a} = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$ (1.7)

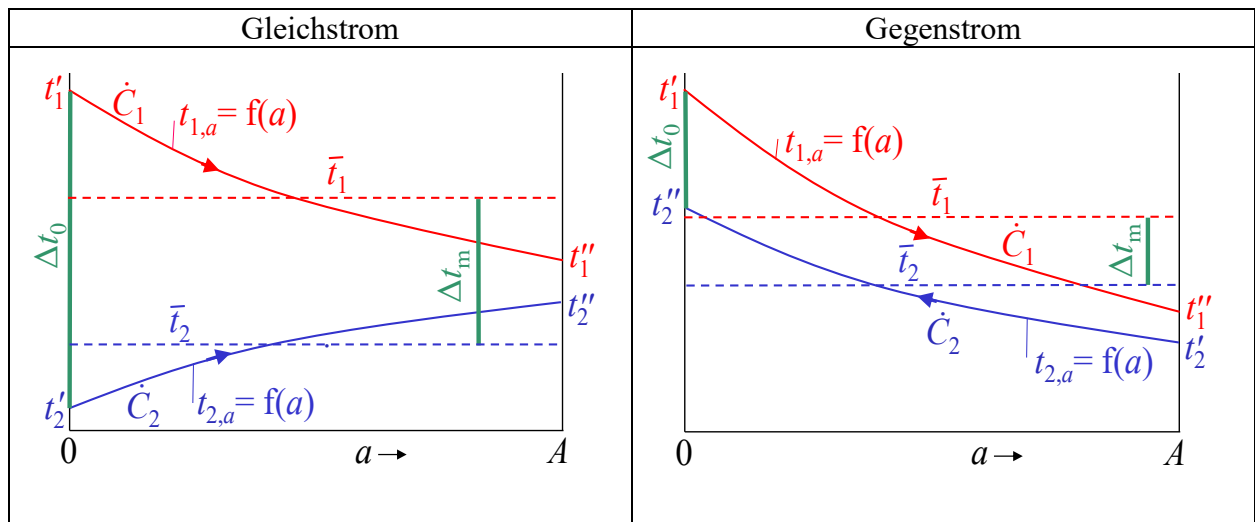
Die Substitution von  $t_{1,a}$  in Gl. (1.6) liefert die **Temperatur  $t_{2,a}$**  in Abhängigkeit vom Ort  $a$ :

$t_{2,a} = t'_2 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$ (1.8)	$t_{2,a} = t''_2 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$ (1.8)
--	---

Die Probe  $t_{1,a} - t_{2,a}$  liefert die Temperaturdifferenz  $\Delta t_a$  gemäß Gl. (1.1):

$t_{1,a} - t_{2,a} = t'_1 - t'_2 + \frac{\dot{C}_2 + \dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$	$t_{1,a} - t_{2,a} = t'_1 - t''_2 + \frac{\dot{C}_2 - \dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\}$
$t_{1,a} - t_{2,a} = \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} \equiv \Delta t_a$	$t_{1,a} - t_{2,a} = \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} \equiv \Delta t_a$

### 1.3 Mittlere Stoffstromtemperaturen längs der Wärmeübertragerfläche



Die **mittleren Temperaturen der Stoffströme** über die Wärmeübertragerfläche ergeben sich mit den Temperaturverläufen gemäß der Gln. (1.7) und (1.8) zu:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{A} \int_0^A t_{1,a} da \quad \text{und} \quad \bar{t}_2 = \frac{1}{A} \int_0^A t_{2,a} da.$$

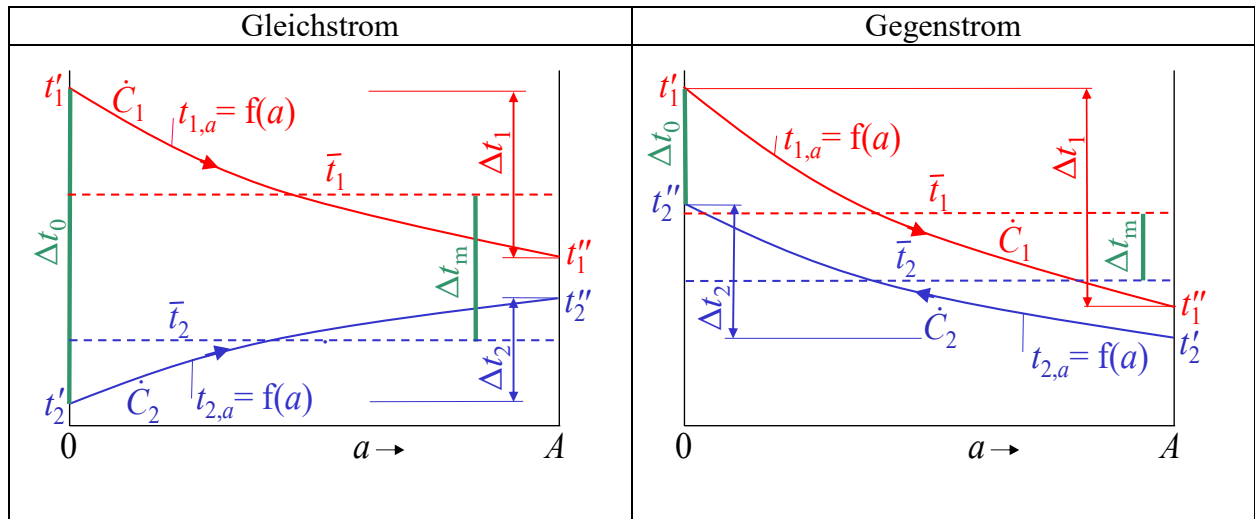
Unter Beachten des bereits gelösten Integrals gemäß Gl. (1.3) folgen:

Gleichstrom		Gegenstrom	
$\bar{t}_1 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$	(1.9)	$\bar{t}_1 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$	(1.9)
$\bar{t}_2 = t'_2 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$	(1.10)	$\bar{t}_2 = t''_2 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$	(1.10)

Die Probe  $\bar{t}_1 - \bar{t}_2$  liefert die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz  $\Delta t_m$  gemäß Gl. (1.5):

$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$ $- t'_2 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$ $\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \Delta t_m$	$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$ $- t''_2 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0)$ $\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \Delta t_m$
--	---

### 1.4 Wärmebilanzen und Wärmestrom durch die Wärmeübertragerfläche



Es gelten für alle Strömungsarten mit den angegebenen Größen:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_1 (t'_1 - t''_1) = \dot{m}_1 c_1 \Delta t_1 = \dot{C}_1 \Delta t_1 = \dot{m}_2 c_2 (t'_2 - t''_2) = \dot{m}_2 c_2 \Delta t_2 = \dot{C}_2 \Delta t_2 = k A (\bar{t}_1 - \bar{t}_2) = k A \Delta t_m. \quad (1.11)$$

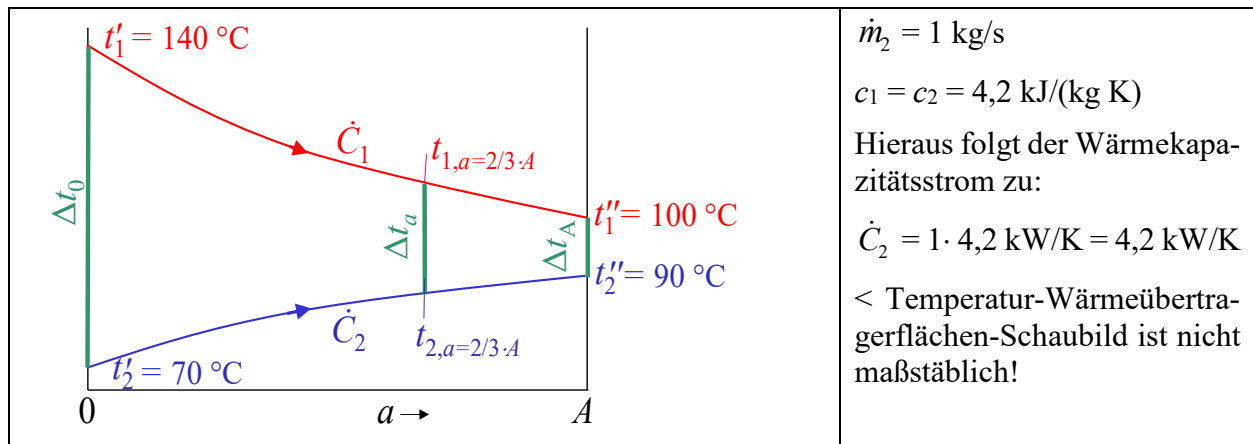
Zur Berechnung des Wärmestromes durch die Trennfläche zwischen den Stoffströmen ( $\equiv$  Wärmeübertragerfläche) gehen die Wärmeübertragerfläche  $A$  und der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  gleichermaßen linear ein. Die Größe des Wärmedurchgangskoeffizienten ist abhängig von der Apparatekonstruktion und damit von der Wärmeübertragerfläche, den Masseströmen und den mittleren Stofftemperaturen. Es ist sinnvoll den Term  $kA$  bei den Berechnungen zusammengefasst zu betrachten.

Die Annahme  $k = \text{const}$  nach Abschnitt 1.1 (s. S. 8) ist real nicht gegeben, aber andererseits kann eine analytische Funktion  $k = k(a, t_1, t_2)$  in der Regel nicht formuliert werden. Es ist sinnvoll eventuell vorhandene Abhängigkeiten in Form von Variantenvergleichen zu untersuchen.

### 1.5 Beispiel: Bemessung eines Gleichstrom-Wärmeübertragers

Es sind die Eintrittstemperaturen, die gewünschten Austrittstemperaturen und der Massestrom des kalten Mediums gegeben.

Gesucht werden die Wärmeübertragergröße und alle weiteren relevanten Parameter.



Aus der Wärmebilanz Gl. (1.11) folgen:

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_2 (t''_2 - t'_2) = 4,2(90 - 70) \text{ kW} = 84 \text{ kW}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \frac{c_2}{c_1} \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t''_1} = 1 \frac{90 - 70}{140 - 100} \text{ kg/s} = 0,5 \text{ kg/s}, \quad \dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_1 = 0,5 \cdot 4,2 \text{ kW/K} = 2,1 \text{ kW/K}.$$

Die erforderliche Größe des Wärmeübertragers folgt mit  $\Delta t_0 = 70 \text{ K}$  und  $\Delta t_A = 10 \text{ K}$  schrittweise aus

$$\text{Gl. (1.5)} \quad \Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{\ln \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}} = \frac{10 - 70}{\ln \frac{10}{70}} \text{ K} = 30,83 \text{ K}$$

$$\text{Gl. (1.11)} \quad k A = \frac{\dot{Q}}{\Delta t_m} = \frac{84 \text{ kW}}{30,83 \text{ K}} = 2,72 \text{ kW/K}.$$

Weitere interessante Größen sind nach

$$\text{Gl. (1.9)} \quad \bar{t}_1 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0) = 140^\circ\text{C} + \frac{4,2}{4,2 + 2,1} (30,83 - 70) \text{ K} = 113,89^\circ\text{C}$$

$$\text{Gl. (1.10)} \quad \bar{t}_2 = t'_2 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0) = 70^\circ\text{C} - \frac{2,1}{4,2 + 2,1} (30,83 - 70) \text{ K} = 83,06^\circ\text{C}.$$

Für diese mittleren Temperaturen sind die Stoffwerte zu bestimmen, die zur Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten an der Wärmeübertragerfläche benötigt werden.

Zur Vereinfachung verwendet man in praxi häufig die mittleren arithmetisch gebildeten Temperaturen  $\{( \text{Eintrittstemperatur} + \text{Austrittstemperatur} ) / 2\}$ :  $120^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$ .

Die Differenz zwischen den mittleren Temperaturen muss wiederum die mittlere logarithmische Temperatur ergeben:

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = 113,89^\circ\text{C} - 83,06^\circ\text{C} = 30,83 \text{ K} \equiv \Delta t_m.$$

Würde man sich für die Stofftemperaturen an der Stelle  $a = 2/3 A$  interessieren, so gelten nach

Gl. (1.7)

$$t_{1,a} = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\} = 140^\circ\text{C} + \frac{4,2}{4,2 + 2,1} 70\text{K} \left\{ e^{-\left(\frac{1}{2,1} + \frac{1}{4,2}\right)2,72\frac{2}{3}} - 1 \right\} = 106,11^\circ\text{C}$$

Gl. (1.8)

$$t_{2,a} = t'_2 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 + \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\} = 70^\circ\text{C} - \frac{2,1}{4,2 + 2,1} 70\text{K} \left\{ e^{-\left(\frac{1}{2,1} + \frac{1}{4,2}\right)2,72\frac{2}{3}} - 1 \right\} = 86,94^\circ\text{C}.$$

Die Temperaturdifferenz zwischen den Stoffströmen an dieser Stelle beträgt somit: 19,17 K.

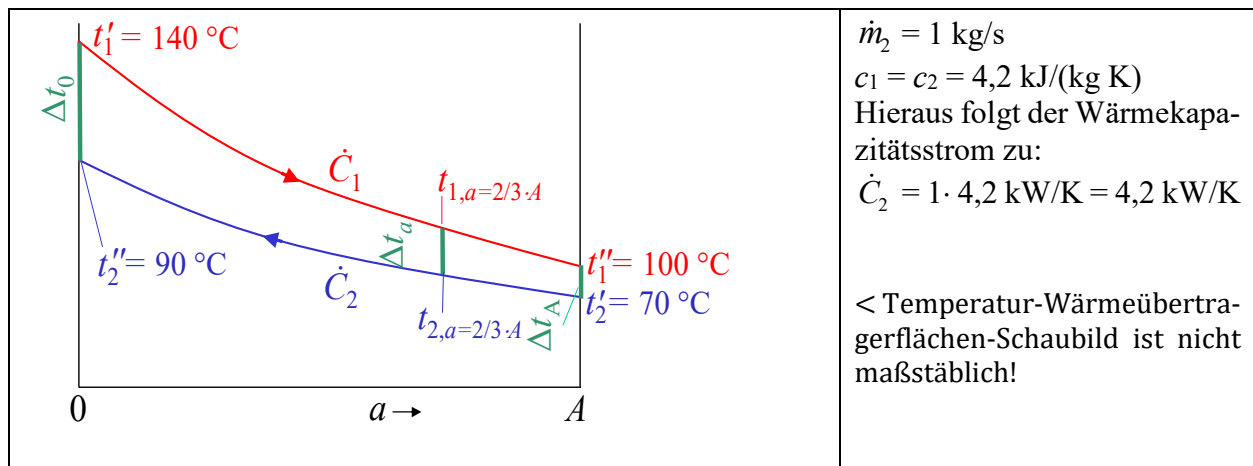
Das gleiche Ergebnis liefert natürlich auch Gl. (1.1):

$$\Delta t_a = \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} = 70 e^{-\left(\frac{1}{2,1} + \frac{1}{4,2}\right)2,72\frac{2}{3}} \text{K} = 19,17 \text{K}.$$

### 1.6 Beispiel: Bemessung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers

Aus didaktischen Gründen werden die Daten des Beispiels 1.5 zugrunde gelegt. Es sind wiederum die Eintrittstemperaturen, die gewünschten Austrittstemperaturen und der Massestrom des kalten Mediums gegeben.

Gesucht werden die Wärmeübertragergröße und alle weiteren relevanten Parameter.



Aus der Wärmebilanz Gl. (1.11) folgen:

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 c_2 (t''_2 - t'_2) = 4,2(90 - 70) \text{ kW} = 84 \text{ kW}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \frac{c_2}{c_1} \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t''_1} = 1 \frac{90 - 70}{140 - 100} \text{ kg/s} = 0,5 \text{ kg/s}, \quad \dot{C}_1 = \dot{m}_1 c_1 = 0,5 \cdot 4,2 \text{ kW/K} = 2,1 \text{ kW/K}.$$

Die erforderliche Größe des Wärmeübertragers folgt mit  $\Delta t_0 = 50 \text{ K}$  und  $\Delta t_A = 30 \text{ K}$  schrittweise aus

$$\text{Gl. (1.5)} \quad \Delta t_m = \frac{\Delta t_A - \Delta t_0}{\ln \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}} = \frac{30 - 50}{\ln \frac{30}{50}} \text{ K} = 39,15 \text{ K}$$

$$\text{Gl. (1.11)} \quad kA = \frac{\dot{Q}}{\Delta t_m} = \frac{84 \text{ kW}}{39,15 \text{ K}} = 2,15 \text{ kW/K}.$$

Weitere interessante Größen sind nach

$$\text{Gl. (1.9)} \quad \bar{t}_1 = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0) = 140^\circ\text{C} + \frac{4,2}{4,2 - 2,1} (39,15 - 50) \text{K} = 118,30^\circ\text{C}$$

$$\text{Gl. (1.10)} \quad \bar{t}_2 = t''_2 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} (\Delta t_m - \Delta t_0) = 90^\circ\text{C} + \frac{2,1}{4,2 - 2,1} (39,15 - 50) \text{K} = 79,15^\circ\text{C}.$$

Für diese mittleren Temperaturen sind die Stoffwerte zu bestimmen, die zur Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten an der Wärmeübertragerfläche benötigt werden.

Zur Vereinfachung verwendet man in praxi häufig die mittleren arithmetisch gebildeten Temperaturen  $\{(\text{Eintrittstemperatur} + \text{Austrittstemperatur})/2\}$ :  $120^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$ .

Die Differenz zwischen den mittleren Temperaturen muss wiederum die mittlere logarithmische Temperatur ergeben:

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = 118,30^\circ\text{C} - 79,15^\circ\text{C} = 39,15 \text{K} \equiv \Delta t_m.$$

Würde man sich für die Stofftemperaturen an der Stelle  $a = 2/3$  A interessieren, so gelten nach Gl. (1.7)

$$t_{1,a} = t'_1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\} = 140^\circ\text{C} + \frac{4,2}{4,2 - 2,1} 50 \text{K} \left\{ e^{-\left(\frac{1}{2,1} - \frac{1}{4,2}\right)2,15\frac{2}{3}} - 1 \right\} = 111,09^\circ\text{C}$$

Gl. (1.8)

$$t_{2,a} = t''_2 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2 - \dot{C}_1} \Delta t_0 \left\{ e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} - 1 \right\} = 90^\circ\text{C} + \frac{2,1}{4,2 - 2,1} 50 \text{K} \left\{ e^{-\left(\frac{1}{2,1} - \frac{1}{4,2}\right)2,15\frac{2}{3}} - 1 \right\} = 75,54^\circ\text{C}.$$

Die Temperaturdifferenz zwischen den Stoffströmen an dieser Stelle beträgt somit:  $35,54 \text{K}$ . Das gleiche Ergebnis liefert natürlich auch Gl. (1.1):

$$\Delta t_a = \Delta t_0 e^{-\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)ka} = 50 e^{-\left(\frac{1}{2,1} - \frac{1}{4,2}\right)2,15\frac{2}{3}} \text{K} = 35,54 \text{K}.$$

### **Fazit:**

- Die Wärmeübertragerfläche des Gegenstromapparates kann somit ca. 20 % kleiner sein als die des Gleichströmers.
- Der Einsatz eines Gleichstromapparates ist aber nur möglich, da für die gewünschten Austrittstemperaturen  $t''_2 < t'_1$  gilt.

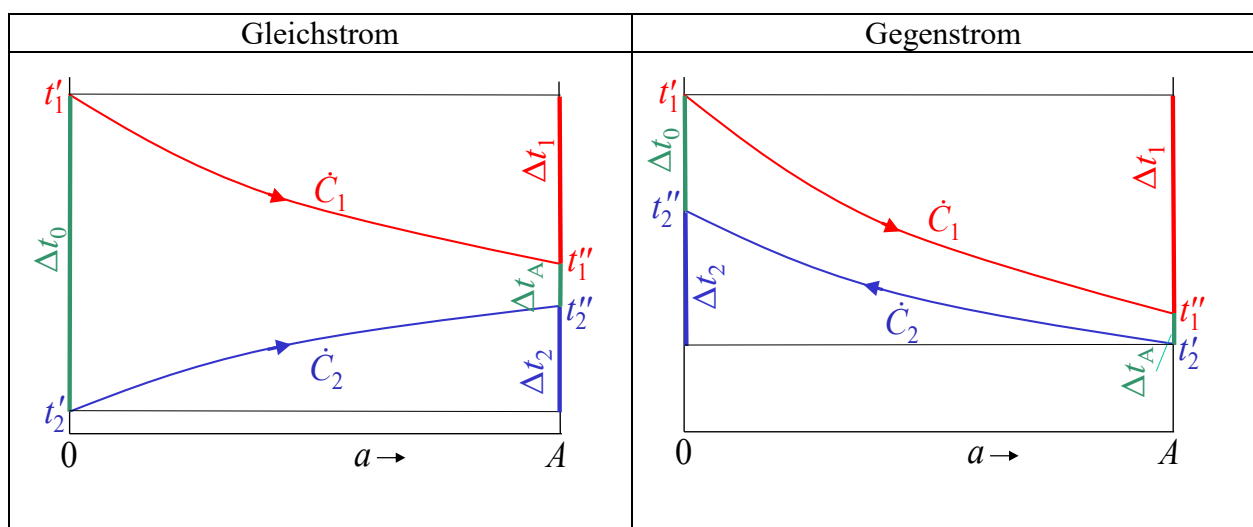
### 1.7 Austrittstemperaturen bei gegebenen Eintrittstemperaturen, Stoffströmen und bekanntem Wärmeübertrager – Einführung der Betriebscharakteristik

Ist ein Wärmeübertrager bereits vorhanden bzw. ausgewählt, so kennt man  $kA$ . Idealerweise wird angenommen, dass der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  temperaturunabhängig gilt, was nicht ganz realistisch ist. Mit den bereits bekannten Berechnungsgleichungen könnte man iterativ die Austrittstemperaturen bestimmen. Die fortwährenden Annahmen und Nachrechnungen wären aber sehr arbeitsintensiv. Aus diesem Grund ist von BOŠNJKOVIĆ die **Betriebscharakteristik**

$$\Phi_i = \frac{|\Delta t_i|}{\Delta t_{\max}} \quad \text{z.B.} \quad \Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{\Delta t_1}{t'_1 - t'_2} \quad \text{oder} \quad \Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{\Delta t_2}{t'_1 - t'_2} \quad (1.12)$$

definiert worden, wobei der Index  $i$  für den Stoffstrom 1 oder 2 stehen kann. Es gilt aber stets:

$$\Delta t_{\max} = (t'_1 - t'_2) > 0.$$



Ausgehend von Gl. (1.12) gilt bezogen auf Stoffstrom 1:

$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} \quad (1.13)$	$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0 + \Delta t_2} \quad (1.13)$
--	---

Darstellung  $\Delta t_1$  mit den Größen  $\Delta t_0$  und  $\Delta t_A$ :

$\Delta t_1 = \Delta t_0 - \Delta t_2 - \Delta t_A$	$\Delta t_1 = \Delta t_0 + \Delta t_2 - \Delta t_A$
---	---

Substitution von  $\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}$  und Umformung:

$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}$	$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}$
--	--

Einsetzen in Gl. (1.13) liefert:

$\Phi_1 = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{\Delta t_0} \frac{1}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}$	$\Phi_1 = \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{\Delta t_0 + \frac{\Delta t_0 - \Delta t_A}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} \frac{1}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} = \frac{1 - \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_0}}$
---	---

Mit Gl. (1.2) ergibt sich nach Umformung:

Gleichstrom	Gegenstrom
$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} \quad (1.14)$	$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}} \quad (1.14)$ <p>Für <math>\dot{C}_1 = \dot{C}_2</math> gilt nach einer Grenzwertbetrachtung (L'HOSPITAL):</p> $\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{\frac{kA}{\dot{C}_1}}{1 + \frac{kA}{\dot{C}_1}} \quad (1.14a)$

Die analogen Ableitungen ergeben bezogen auf den Stoffstrom 2:

Gleichstrom	Gegenstrom
$\Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}}{1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}} \quad (1.15)$	$\Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}}{1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}} \quad (1.15)$ <p>Für <math>\dot{C}_1 = \dot{C}_2</math> gilt nach einer Grenzwertbetrachtung (L'HOSPITAL):</p> $\Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{\frac{kA}{\dot{C}_2}}{1 + \frac{kA}{\dot{C}_2}} \quad (1.15a)$

### Wann ist mit $\Phi_1$ und wann mit $\Phi_2$ zu arbeiten?

Dies ist grundsätzlich egal, solange beide Stoffströme eine Temperaturveränderung im Wärmeübertrager erfahren. Tritt aber bei einem Stoffstrom keine Temperaturänderung ein, so entspricht dies einem unendlich großen Wärmekapazitätsstrom. Dieser muss im Term  $\dot{C}_1 / \dot{C}_2$  bzw.  $\dot{C}_2 / \dot{C}_1$  dann den Nenner bilden. Dieser unendlich große Wärmekapazitätsstrom könnte *theoretisch* durch einen unendlich großen Massestrom hervorgerufen werden, in praxi wird es sich aber um ein verdampfendes oder kondensierendes Medium handeln, sodass wärmetechnisch gesehen die spezifische Wärmekapazität  $c \rightarrow \infty$  geht.

- Bei einem **Kondensator** (heißes Medium kondensiert), ist mit  $\Phi_2$  zu arbeiten ( $\dot{C}_2 / \dot{C}_1 = 0$ ).
- Bei einem **Verdampfer** (kaltes Medium verdampft), ist mit  $\Phi_1$  zu arbeiten ( $\dot{C}_1 / \dot{C}_2 = 0$ ).



<b>Gleichstrom und Gegenstrom sind identisch!</b>	
Kondensator	Verdampfer
$\Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_2}} \quad (1.16)$	$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_1}} \quad (1.16a)$

**1.8 Weitere charakteristische Größen bei bekannter Betriebscharakteristik**

Gleichstrom	Gegenstrom
-------------	------------

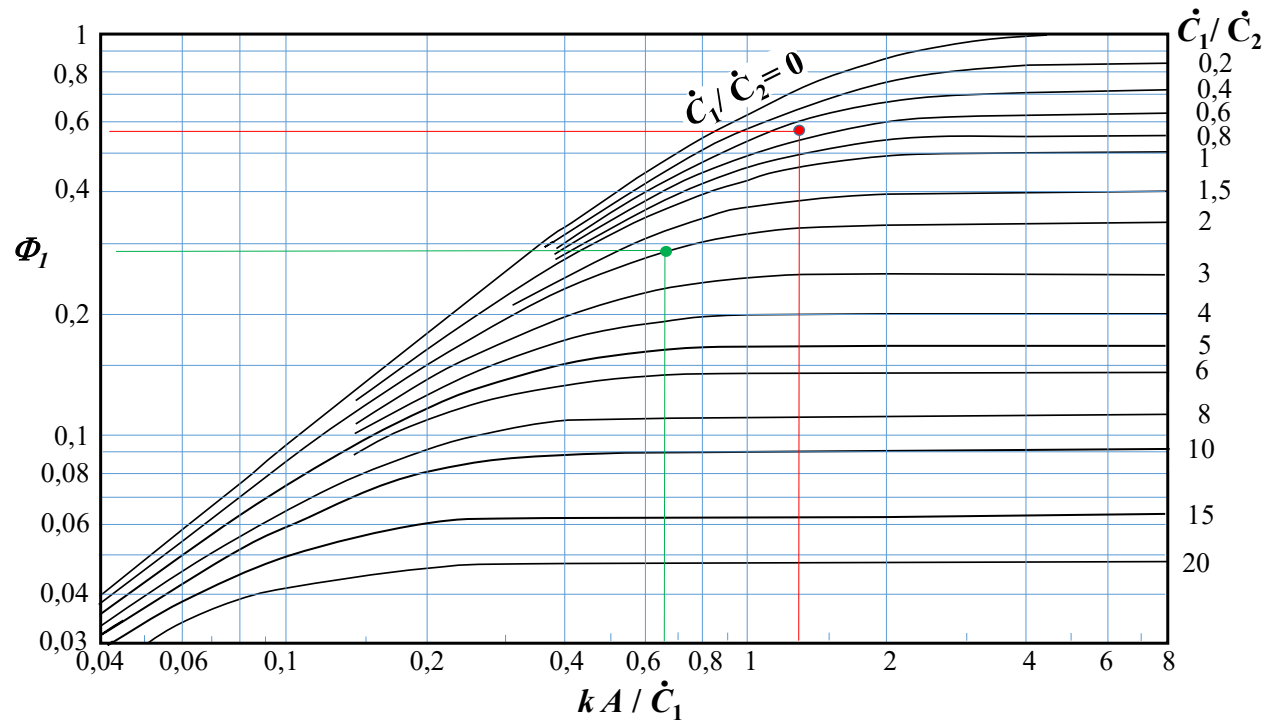
Aus den Gln. (1.11) und (1.12) leiten sich ab:

Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz in dimensionsloser Darstellung:	$\Delta t_m = \Phi_1 \frac{t'_1 - t'_2}{\dot{C}_1} = \Phi_2 \frac{t'_1 - t'_2}{\dot{C}_2} \quad (1.17)$	(1.17)
	$\Phi_m = \frac{\Delta t_m}{t'_1 - t'_2} = \frac{\Phi_1}{\dot{C}_1} = \frac{\Phi_2}{\dot{C}_2} \quad (1.17a)$	(1.17a)

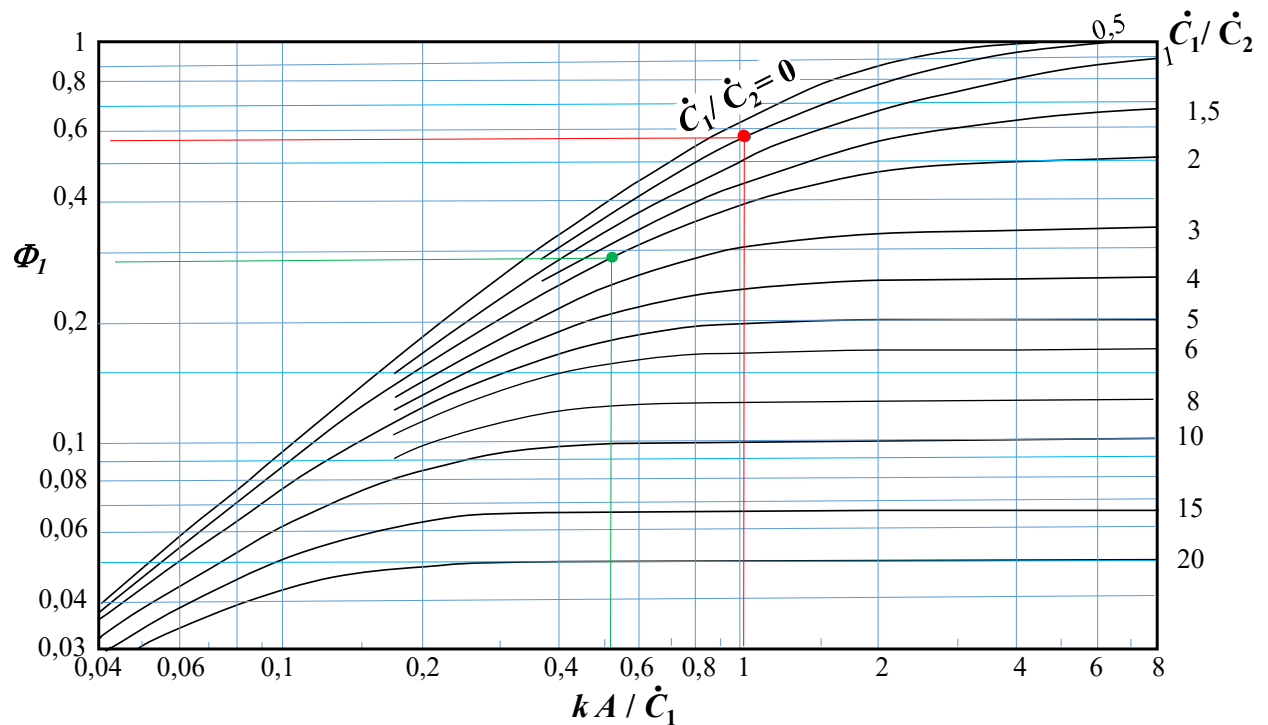
Aus Gln. (1.14) bzw. (1.15) folgen:

$kA = \frac{-\ln\left(1 - \Phi_1 \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right)\right)}{\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}} \quad (1.18)$	$kA = -\frac{\ln\frac{1 - \Phi_1}{1 - \Phi_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}}{\left(\frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2}\right)} \quad (1.18)$
$kA = \frac{-\ln\left(1 - \Phi_2 \left(1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right)\right)}{\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}} \quad (1.18)$	$kA = -\frac{\ln\frac{1 - \Phi_2}{1 - \Phi_2 \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}}}{\left(\frac{1}{\dot{C}_2} - \frac{1}{\dot{C}_1}\right)} \quad (1.18)$
Für $\dot{C}_1 = \dot{C}_2$ folgt nach einer Grenzwertbetrachtung (L'HOSPITAL) oder direkt aus Gl. (1.14a) bzw. (1.15a):	
$kA = \dot{C}_1 \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_1} = \dot{C}_2 \frac{\Phi_2}{1 - \Phi_2} \quad (1.18a)$	

### 1.9 Grafische Darstellung der Betriebscharakteristiken nach konventioneller Form



**Bild 1.1** Betriebscharakteristik  $\Phi_1 = (t'_1 - t''_1)/(t'_1 - t'_2)$  für Gleichströmer

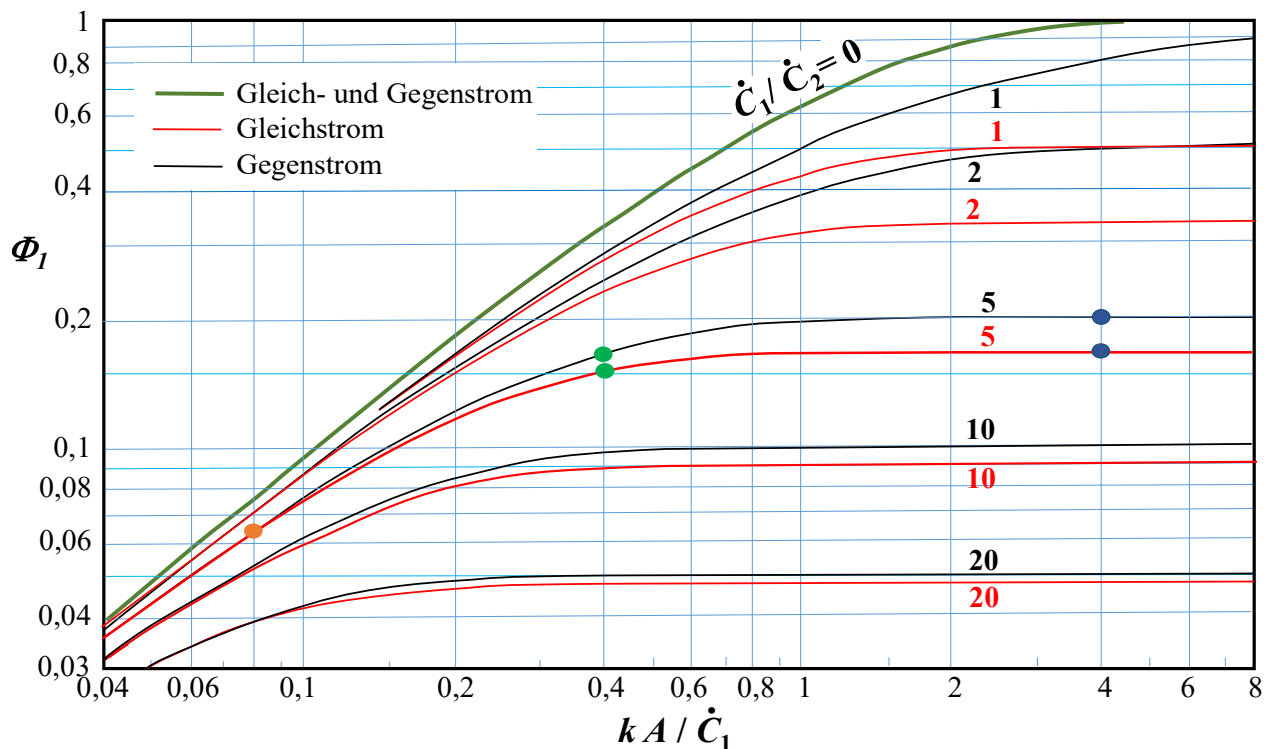


**Bild 1.2** Betriebscharakteristik  $\Phi_1 = (t'_1 - t''_1)/(t'_1 - t'_2)$  für Gegenströmer

Beide Darstellungen gelten bei Vertauschen der Indizes auch für  $\Phi_2 = (t''_2 - t'_2)/(t'_1 - t'_2)$  in Abhängigkeit von  $\dot{C}_2/\dot{C}_1$  und  $kA/\dot{C}_2$

Die konventionelle Darstellung bietet eine hohe Anschaulichkeit und gibt auch erste Hinweise zur Auslegung. Im Bild 1.3 sind auszugsweise die beiden Darstellungen überlagert, um die Unterschiede zwischen Gleichströmer und Gegenströmer zu charakterisieren:

- Bei  $\dot{C}_1 / \dot{C}_2 = 0$  (Verdampfer) oder  $\dot{C}_2 / \dot{C}_1 = 0$  (Kondensatoren) sind Gleich- und Gegenstrom identisch. Verdampfer und Kondensatoren haben aufgrund *einer* konstanten Stofftemperatur stets die höchsten Betriebscharakteristika  $\Phi_1$  oder  $\Phi_2$  (grüne Kurve).
- Bei gegebenem  $\dot{C}_1 / \dot{C}_2 > 0$  und  $k A / \dot{C}_1$  ergibt Gegenstrom einen größeren Wärmestrom als bei Gleichstrom ( $\Phi_{1,\text{Gegenstrom}} > \Phi_{1,\text{Gleichstrom}}$ ). D. h., Gegenströmer sind grundsätzlich leistungsstärker als Gleichströmer, wobei bezüglich des Terms  $k A / \dot{C}_1$  nachfolgende Besonderheiten gelten:
  - Bei kleiner Wärmeübertragerfläche (und/oder großem Wärmekapazitätsstrom) sind Gleich- und Gegenstrom nahezu gleichwertig (brauner Betriebspunkt).
  - Bei mittlerer Wärmeübertragerfläche wächst bei deren Zunahme der Wärmestrom bei Gegenstrom stärker als bei Gleichstrom (grüne Betriebspunkte).
  - Bei großer Wärmeübertragerfläche bringt deren Vergrößerung kaum noch eine Leistungssteigerung (blaue Betriebspunkte).
- Bei  $\dot{C}_1 = \dot{C}_2$  und  $k A \rightarrow \infty$  ergeben sich nach den Gln. (1.14) bis (1.15a) die theoretischen Maximalwerte  $\Phi_{\text{Gleichstrom}} = 0,5$  und  $\Phi_{\text{Gegenstrom}} = 1$ .
- Alle Kurven  $\Phi$  verlaufen durch den Koordinatenursprung, was aus den Gln. (1.14) bis (1.16a) folgt. (Beachte, dass Bild 1.3 eine doppelt logarithmische Teilung besitzt!)

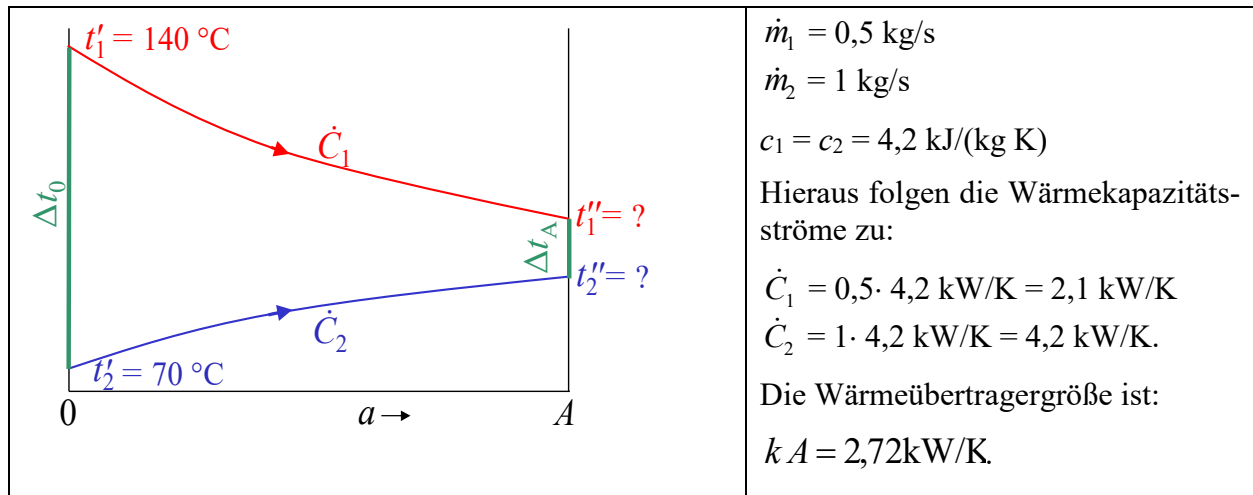


**Bild 1.3** Betriebscharakteristik  $\Phi_1 = (t'_1 - t''_1) / (t'_1 - t'_2)$  im Vergleich: Gleich- und Gegenströmer

### 1.10 Beispiel: Nachrechnung eines Gleichstrom-Wärmeübertragers

Es sind die Eintrittstemperaturen, die Masseströme und die Größe des Wärmeübertragers gegeben. Die Basiswerte entsprechen dem Beispiel nach Abschnitt 1.5.

Die Austrittstemperaturen der Stoffströme sind zu ermitteln.



Aus Gl. (1.14) folgt die Betriebscharakteristik

$$\Phi_1 = \frac{t'_1 - t''_1}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}}{1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{0,5}{1}\right) \frac{2,72}{2,1}}}{1 + \frac{0,5}{1}} = 0,571.$$

Oder Ablesen aus Bild 1.1:

$$\text{Für } \frac{kA}{\dot{C}_1} = \frac{2,72}{2,1} = 1,295 \text{ und } \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5 \text{ ergibt (roter Punkt) ungefähr } \Phi_1 = 0,57.$$

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1 wird gemäß der Definitionsgleichung für  $\Phi_1$  berechnet:

$$t''_1 = t'_1 - \Phi_1 (t'_1 - t'_2) = 140^\circ\text{C} - 0,571(140 - 70)\text{K} = 100^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.11) folgt schließlich die Austrittstemperatur des Stoffstromes 2:

$$\dot{m}_1 c_1 (t'_1 - t''_1) = \dot{m}_2 c_2 (t''_2 - t'_2) \rightarrow t''_2 = t'_2 + \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} (t'_1 - t''_1) = 70^\circ\text{C} + \frac{2,1}{4,2} (140 - 100)\text{K} = 90^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.17) ergibt sich die mittlere Temperaturdifferenz zu

$$\Delta t_m = \Phi_1 \frac{t'_1 - t'_2}{\frac{kA}{\dot{C}_1}} = 0,571 \frac{140 - 70}{\frac{2,72}{2,1}} \text{K} = 30,86 \text{K}.$$

Schließlich liefert Gl. (1.18) zur Kontrolle den Eingabewert:

$$kA = \frac{-\ln\left(1 - \Phi_1 \left(1 + \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right)\right)}{\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}} = \frac{-\ln\left(1 - 0,571 \left(1 + \frac{2,1}{4,2}\right)\right)}{\frac{1}{2,1} + \frac{1}{4,2}} \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 2,72 \frac{\text{kW}}{\text{K}}.$$

Weiterer Lösungsweg: Man könnte die Berechnung auch über  $\Phi_2$  vornehmen:

$$\text{Gl. (1.15)} \quad \Phi_2 = \frac{t''_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}}{1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{4,2}{2,1}\right) \frac{2,72}{4,2}}}{1 + \frac{4,2}{2,1}} = 0,286.$$

Oder Ablesen aus Bild 1.1, wobei die Indizes vertauscht werden müssen:

$$\text{Für } \frac{kA}{\dot{C}_2} = \frac{2,72}{4,2} = 0,648 \text{ und } \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{4,2}{2,1} = 2 \text{ ergibt (grüner Punkt) ungefähr } \Phi_2 = 0,29.$$

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 2 wird gemäß der Definitionsgleichung für  $\Phi_2$  berechnet:

$$t_2'' = t_2' + \Phi_2 (t_1' - t_2') = 70^\circ\text{C} + 0,286 (140 - 70) \text{ K} = 90^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.11) folgt schließlich die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1:

$$\dot{m}_1 c_1 (t_1' - t_1'') = \dot{m}_2 c_2 (t_2'' - t_2') \rightarrow t_1'' = t_1' - \frac{\dot{m}_2 c_2}{\dot{m}_1 c_1} (t_2'' - t_2') = 140^\circ\text{C} - \frac{4,2}{2,1} (90 - 70) \text{ K} = 100^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.17) ergibt sich die mittlere Temperaturdifferenz zu

$$\Delta t_m = \Phi_2 \frac{t_1' - t_2'}{\frac{kA}{\dot{C}_2}} = 0,286 \frac{140 - 70}{\frac{2,72}{4,2}} \text{ K} = 30,91 \text{ K}.$$

Schließlich liefert Gl. (1.18) zur Kontrolle den Eingabewert:

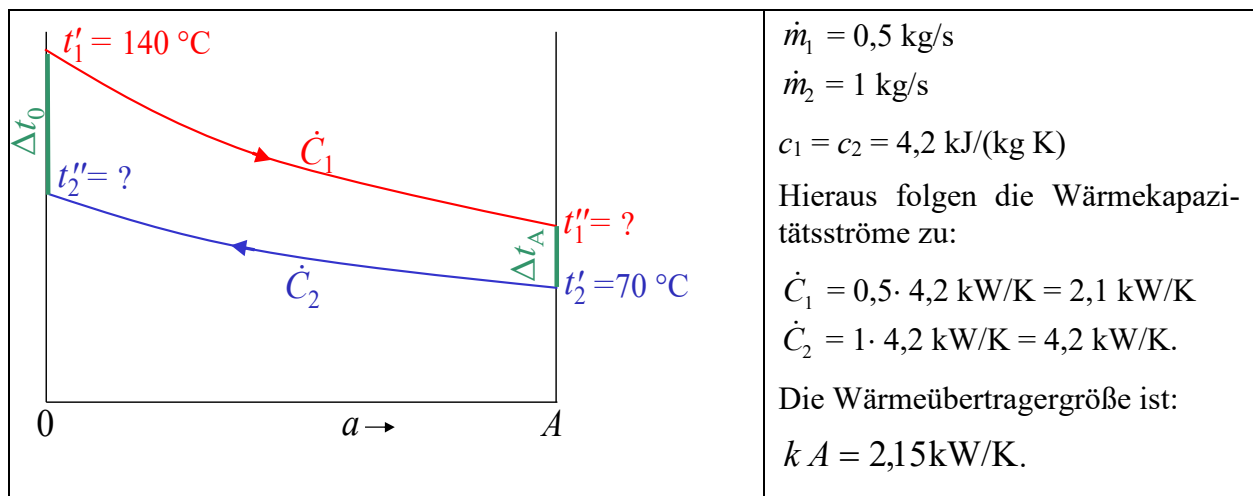
$$kA = \frac{-\ln\left(1 - \Phi_2\left(1 + \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right)\right)}{\frac{1}{\dot{C}_1} + \frac{1}{\dot{C}_2}} = \frac{-\ln\left(1 - 0,286\left(1 + \frac{4,2}{2,1}\right)\right)}{\frac{1}{2,1} + \frac{1}{4,2}} \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 2,73 \frac{\text{kW}}{\text{K}}.$$

Bis auf numerische Ungenauigkeiten ergeben sich alle im Beispiel 1.5 genannten Basiswerte!

### 1.11 Beispiel: Nachrechnung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers

Es sind die Eintrittstemperaturen, die Masseströme und die Größe des Wärmeübertragers gegeben. Die Basiswerte entsprechen dem Beispiel nach Abschnitt 1.6.

Die Austrittstemperaturen der Stoffströme sind zu ermitteln.



Aus Gl. (1.14) folgt die Betriebscharakteristik

$$\Phi_1 = \frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}}{1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}\right) \frac{kA}{\dot{C}_1}}} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{2,1}{4,2}\right) \frac{2,15}{2,1}}}{1 - \frac{2,1}{4,2} e^{-\left(1 - \frac{2,1}{4,2}\right) \frac{2,15}{2,1}}} = 0,572.$$

Oder Ablesen aus Bild 1.2:

$$\text{Für } \frac{kA}{\dot{C}_1} = \frac{2,15}{2,1} = 1,024 \text{ und } \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5 \text{ ergibt (roter Punkt) ungefähr } \Phi_1 = 0,57.$$

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1 wird gemäß der Definitionsgleichung für  $\Phi_1$  berechnet:

$$t_1'' = t_1' - \Phi_1 (t_1' - t_2') = 140^\circ\text{C} - 0,572 (140 - 70) \text{ K} = 100^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.11) folgt schließlich die Austrittstemperatur des Stoffstromes 2:

$$\dot{m}_1 c_1 (t_1' - t_1'') = \dot{m}_2 c_2 (t_2'' - t_2') \rightarrow t_2'' = t_2' + \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} (t_1' - t_1'') = 70^\circ\text{C} + \frac{2,1}{4,2} (140 - 100)\text{K} = 90^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.17) ergibt sich die mittlere Temperaturdifferenz zu

$$\Delta t_m = \Phi_1 \frac{t_1' - t_2'}{\frac{kA}{\dot{C}_1}} = 0,572 \frac{140 - 70}{\frac{2,15}{2,1}} \text{K} = 39,11 \text{K}.$$

Schließlich liefert Gl. (1.18) zur Kontrolle den Eingabewert:

$$kA = - \frac{\ln \frac{1 - \Phi_1}{1 - \Phi_1 \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2}}}{\left( \frac{1}{\dot{C}_1} - \frac{1}{\dot{C}_2} \right)} = - \frac{\ln \frac{1 - 0,572}{1 - 0,572 \frac{2,1}{4,2}}}{\left( \frac{1}{2,1} - \frac{1}{4,2} \right)} = 2,15 \text{kW/K}.$$

**Weiterer Lösungsweg:** Man könnte die Berechnung auch über  $\Phi_2$  vornehmen:

$$\text{Gl. (1.15)} \quad \Phi_2 = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}}{1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} e^{-\left(1 - \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}\right) \frac{kA}{\dot{C}_2}}} = \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{4,2}{2,1}\right) \frac{2,15}{4,2}}}{1 - \frac{4,2}{2,1} e^{-\left(1 - \frac{4,2}{2,1}\right) \frac{2,15}{4,2}}} = 0,286.$$

**Oder Ablesen aus Bild 1.2, wobei die Indizes vertauscht werden müssen:**

$$\text{Für } \frac{kA}{\dot{C}_2} = \frac{2,15}{4,2} = 0,512 \text{ und } \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{4,2}{2,1} = 2 \text{ ergibt (grüner Punkt) ungefähr } \Phi_1 = 0,29.$$

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 2 wird gemäß der Definitionsgleichung für  $\Phi_2$  berechnet:

$$t_2'' = t_2' + \Phi_2 (t_1' - t_2') = 70^\circ\text{C} + 0,286(140 - 70)\text{K} = 90^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.11) folgt schließlich die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1:

$$\dot{m}_1 c_1 (t_1' - t_1'') = \dot{m}_2 c_2 (t_2'' - t_2') \rightarrow t_1'' = t_1' - \frac{\dot{m}_2 c_2}{\dot{m}_1 c_1} (t_2'' - t_2') = 140^\circ\text{C} - \frac{4,2}{2,1} (90 - 70)\text{K} = 100^\circ\text{C}.$$

Aus Gl. (1.17) ergibt sich die mittlere Temperaturdifferenz zu

$$\Delta t_m = \Phi_2 \frac{t_1' - t_2'}{\frac{kA}{\dot{C}_2}} = 0,286 \frac{140 - 70}{\frac{2,15}{4,2}} \text{K} = 39,11 \text{K}.$$

Schließlich liefert Gl. (1.18) zur Kontrolle den Eingabewert:

$$kA = - \frac{\ln \frac{1 - \Phi_2}{1 - \Phi_2 \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1}}}{\left( \frac{1}{\dot{C}_2} - \frac{1}{\dot{C}_1} \right)} = - \frac{\ln \frac{1 - 0,286}{1 - 0,286 \frac{4,2}{2,1}}}{\left( \frac{1}{4,2} - \frac{1}{2,1} \right)} \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 2,15.$$

**Bis auf numerische Ungenauigkeiten ergeben sich alle im Beispiel 1.6 genannten Basiswerte!**

### 1.12 Anwendung der Betriebscharakteristik in aktueller Form und Diagrammdarstellung

Das Berechnungsprinzip mit Hilfe der Betriebscharakteristik ist zwar grundsätzlich beibehalten worden, es erfuhr aber eine umfangreiche Weiterentwicklung, die beispielsweise in [2] dokumentiert ist. Dabei wurden die Bezeichnungen und die Diagrammdarstellungen geändert.

Die Diagramme sind komprimierter in der Aussage und vor allem für zahlreiche Apparateformen (Mehrgängigkeit) verfügbar. Für den ungeübten Nutzer sank allerdings die Anschaulichkeit.

Es gelten die neuen Bezeichnungen im Vergleich zu den bisherigen Größen:

Neue Bezeichnung	Berechnungsbereich Diagrammbereich S.24	Bisherige Bezeichnung
dimensionslose Temperaturänderung der Stoffströme $P$		Betriebscharakteristik $\Phi$
$P_1 = \frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} ; P_2 = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} \quad (1.19)$	$0 \leq P_{1,2} \leq 1$ $0 \leq P_{1,2} \leq 1$	$\Phi_1 = \frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} ; \Phi_2 = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'}$
Anzahl der Übertragungseinheiten (Number of Transfer Units) $NTU$		dimensionslose Wärmeübertragerfläche
$NTU_1 = \frac{k A}{\dot{C}_1} ; NTU_2 = \frac{k A}{\dot{C}_2} \quad (1.20)$	$0 \leq NTU_{1,2} \leq \infty$ $0 \leq NTU_{1,2} \leq \infty$	$\frac{k A}{\dot{C}_1} ; \frac{k A}{\dot{C}_2}$
Wärmekapazitätsstromverhältnis $R$		Wärmekapazitätsstromverhältnis
$R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} ; R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} \quad (1.21)$ Oftmals wird $\dot{C}$ durch $\dot{W}$ ersetzt!	$0 \leq R_{1,2} \leq \infty$ $0 \leq R_{1,2} \leq 1$	$\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{\dot{m}_1 c_1}{\dot{m}_2 c_2} ; \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{\dot{m}_2 c_2}{\dot{m}_1 c_1}$
<b>mittlere logarithmische Temperaturdifferenz</b>		mittlere logarithmische Temperaturdifferenz
$\Delta t_m = P_1 \frac{t_1' - t_2'}{NTU_1} = P_2 \frac{t_1' - t_2'}{NTU_2} \quad (1.22)$	$0 \leq \Delta t_m \leq \infty$	$\Delta t_m = \Phi_1 \frac{t_1' - t_2'}{\frac{k A}{\dot{C}_1}} = \Phi_2 \frac{t_1' - t_2'}{\frac{k A}{\dot{C}_2}}$

Damit ergeben sich die im Abschnitt 1.7 ausführlich abgeleiteten Zusammenhänge in neuer Darstellung (für beide Stoffströme i):

Gleichstrom	Gegenstrom
-------------	------------

Aus Gln. (1.14) und (1.15) folgt:

$P_i = \frac{1 - \exp[-(1 + R_i)NTU_i]}{1 + R_i}$	(1.23)	$P_i = \frac{1 - \exp[-(1 - R_i)NTU_i]}{1 - R_i \exp[-(1 - R_i)NTU_i]}$	(1.23)
		Für $R_i = R = 1$ gilt nach einer Grenzwertbetrachtung (L'HOSPITAL):	
		$P_i = \frac{NTU_i}{1 + NTU_i}$	(1.23a)

Aus Gl. (1.18) folgt:

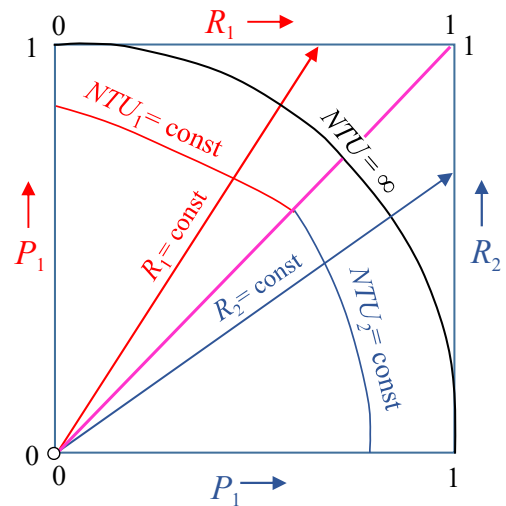
Gleichstrom		Gegenstrom
$NTU_i = \frac{-\ln(1 - P_i(1 + R_i))}{1 + R_i} \quad (1.24)$		$NTU_i = \frac{-\ln \frac{1 - P_i}{1 - P_i R_i}}{1 - R_i} \quad (1.24)$
		Für $R_i = R = 1$ folgt nach einer Grenzwertbetrachtung (L'HOSPITAL) oder direkt aus Gl. (1.18a):
		$NTU = \frac{P}{1 - P} \quad (1.24a)$

Aus Gl. (1.11) ergeben sich mit den neuen Bezeichnungen die Verhältniswerte:

Gleich- und Gegenstrom		
$\frac{NTU_1}{NTU_2} = R_2 \quad (1.25)$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{1}{R_1} = R_2 \quad (1.26)$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{NTU_1}{NTU_2} \quad (1.27)$

Der Diagrammaufbau ist nach [2] folgendermaßen gestaltet:

- Im Diagrammteil oberhalb der Diagonalen sind die Verhältnisse für den Stoffstrom 1, unterhalb die für den Stoffstrom 2 dargestellt.
- Die funktionellen Zugehörigkeiten bestehen stets zwischen den Größen:  $NTU$ ,  $R$  und  $P$ .
- Bei symmetrischen Stromführungen sind die beiden Diagrammhälften ebenfalls symmetrisch, sodass die Indizes der Größen vertauschbar sind. Bei reinem Gleich- und Gegenstrom trifft dies stets zu.
- Die Größe des Randmaßstabes  $R$  gilt längs der Verbindungsgeraden vom Koordinatenursprung zum angezeigten Randpunkt.
- Die Kurven  $NTU_1$  und  $NTU_2$  treffen sich auf der Diagonalen, wobei hier ein singulärer Punkt vorhanden ist (Kurvenzüge haben einen Knick). Dies trifft nicht auf die Kurve  $NTU = \infty$  innerhalb des Diagramms zu.

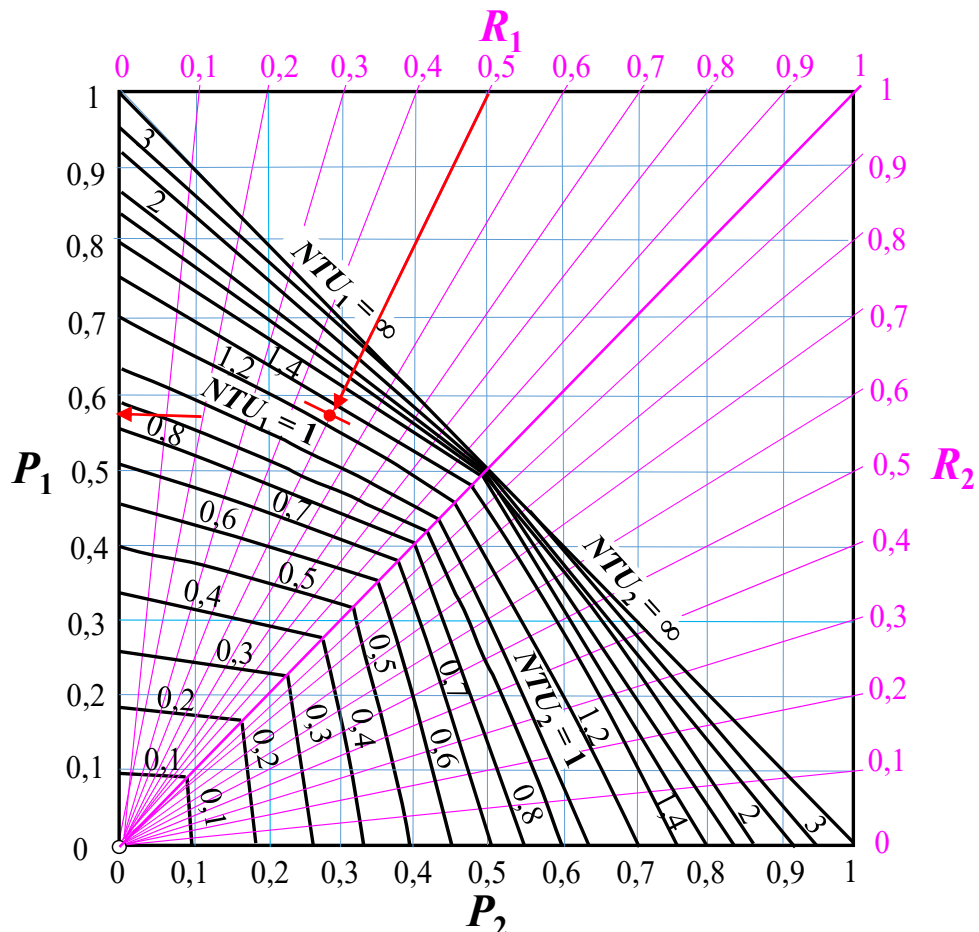


Eine Ausnahme bildet darstellungsbedingt der reine Gegenstrom, denn da verläuft  $NTU = \infty$  längs der oberen und rechten Diagrammbegrenzung.

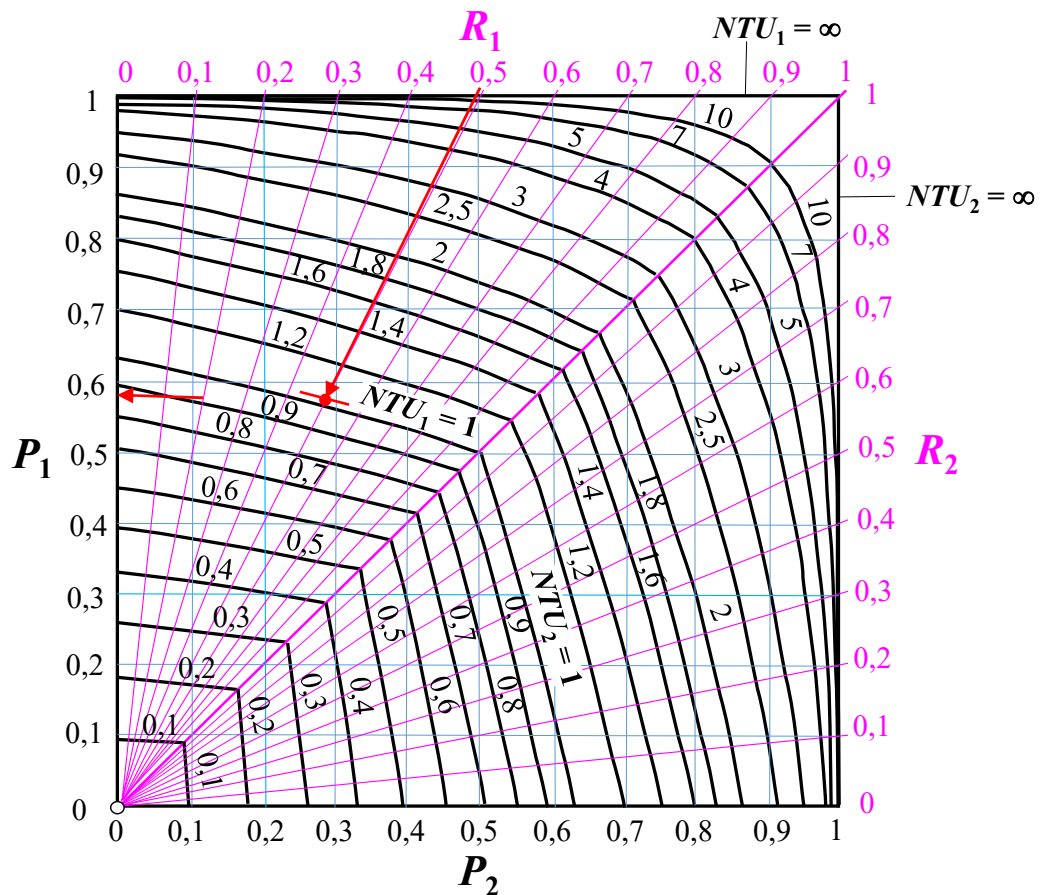
Analog zum Abschnitt 1.9 werden nachfolgend die Diagramme für reinen Gleich- und Gegenstrom nach der in [2] vorgeschlagenen Form dargestellt.

Der Vergleich der beiden Diagramme lässt analoge Aussagen – wie zum Bild 1.3 getroffen – zu.





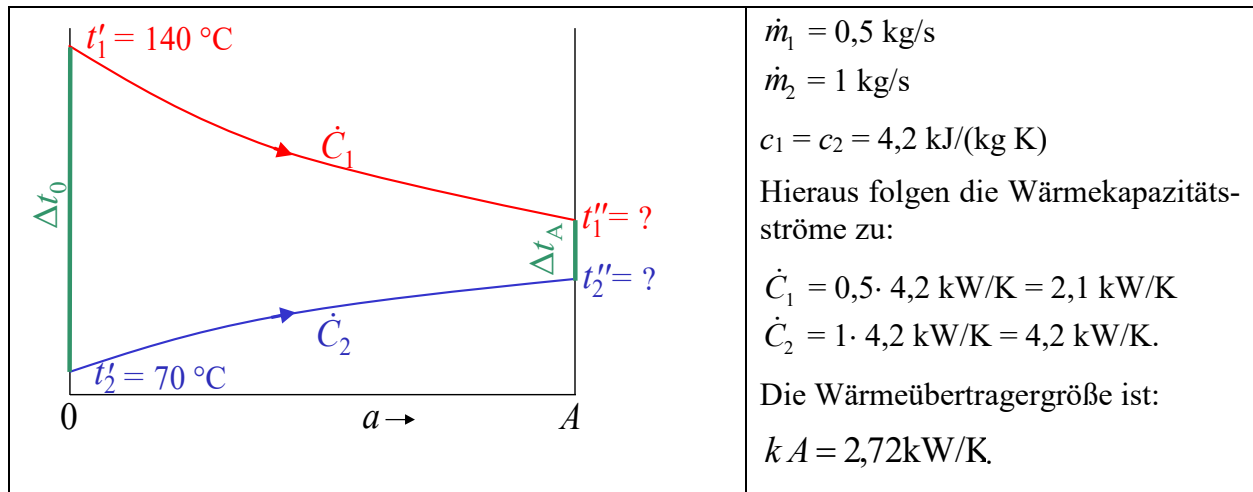
**Bild 1.4** Betriebscharakteristik  $\Phi_1 = (t'_1 - t''_1)/(t'_1 - t'_2)$  für Gleichströmer in Anlehnung an [2]



**Bild 1.5** Betriebscharakteristik  $P_1 = (t'_1 - t''_1)/(t'_1 - t'_2)$  für Gegenströmer in Anlehnung an [2]

**1.13 Beispiel: Nachrechnung des Gleichstrom-Wärmeübertragers gemäß Abschnitt 1.10**

Es sind die Eintrittstemperaturen, die Masseströme und die Größe des Wärmeübertragers gegeben. Die Austrittstemperaturen der Stoffströme sind zu ermitteln.



Aus Gl. (1.20)  $NTU_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1} = \frac{2,72}{2,1} = 1,295$  und Gl. (1.21)  $R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5$

kann Gl. (1.23), die inhaltlich mit Gl. (1.14) identisch ist, ausgewertet werden:

$$P_1 = \frac{1 - \exp[-(1 + R_1)NTU_1]}{1 + R_1} = \frac{1 - \exp[-(1 + 0,5)1,295]}{1 + 0,5} = 0,571.$$

Oder Ablesen aus Bild 1.4:

Für  $NTU_1 = \frac{2,72}{2,1} = 1,295$  und  $\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5$  ergibt (roter Punkt) ungefähr  $P_1 = 0,57$ .

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1 wird gemäß der Gl. (1.19) berechnet:

$$t_1'' = t_1' - P_1(t_1' - t_2') = 140^\circ\text{C} - 0,571(140 - 70)\text{K} = 100^\circ\text{C}.$$

Alle weiteren Berechnungen sind mit Abschnitt 1.10 identisch.

**Weiterer Lösungsweg:** Man könnte die Berechnung auch über  $P_2$  vornehmen:

Aus Gl. (1.20)  $NTU_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2} = \frac{2,72}{4,2} = 0,648$  und Gl. (1.21)  $R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{4,2}{2,1} = 2$

kann Gl. (1.23), die inhaltlich mit Gl. (1.15) identisch ist, ausgewertet werden:

$$P_2 = \frac{1 - \exp[-(1 + R_2)NTU_2]}{1 + R_2} = \frac{1 - \exp[-(1 + 2)0,648]}{1 + 2} = 0,286.$$

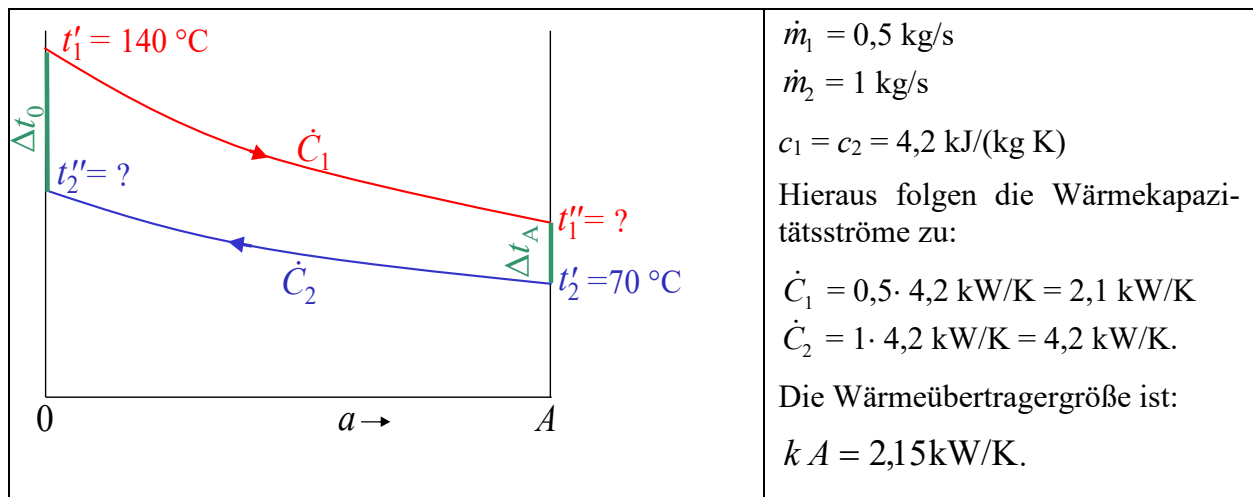
Oder Ablesen aus Bild 1.4?

Nein dies geht nicht, da im Diagramm  $R_2 = 2$  nicht dargestellt wird.

Alle weiteren Berechnungen sind mit Abschnitt 1.10 identisch.

**1.14 Beispiel: Nachrechnung eines Gegenstrom-Wärmeübertragers gemäß Abschnitt 1.11**

Es sind die Eintrittstemperaturen, die Masseströme und die Größe des Wärmeübertragers gegeben. Die Austrittstemperaturen der Stoffströme sind zu ermitteln.



Aus Gl. (1.20)  $NTU_1 = \frac{kA}{\dot{C}_1} = \frac{2,15}{2,1} = 1,024$  und Gl. (1.21)  $R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5$

kann Gl. (1.23), die inhaltlich mit Gl. (1.14) identisch ist, ausgewertet werden:

$$P_1 = \frac{1 - \exp[-(1 - R_1)NTU_1]}{1 - R_1 \exp[-(1 - R_1)NTU_1]} = \frac{1 - \exp[-(1 - 0,5)1,024]}{1 - 0,5 \exp[-(1 - 0,5)1,024]} = 0,572$$

Oder Ablesen aus Bild 1.5:

Für  $NTU_1 = \frac{2,15}{2,1} = 1,024$  und  $\frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} = \frac{2,1}{4,2} = 0,5$  ergibt (roter Punkt) ungefähr  $P_1 = 0,57$ .

Die Austrittstemperatur des Stoffstromes 1 wird gemäß der Gl. (1.19) berechnet:

$$t_1'' = t_1' - P_1(t_1' - t_2') = 140^\circ\text{C} - 0,572(140 - 70)\text{K} = 100^\circ\text{C}.$$

Alle weiteren Berechnungen sind mit Abschnitt 1.11 identisch.

**Weiterer Lösungsweg:** Man könnte die Berechnung auch über  $P_2$  vornehmen:

Aus Gl. (1.20)  $NTU_2 = \frac{kA}{\dot{C}_2} = \frac{2,15}{4,2} = 0,512$  und Gl. (1.21)  $R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = \frac{4,2}{2,1} = 2$

kann Gl. (1.23), die inhaltlich mit Gl. (1.15) identisch ist, ausgewertet werden:

$$P_2 = \frac{1 - \exp[-(1 - R_2)NTU_2]}{1 - R_2 \exp[-(1 - R_2)NTU_2]} = \frac{1 - \exp[-(1 - 2)0,512]}{1 - 2 \exp[-(1 - 2)0,512]} = 0,286.$$

Oder Ablesen aus Bild 1.5?

Nein dies geht nicht, da im Diagramm  $R_2 = 2$  nicht dargestellt wird.

Alle weiteren Berechnungen sind mit Abschnitt 1.11 identisch.

### 1.15 Warum wird die Nutzung der aktuellen Darstellung empfohlen?

Die konventionelle Diagrammdarstellung der Betriebscharakteristik wird als sehr anschaulich empfunden und zeigt auch durch die Lage des Betriebspunktes in Verbindung mit der Form der Kurvenschar sofort, ob die Größe der Wärmeübertragerfläche wirtschaftlich ist. Für den reinen Gleich- bzw. Gegenstrom bieten die neuartigen Darstellungen (Bilder 1.4/5) gegenüber den konventionellen Formen (Bilder 1.1/2) keine Vorteile. Im Gegenteil erschwert mitunter die Begrenzung der Wärmekapazitätsstromverhältnisse

$$R_1 = \frac{\dot{C}_1}{\dot{C}_2} \leq 1 \quad ; \quad R_2 = \frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} \leq 1 \text{ die Handhabung.}$$

Der Hauptvorteil der Diagramme liegt in deren mittlerweile großen Verbreitung für verschiedenste Wärmeübertragerformen:

- Mehrgängigkeit bei Rohrbündel- und Plattenwärmeübertragern
- Kreuzstromwärmeübertragern unterschiedlichster Schaltungen und Strömungsformen
- Einbeziehen der Rührkessel.

ROETZEL und SPANG haben hierbei eine sehr verdienstvolle Arbeit geleistet und u. a. in [2] publiziert.

Wie aus [2] ersichtlich, ergeben sich für die vorgenannten Wärmeübertragervarianten mitunter außerordentlich komplizierte Berechnungsgleichungen für die Betriebscharakteristik  $P$ . Einige Schaltungsvarianten sind sogar nur numerischen Berechnungen zugänglich. In allen Fällen wurde eine einheitliche Berechnungsstrategie gewählt, die eben auf der Betriebscharakteristik – letztlich auf der mittleren Temperaturdifferenz – beruht.

Man geht im Moment davon aus, dass in der Regel für ingenieurmäßige Anwendungen die Diagrammgenauigkeit ausreichend ist.

Die Nachbildung der genauen Strömungsverhältnisse, beispielsweise durch Umlenkleche in den Wärmeübertragern verursacht, ist nach dem bisherigen Entwicklungsstand durch zwei Methoden möglich:

- Nach den Vorschlägen von SCHLÜNDER und GADDIS ist die sogenannte Zellenmethode einsetzbar. Dabei erfolgt eine Auflösung der Wärmeübertragerfläche entsprechend der Durchströmung in Teilbereiche, die dann entsprechend der ein- und austretenden Temperaturen und Teilbilanzen miteinander verknüpft werden. Nach Lösen des Systems ergibt sich die Wärmeübertragerleistung.
- Die genaueste Methode ist der Einsatz der numerischen Strömungssimulation, die das Strömungsfeld und das Temperaturfeld liefert, aus dem schließlich die Wärmeübertragerleistung ermittelt werden kann.

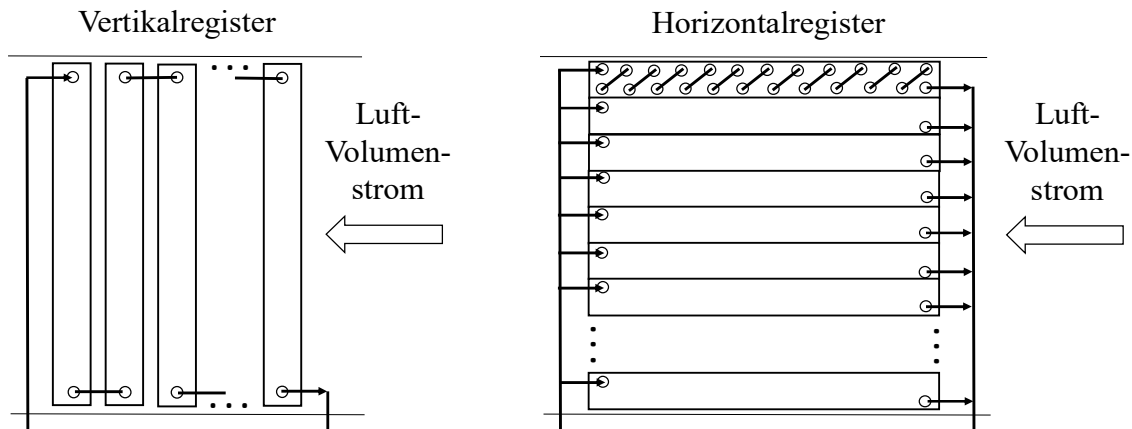
Die in beiden Fällen zu treffenden Annahmen und die aufwändigen Modellierungen rechtfertigen den Aufwand derzeit in der Regel nicht. Hierbei sei besonders auf die Unsicherheit der Annahmen hingewiesen.

## 2 Kreuzgegenströmer in der Klimatechnik – Zusammenfassung der Diagrammergebnisse zur vereinfachten, praktischen Nutzung

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Vorteile der "Betriebscharakteristik" zur wärmetechnischen Berechnung spezieller Wärmeübertragerkonstruktionen benannt. Dies trifft besonders auf Kreuzgegenströmer zu. Die umfangreichen Berechnungsgleichungen für die Betriebscharakteristik bei komplizierten Schaltungsarten können umgangen werden, wenn man vorher spezielle Auswertungen vornimmt. Dies ist in [3] beispielhaft dargestellt.

Um effiziente Wärmerückgewinnungssysteme zu realisieren, ist man bemüht, sowohl im Fortluft- als auch im Außenluftstrom einen Gegenstromwärmeübertrager zu installieren. Dies bereitet aber meistens konstruktiv bedingt Schwierigkeiten, sodass in der Regel Wärmeübertrager im Kreuzgegenstrom eingebaut werden. Mitunter wird in der Literatur vorgeschlagen, den Wärmeübertrager sicherheitshalber als reinen Kreuzströmer zu behandeln. Diese oberflächliche Beurteilung widerspricht sowohl den Genauigkeitsanforderungen als auch dem heute üblichen Stand der Technik.

- Die installierten Wärmeübertragerflächen sind relativ groß, wodurch sich große  $NTU$ -Werte ergeben. In diesen Fällen nimmt die Art der Stromführung großen Einfluss auf den Übertragungsgrad (Betriebscharakteristik)  $P$ , weshalb die Stromführung genau zu untersuchen ist.
- Der Begriff Kreuzstrom allein kennzeichnet die Stromführung nicht eindeutig. Zwischen reinem Kreuzstrom mit jeweils parallelen Strombahnen und einseitig oder gar beidseitig vermischem Kreuzstrom liegen sehr große qualitative Unterschiede. Gleiches gilt für die verschiedenen Arten des Kreuzgegenstromes.
- Heutige Hochleistungssysteme zeichnen sich durch Rohrführungen aus, die dem Gegenstrom sehr nahe kommen. Dies wird erreicht durch zahlreiche, im Gegensinn angeordnete Vertikalregister oder durch parallele Reihung von Horizontalregistern (Bild 2.1).



**Bild 2.1** Typische Schaltungen für Hochleistungswärmeübertrager in kreislaufverbundenen Systemen

### Näherungsweise Bestimmung der Betriebscharakteristik

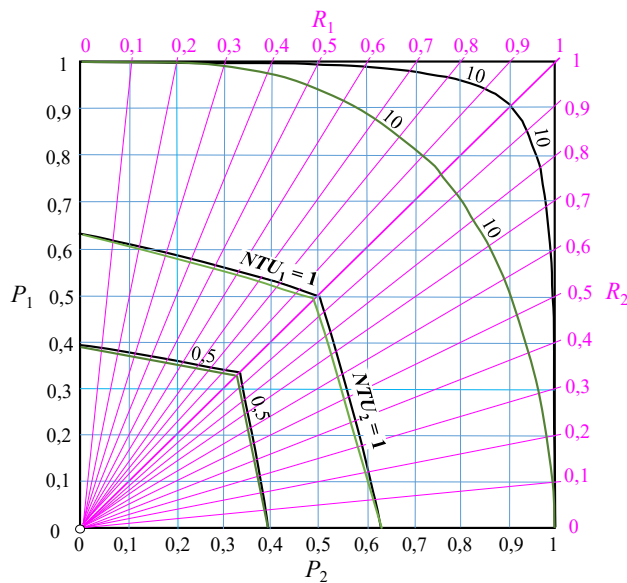
Die effektivste Stromführung stellt – wie mehrfach gezeigt – der reine Gegenstrom dar. Er wurde durch die Gln. (1.14) und (1.14a) bzw. (1.23) und (1.23a) mathematisch beschrieben. Die Betriebscharakteristik werde im Weiteren  $P_g$  genannt, sodass die zugehörigen, bekannten Gleichungen – jeweils bezogen auf den Stoffstrom 1 – lauten:

$$P_g = \frac{1 - \exp[-(1 - R_1)NTU_1]}{1 - R_1 \exp[-(1 - R_1)NTU_1]} \quad \text{bzw. für } R_1 = R = 1 \quad P_g = \frac{NTU_1}{1 + NTU_1} \quad (2.1)$$

Der unter heutigen Bedingungen eingesetzte, schlechteste Wärmeübertrager sei ein Kreuzgegenströmer mit zwei Rohrreihen und zwei Durchgängen, die gegensinnig zum Luftstrom geschaltet sind. Nach [2] gilt für die Betriebscharakteristik des Stoffstromes 1, die hier  $P_k$  genannt wird:

$$P_k = 1 - \left[ \frac{x}{2} + \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \exp\left( \frac{2x}{R_1} \right) \right]^{-1} \quad \text{mit} \quad x = 1 - \exp\left( -\frac{R_1 NTU_1}{2} \right). \quad (2.2)$$

Es wird von dem pragmatischen Ansatz ausgegangen, dass alle heute real üblichen Wärmeübertrager zur Wärmerückgewinnung zwischen diesen beiden Apparaten liegen. Bild 2.2 zeigt drei ausgewählte  $P$ -Bereiche, die sich zwischen  $P_g$  und  $P_k$  ergeben. Sie sind in Abhängigkeit von  $NTU$  und  $R$  sehr unterschiedlich. Ihr Maximum tritt für  $NTU = \text{const}$  stets bei  $R = 1$  auf. Die Tabelle 2.1 gibt die Verhältnisswerte  $P_g/P_k$  zahlenmäßig wieder.



**Bild 2.2** Variationsbereiche der Betriebscharakteristika für Wärmeübertrager im Gegenstrom  $P_g$  (schwarze Kurven) und im Kreuzgegenstrom  $P_k$  (grüne Kurven) mit zwei Rohrreihen sowie gegensinnig geschalteten Durchgängen  
Da die Stromführung im Kreuzgegenströmer nicht symmetrisch ist, unterscheiden sich die grünen Kurven im unteren und oberen Diagrammteil.

**Tabelle 2.1** Grenzbetriebscharakteristika des üblichen Bereiches von Wärmeübertragern zur Wärmerückgewinnung in RLT-Anlagen ( $P_g$  reiner Gegenströmer,  $P_k$  Kreuzgegenströmer mit zwei Rohrreihen und zwei Durchgängen im Gegensinn zum Luftstrom)

NTU	R = 0,5			R = 1			R = 2			R = 3		
	$P_g$	$P_k$	$P_g/P_k$	$P_g$	$P_k$	$P_g/P_k$	$P_g$	$P_k$	$P_g/P_k$	$P_g$	$P_k$	$P_g/P_k$
0,5	0,362	0,361	1,004	0,333	0,331	1,007	0,282	0,279	1,011	0,240	0,237	1,014
1	0,565	0,559	1,011	0,500	0,490	1,020	0,387	0,376	1,030	0,302	0,293	1,029
10	0,997	0,954	1,045	<b>0,909</b>	<b>0,760</b>	<b>1,196</b>	0,500	0,462	1,082	0,333	0,322	1,037
20	1,000	0,963	1,038	<b>0,952</b>	<b>0,762</b>	<b>1,251</b>	0,500	0,462	1,082	0,333	0,322	1,037

Die Betriebscharakteristik für einen realen Wärmeübertrager folgt näherungsweise dem Ansatz

$$P = P_g f_g + P_k (1 - f_g). \quad (2.3)$$

Der Faktor  $f_g$  stellt einen Wichtungsfaktor, der den "erhöhten Gegenstromanteil" angibt, dar. Es gelten:

$f_g = 1$  reiner Gegenstrom

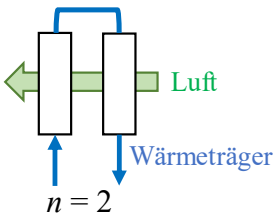
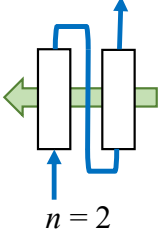
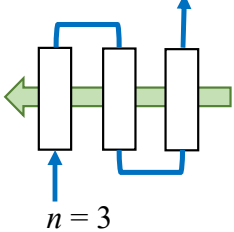
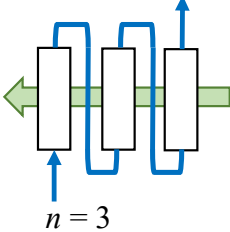
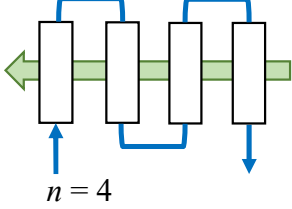
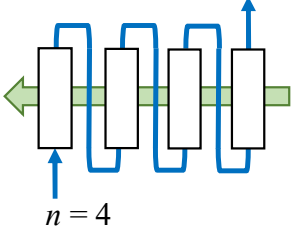
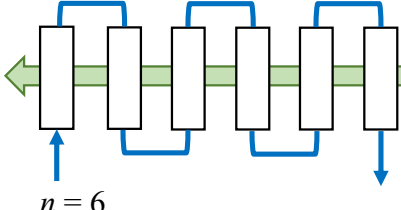
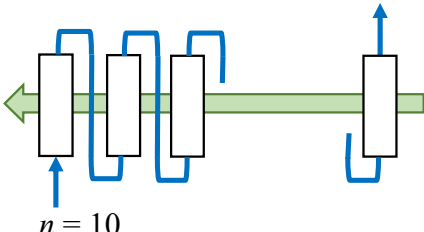
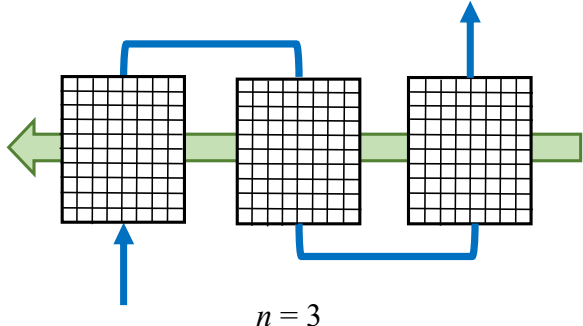
$f_g = 0$  Kreuzgegenstrom, zwei Rohrreihen, zwei Durchgänge, gegensinnig.

Die **mittlere logarithmische Temperaturdifferenz** ergibt sich gemäß Gl. (1.22) zu:

$$\Delta t_m = P \frac{t'_1 - t'_2}{NTU} \tag{2.4}$$

In Tabelle 2.2 sind die  $f_g$ -Faktoren zugehörig zu den Wärmeübertragerschaltungen aufgeführt. Sie wurden aus den in [2, Auflage 1994] gegebenen Betriebscharakteristika für  $NTU \approx 10$  und  $R = 1$  ermittelt.

**Tabelle 2.2** Faktoren  $f_g$  für reale Wärmeübertragerschaltungen zur Anwendung in Gl. (2.3)

Kreuzgegenstrom mit $n$ Rohrreihen und $n$ Durchgängen; gegensinnig	Kreuzgegenstrom mit $n$ Rohrreihen und $n$ Durchgängen; gleichsinnig
 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,16</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,39</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,54</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,60</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,74</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,82</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>f_g = 0,98</math></p>
<p>Kreuzgegenstrom mit <math>n</math> Durchgängen; Luft unvermischt; Wärmeträger nur zwischen den Durchgängen vermischt; gegensinnig</p>	
 <p style="text-align: center;"><math>n = 3</math></p>	<p><math>n = 2 \rightarrow f_g = 0,60</math>  <math>n = 3 \rightarrow f_g = 0,70</math>  <math>n = 4 \rightarrow f_g = 0,79</math></p>

Eine Beispielrechnung soll eine stichprobenhafte Kontrolle der zu erwartenden Abweichungen bei Nutzung der vorgeschlagenen Näherung geben. Es wird ein Kreuzgegenströmer mit vier Rohrreihen und vier Durchgängen bei Gegensinnschaltung eingesetzt. Aus Tabelle 2.2 folgt hierfür  $f_g = 0,6$ . Die genaue Nachrechnung nach [2]

$$P_{kg} = 1 - \left[ \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) + x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \left[ 1 - \frac{2x}{R_1} \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \right] \exp \left( \frac{2x}{R_1} \right) + \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^3 \exp \left( \frac{4x}{R_1} \right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

mit

$$x = 1 - \exp \left( - \frac{R_1 NTU_1}{4} \right)$$

liefert die in Tabelle 2.3 vermerkten Werte. Die Ergebnisse der Näherung nach Gl. (2.3) werden  $P_{kgn}$  genannt. Die prozentualen Abweichungen  $f$  betragen

$$f = \frac{P_{kgn} - P_{kg}}{P_{kg}} 100\% . \quad (2.6)$$

$P_{kgn}$  und  $f$  sind ebenfalls in Tabelle 2.3 eingetragen. Die maximalen Abweichungen  $f$  sind kleiner als  $\pm 2\%$ . Dieses Ergebnis ist ohne weiteres akzeptabel, wenn man die übrigen Unwägbarkeiten und Annahmen betrachtet, die mit der Größe  $kA$  verbunden sind.

**Tabelle 2.3** Betriebscharakteristika eines Kreuzgegenströmers mit vier Rohrreihen, vier Durchgänge im Gegensinn zum Luftstrom nach genauer und näherungsweise Berechnung sowie des dabei auftretenden Fehlers ( $P_{kg}$  exakter Wert nach Gl. (2.5);  $P_{kgn}$  Näherung nach Gl. (2.3);  $f$  in %)

NTU	R = 0,5			R = 1			R = 2			R = 3		
	$P_{kg}$	$P_{kgn}$	$f$	$P_{kg}$	$P_{kgn}$	$f$	$P_{kg}$	$P_{kgn}$	$f$	$P_{kg}$	$P_{kgn}$	$f$
0,5	0,362	0,362	-0,1	0,333	0,332	-0,1	0,282	0,281	-0,2	0,239	0,239	-0,2
1	0,563	0,562	-0,2	0,497	0,496	-0,3	0,384	0,383	-0,4	0,300	0,298	-0,4
10	0,986	0,980	-0,7	0,848	0,849	0,1	<b>0,494</b>	<b>0,485</b>	<b>-1,9</b>	0,333	0,329	-1,2
20	0,996	0,985	-1,0	<b>0,860</b>	<b>0,876</b>	<b>1,8</b>	<b>0,494</b>	<b>0,485</b>	<b>-1,9</b>	0,333	0,329	-1,2



### 3 Raumheizkörper

Eigentlich könnten die üblichen Raumheizkörper – beispielsweise die Radiatoren – mit den Berechnungsgleichungen für Parallelströmer bemessen bzw. nachgerechnet werden. Es gibt jedoch einige Besonderheiten, die eine separate Betrachtung rechtfertigen:

- Die Raumheizkörper werden in großen Stückzahlen als Typgrößen gefertigt und einer Normprüfung unterzogen. Dazu gehört vor allem die experimentelle Leistungsprüfung in Normprüfräumen. Die Auswertung der Messergebnisse ist ebenfalls genau vorgeschrieben.
- Der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  wird maßgeblich vom äußeren Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_a$  beeinflusst, der wiederum von der Heizflächenübertemperatur bezogen auf die Raumtemperatur abhängt.
- Die Heizflächentemperatur entspricht bei den konventionellen Heizflächen (Rohrregister, Radiatoren) näherungsweise der örtlichen Heizmedientemperatur  $t_H(a) \{\equiv t_1(a)\}$ .
- Die Umgebungstemperatur ( $\equiv$  Raumtemperatur)  $t_U \{\equiv t_2\}$  gilt im stationären Heizfall als konstant.
- Die Temperaturabhängigkeit des Wärmedurchgangskoeffizienten wird mit dem sogenannten Heizflächenexponenten ausgedrückt.

Im Laufe der Entwicklung der Raumheizkörper sind zur Leistungssteigerung bzw. Materialeinsparung auch Formen entstanden, die von den konventionellen Varianten abweichen, beispielsweise Rippenrohre, Konvektoren in Schächten usw. Unter Beibehalten der gültigen Prüfnorm sind dann mitunter Korrekturfaktoren eingeführt worden, die z. B. den Einfluss des Massedurchflusses bei berippten Heizflächen berücksichtigen. Letztlich wird damit dem nunmehr vorhanden Einfluss des inneren Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i$  pauschal Rechnung getragen. Einflussfaktoren und zugehörige Korrekturfaktoren sowie mögliche Diagrammdarstellungen sind unter <http://berndglueck.de/Waermeuebertragung> ab Seite 328 aufgeführt.

Bauwerksintegrierte Heiz- und Kühlflächen (Fußboden, Wand, Decke) gehören nicht zu dem hier betrachteten Komplex. Für sie gelten eigene Prüfnormen, Basiskennlinien für den Wärmeübergangskoeffizienten und Leistungssimulationen, die beispielsweise in <http://berndglueck.de/LowEx> zu finden sind.

#### 3.1 Heizflächenexponent

Dem Heizflächenexponenten werde deshalb hier ein Abschnitt gewidmet, da mich bereits mehrfach diesbezügliche Fragen von Absolventen erreichten. Sie konnten sich nicht erklären, wie man zur Darstellung mittels Potenzansatz kommt. Dabei wurde mir klar, dass zu Zeiten von Trendermittlungen und Kurvenfittings mittels vorgefertigter Programme bzw. Tabellenkalkulationen die frühere manuelle Auswertung in Vergessenheit geriet.

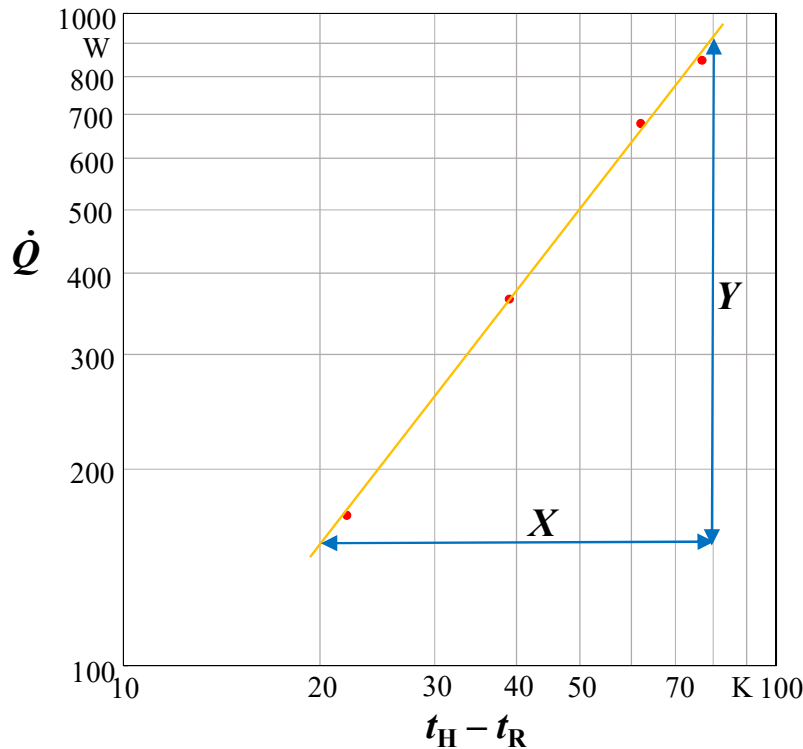
Man stellte frühzeitig fest, dass die Leistungswerte  $\dot{Q}$  über den Übertemperaturen  $\bar{t}_H - t_U$  in einem Diagramm mit doppelt logarithmischem Netz eingetragen, näherungsweise auf einer Geraden liegen. Damit konnte man ein Potenzansatz zur Wiedergabe der Leistungskurve formulieren:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0} = \left( \frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}} \right)^n = \left( \frac{\bar{t}_H - t_U}{\bar{t}_{H,0} - t_{U,0}} \right)^n. \quad (3.1)$$

Wählt man üblicherweise ein Netz mit gleicher Dekadenteilung ein, so ergibt der Geradenanstieg direkt den Exponenten, denn

$$\ln\left(\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0}\right) = \ln\left(\frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}}\right)^n = n \ln\left(\frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}}\right) \text{ liefert } n = \frac{\ln\left(\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_0}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}}\right)} = \frac{Y}{X}.$$

Bild 3.1 zeigt eine Beispielauswertung, wobei aus den abmessbaren Größen  $Y = 6,4$  cm und  $X = 5,0$  cm der Heizflächenexponent  $n = 1,28$  folgt. Dies ist ein für Radiatoren üblicher Wert ( $n \approx 1,3$ ).



**Bild 3.1** Leistungsdiagramm eines Heizkörpers mit vier Messpunkten im doppelt logarithmischen Netz mit gleicher Dekadenteilung

Als Bezugspunkt 0 wählt man üblicherweise die Auslegungsvolllast. Dies war früher bei Vorlauftemperatur 90 °C, Rücklauftemperatur 70 °C und Raumtemperatur 20 °C die mittlere arithmetische Übertemperatur 60 K  $\{\equiv (90 \text{ °C} + 70 \text{ °C}) / 2 - 20 \text{ °C}\}$  oder exakt gemäß Gl. 1.5 die mittlere logarithmische Übertemperatur 59,44 K  $\{\equiv [70 \text{ K} - 50 \text{ K}] / [\ln(70 / 50)]\}$ .

Mit Einführung der Niedertemperaturheizungen sind niedrigere Bezugswerte üblich, beispielsweise für Vorlauftemperatur 70 °C, Rücklauftemperatur 50 °C und Raumtemperatur 20 °C.

Das Potenzgesetz nach Gl. (3.1) gilt selbstverständlich nur in gewissen Temperaturbereichen, z. B. zwischen Übertemperaturen  $30 \text{ K} < \Delta t_{\log} < 100 \text{ K}$ . Deshalb sind systemabhängige Bezugspunkte sinnvoll.

Richtwerte für verschiedene Heizflächenkonstruktionen:

Radiatoren	$n = 1,3$
Plattenheizkörper	$n = 1,25 \dots 1,38$
Konvektortruhen	$n = 1,3 \dots 1,4$
Rohre	$n = 1,25 \dots 1,26$
Strahlplatten	$n = 1,15 \dots 1,25$ .

Aus Gl. (3.1) kann auch auf die Temperaturabhängigkeit des Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  geschlossen werden, wenn man Gl. (1.11)  $\dot{Q} = k A \Delta t_m$  beachtet und als mittlere Übertemperatur  $\Delta t_m$  das logarithmische Mittel  $\Delta t_{\log}$  verwendet, folgt:

$$\frac{k A \Delta t_{\log}}{k_0 A \Delta t_{\log,0}} = \left( \frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}} \right)^n; \quad \frac{k \Delta t_{\log}}{k_0 \Delta t_{\log,0}} = \left( \frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}} \right)^n; \quad \frac{k}{k_0} = \left( \frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}} \right)^{n-1}.$$

Mit der üblicherweise verwendeten Abkürzung

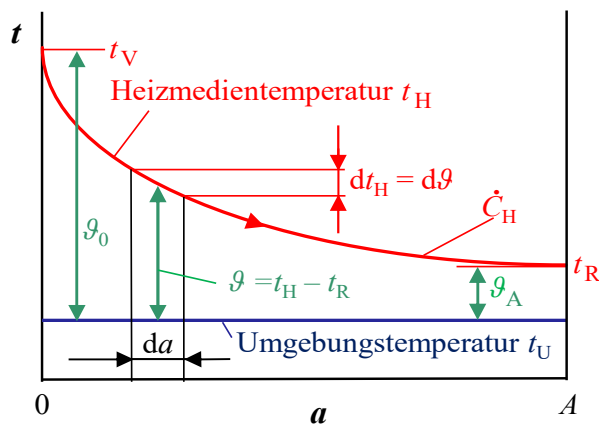
$$n = m + 1 \quad (3.2)$$

ergibt sich für den Wärmedurchgangskoeffizienten der übertemperaturabhängige Zusammenhang:

$$\frac{k}{k_0} = \left( \frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t_{\log,0}} \right)^m. \quad (3.3)$$

### 3.2 Mittlere Temperaturdifferenz bei Raumheizkörpern mit temperaturabhängigen Wärmedurchgangskoeffizienten

Die Ableitung könnte auf den im Abschnitt 1 vorgestellten Temperaturverläufen längs der Wärmeübertragerfläche aufbauen und damit verkürzt wiedergegeben werden. Es besteht aber der Anspruch die Besonderheiten der Raumheizkörper zu verdeutlichen und die dafür üblichen Bezeichnungen zu verwenden (Bild 3.2).



**Bild 3.2** Temperatur-Heizflächen-Schaubild für einen Raumheizkörper mit Kennzeichnung der relevanten Größen

$t_H$  Heizmedientemperatur

$t_V$  Vorlauftemperatur

$t_R$  Rücklauftemperatur

$t_U$  Umgebungstemperatur ( $\equiv$  Raumtemperatur)

$g$  Übertemperatur des Heizmediums bezogen auf  $t_U$  (Eintritt  $g_0$ ; Austritt  $g_A$ )

$a$  Heizflächenkoordinate (Beginn  $a = 0$ ; Ende  $a = A$ )

$\dot{C}_H$  Wärmekapazitätsstrom des Heizmediums ( $\dot{C}_H = \dot{m}_H c_H$ )

Da Gl. (3.3) unabhängig von der Heizflächengröße gilt, kann auch verallgemeinert geschrieben werden:

$$k = k_0 \left( \frac{g}{g_0} \right)^m \quad \text{und mit} \quad k^* = \frac{k_0}{g_0^m} \quad \text{folgt} \quad k = k^* g^m. \quad (3.4)$$

Damit gelten unter Substitution der Gl. (3.4) und der Gl. (3.2):

$$d\dot{Q} = -\dot{C}_H dt_H = -\dot{C}_H dg = k (t_H - t_U) da = k^* g^m g da = k^* g^n da.$$

Nach Trennung der Variablen und Integration über die Heizfläche  $A$  ergibt sich mit den Bezeichnungen des Bildes 3.2:

$$-\dot{C}_H \int_{g_0}^{g_A} \frac{dg}{g^n} = k^* \int_0^A da. \quad (3.5)$$

Die weiteren Ableitungen gelten für  $n \neq 1$  (der Fall  $n = 1$  wird im Abschnitt 3.3 abgehandelt):

$$g_A = \left[ g_0^{1-n} + (n-1) \frac{k^* A}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{1}{1-n}}. \quad (3.6)$$

Die Verallgemeinerung liefert den Übertemperaturverlauf und den Temperaturverlauf

$$\vartheta = \left[ \vartheta_0^{1-n} + (n-1) \frac{k^* a}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (3.7)$$

$$t_H = \left[ (t_V - t_U)^{1-n} + (n-1) \frac{k^* a}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{1}{1-n}} + t_U. \quad (3.8)$$

Die Rücklauftemperatur ( $\equiv$  Austrittstemperatur) berechnet sich für  $a = A$  zu:

$$t_R = \left[ (t_V - t_U)^{1-n} + (n-1) \frac{k^* A}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{1}{1-n}} + t_U. \quad (3.9)$$

Schließlich ergibt das integrale Mittel der Heizmedientemperatur  $t_H$  die mittlere Wärmeträgertemperatur längs der Heizfläche

$$\bar{t}_H = \frac{1}{A} \int_0^A t_H da$$

$$\bar{t}_H = \frac{\dot{C}_H}{k^* A (n-2)} \left\{ \left[ (t_V - t_U)^{1-n} + (n-1) \frac{k^* A}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{2-n}{1-n}} - (t_V - t_U)^{2-n} \right\} + t_U. \quad (3.10)$$

Bei Kenntnis der Rücklauftemperatur kann die mittlere Heizmedientemperatur vereinfacht ermittelt werden. Aus Gl. (3.9) kann man den Term

$$(n-1) \frac{k^* A}{\dot{C}_H} = (t_R - t_U)^{1-n} - (t_V - t_U)^{1-n}$$

eliminieren und zweifach in Gl. (3.10) substituieren, sodass nach kurzer Umrechnung folgt:

$$\bar{t}_H = \frac{n-1}{n-2} \frac{(t_R - t_U)^{2-n} - (t_V - t_U)^{2-n}}{(t_R - t_U)^{1-n} - (t_V - t_U)^{1-n}} + t_U. \quad (3.11)$$

Für diese mittlere Temperatur sind die Stoffwerte des Heizmediums zu bestimmen.

### 3.3 Mittlere Temperaturdifferenz bei Raumheizkörpern mit konstantem Wärmedurchgangskoeffizienten

Da keine Temperaturabhängigkeit für den Wärmedurchgangskoeffizienten existiert gilt abweichend von Gl. (3.4)

$$k = k_0 = \text{const} \quad (3.12)$$

und gemäß Bild 3.2 die Beziehung

$$d\dot{Q} = -\dot{C}_H dt_H = -\dot{C}_H d\vartheta = k (t_H - t_U) da = k \vartheta da.$$

Nach Trennung der Variablen und Integration über die Heizfläche  $A$  folgen:

$$-\dot{C}_H \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_A} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = k \int_0^A da \quad (3.13)$$

$$\vartheta_A = \vartheta_0 e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}}. \quad (3.14)$$

Im Vergleich zu den Gln. (3.5) und (3.6) handelt es sich jetzt um den bereits angekündigten Sonderfall  $n = 1$ .

Der Übertemperaturverlauf und der Temperaturverlauf folgen aus einer Verallgemeinerung der Gl. (3.14) zu

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 e^{-\frac{ka}{\dot{C}_H}} \quad (3.15)$$

$$t_H = (t_V - t_U) e^{-\frac{ka}{\dot{C}_H}} + t_U, \quad (3.16)$$

und nach erneuter Integration über die Heizfläche ergibt sich die mittlere Temperatur des Heizmediums

$$\bar{t}_H = \frac{1}{A} \int_0^A t_H da$$

$$\bar{t}_H = (t_V - t_U) \frac{\dot{C}_H}{k A} \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) + t_U. \quad (3.17)$$

Das Bilden von  $\bar{t}_H - t_U$  und das Einarbeiten der Austrittsübertemperatur  $\mathcal{G}_A$  gemäß Gl. (3.14) liefert die **mittlere Temperaturdifferenz als das bekannte logarithmische Mittel**

$$\Delta t_m = \bar{t}_H - t_U = \frac{\mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_A}{\ln \frac{\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_A}} \equiv \Delta t_{\log}. \quad (3.18)$$

Diese Beziehung könnte man auch aus der Definitionsgleichung für die mittlere Temperaturdifferenz unter Substitution der Gl. (3.15) folgern:

$$\Delta t_m = \frac{1}{A} \int_0^A \mathcal{G} da = \frac{1}{A} \int_0^A \mathcal{G}_0 e^{-\frac{ka}{\dot{C}_H}} da = \frac{1}{A} \mathcal{G}_0 \frac{1}{-\frac{k}{\dot{C}_H}} \left( e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} - 1 \right).$$

Die zweimalige Substitution der Gl. (3.14) ergibt schließlich wiederum das bekannte logarithmische Mittel:

$$\Delta t_m = \frac{\mathcal{G}_0 - \mathcal{G}_A}{\ln \frac{\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_A}}.$$

Diese Gleichung ist inhaltlich identisch mit Gl. (1.5), die allgemein für Wärmeübertrager abgeleitet wurde.

Die Stoffwerte sind für die mittlere Heizmedientemperatur  $\bar{t}_H$  nach Gl. (3.17) oder nach der Beziehung

$$\bar{t}_H = \Delta t_m + t_U \quad (3.19)$$

zu bestimmen. Bei Vorgabe der gewünschten Temperaturen und des Heizmedienstromes kann der Wärmedurchgangskoeffizient  $k$  in der Regel iterationsfrei berechnet werden und danach die Bestimmung von  $A$  erfolgen.

Hiermit ist der einfachste, allgemein bekannte Berechnungsfall detailliert abgearbeitet.

### 3.4 Beispiel: Berechnung der mittleren Temperatur für einen Raumheizkörper

Für einen Raumheizkörper gelten der Heizflächenexponent  $n = 1,3$  und der Wert  $k^* A / \dot{C}_H = 0,1 \text{ K}^{-0,3}$ . Die Eintrittstemperatur (Vorlauftemperatur) beträgt  $t_V = 90 \text{ °C}$ , die Umgebungstemperatur ist konstant  $t_U = 20 \text{ °C}$ .

Die Angabe  $k^* A / \dot{C}_H$  impliziert in Verbindung mit Gl. (3.4), dass der Wärmedurchgangskoeffizient – wie für Raumheizkörper üblicherweise anzunehmen – temperaturabhängig ist. Die Angabe  $k^*$  bezieht sich auf die Übertemperatur  $\vartheta_0 = 60 \text{ K}$ .

#### Aufgabenteil 1:

Es sind der Temperaturverlauf des Heizwassers über die Heizfläche sowie der Mittelwert zu bestimmen.

Nach Gl. (3.8) gilt mit der dimensionslosen Heizfläche  $a' = a / A$

$$t_H = \left[ (t_V - t_U)^{1-n} + (n-1) \frac{k^* a}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{1}{1-n}} + t_U = \left[ (90 - 20)^{1-1,3} + (1,3-1) 0,1 a' \right]^{\frac{1}{1-1,3}} \text{ K} + 20 \text{ °C}$$

$a'$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$t$ in °C	90,00	85,22	80,85	76,85	73,19	69,83

Die mittlere Temperatur lautet nach Gl. (3.10)

$$\bar{t}_H = \frac{\dot{C}_H}{k^* A (n-2)} \left\{ \left[ (t_V - t_U)^{1-n} + (n-1) \frac{k^* A}{\dot{C}_H} \right]^{\frac{2-n}{1-n}} - (t_V - t_U)^{2-n} \right\} + t_U$$

$$\bar{t}_H = \frac{1}{0,1(1,3-2)} \left\{ \left[ (90 - 20)^{-0,3} + 0,3 \cdot 0,1 \right]^{\frac{0,7}{0,3}} - (90 - 20)^{0,7} \right\} \text{ K} + 20 \text{ °C} = 79,18 \text{ °C}$$

bzw. nach Gl. (3.11)

$$\bar{t}_H = \frac{n-1}{n-2} \frac{(t_R - t_U)^{2-n} - (t_V - t_U)^{2-n}}{(t_R - t_U)^{1-n} - (t_V - t_U)^{1-n}} + t_U$$

$$\bar{t}_H = -\frac{0,3}{0,7} \frac{(69,83 - 20)^{0,7} - (90 - 20)^{0,7}}{(69,83 - 20)^{-0,3} - (90 - 20)^{-0,3}} \text{ K} + 20 \text{ °C} = 79,17 \text{ °C}.$$

#### Aufgabenteil 2:

Es ist der Schwankungsbereich des örtlichen Wärmedurchgangskoeffizienten festzustellen, wenn von der Vorlauftemperatur  $90 \text{ °C}$  und der Rücklauftemperatur  $70 \text{ °C}$  ausgegangen wird.

Die Unterschiede des Wärmedurchgangskoeffizienten betragen bei den gegebenen Übertemperaturen gemäß Gl. (3.4):

$$\frac{k_{\max}}{k_{\min}} = \left( \frac{\vartheta_{\text{Vorlauf}}}{\vartheta_{\text{Rücklauf}}} \right)^m = \left( \frac{90-20}{70-20} \right)^{0,3} = 1,11.$$

Bezogen auf  $k_0$  bei einer Übertemperatur von  $\vartheta_0 = 60 \text{ K}$  betragen die Einzelabweichungen:

$$\frac{k_{\max}}{k_0} = \left( \frac{\vartheta_{\text{Vorlauf}}}{\vartheta_0} \right)^m = \left( \frac{90-20}{60} \right)^{0,3} = 1,047 \quad ; \quad \frac{k_{\min}}{k_0} = \left( \frac{\vartheta_{\text{Rücklauf}}}{\vartheta_0} \right)^m = \left( \frac{70-20}{60} \right)^{0,3} = 0,947.$$

**Aufgabenteil 3:**

Im dritten Teil der Berechnung ist von einem **konstanten  $k$**  auszugehen. Aus der Vorgabe  $k^* A / \dot{C}_H = 0,1 \text{ K}^{-0,3}$  ist zunächst die zugehörige Größe  $k A / \dot{C}_H$  zu bestimmen. Nach Gl. (3.4) gilt

$$k^* = \frac{k_0}{g_0^m}, \text{ woraus folgen:}$$

$$\frac{k^* A}{\dot{C}_H} = \frac{k_0 A}{g_0^m \dot{C}_H} = 0,1 \text{ K}^{-0,3}$$

$$\frac{k_0 A}{\dot{C}_H} = 0,1 \text{ K}^{-0,3} g_0^m = 0,1 \text{ K}^{-0,3} 60^{0,3} \text{ K}^{0,3} = 0,342.$$

Bei konstantem Wärmedurchgangskoeffizient sind  $k$  und  $k_0$  identisch! Da als Bezugstemperatur für den Wärmedurchgangskoeffizienten 60 K Übertemperatur gewählt wurde und nach bisheriger Rechnung die mittlere Temperatur im Heizkörper bei ca. 80 °C liegt, ist die Annahme für den mittleren  $k$ -Wert gut getroffen.

Damit könnte man drei markante Größen für den Wärmedurchgangskoeffizient als Bezugswert wählen:

$$k_0 \rightarrow \left( \frac{k A}{\dot{C}_H} \right)_0 = 0,342$$

$$k_{\max} \rightarrow \left( \frac{k A}{\dot{C}_H} \right)_{\max} = 0,342 \cdot 1,047 = 0,358$$

$$k_{\min} \rightarrow \left( \frac{k A}{\dot{C}_H} \right)_{\min} = 0,342 \cdot 0,947 = 0,324.$$

Damit kann der Temperaturverlauf über die Heizfläche nach Gl. (3.16)  $t_H = (t_V - t_U) e^{-\frac{k a}{\dot{C}_H}} + t_U$

bestimmt werden, wobei wiederum die dimensionslose Heizfläche  $a' = a / A$  verwendet wird:

$a'$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	
$t_H$ in °C	90,00	85,37	81,05	77,01	73,24	69,72	Wertereihe für $k_0$
$t_H$ in °C	90,00	85,16	80,66	76,47	72,57	68,94	Wertereihe für $k_{\max}$
$t_H$ in °C	90,00	85,61	81,49	77,63	74,02	70,63	Wertereihe für $k_{\min}$

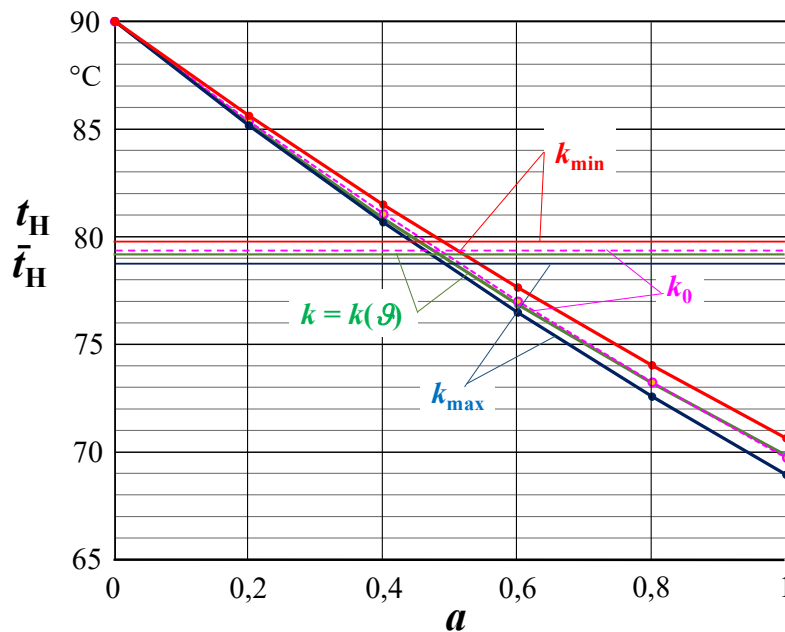
Weiter ergeben sich nach Gl. (3.17)  $\bar{t}_H = (t_V - t_U) \frac{\dot{C}_H}{k A} \left( 1 - e^{-\frac{k a}{\dot{C}_H}} \right) + t_U$  die mittleren Temperaturen:

$\bar{t}_H$ in °C	79,29	Wert für $k_0$
$\bar{t}_H$ in °C	78,84	Wert für $k_{\max}$
$\bar{t}_H$ in °C	79,79	Wert für $k_{\min}$

**Aufgabenteil 4:**

Die Ergebnisse sind vergleichend zu bewerten.

Bild 3.3 stellt die Temperaturverläufe visuell gegenüber. Sie entsprechen vollkommen den Erwartungen.



**Bild 3.3** Temperaturverläufe längs der Heizfläche und ihre Mittelwerte nach verschiedenen Berechnungsverfahren

$k = k(\vartheta)$  temperaturabhängig  
 $k = \text{const}$   
 bei Variation  $k_{\max}$ ,  $k_{\min}$ ,  $k_0$

Es zeigt sich, dass bei Verwendung eines mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten  $k_0$  für den untersuchten Temperaturbereich die Ergebnisse praktisch gleichwertig der exakten Berechnung mit  $k = k(\vartheta)$  sind.

Verwendet man die im Aufgabenteil 1 ermittelte, genaue Austrittstemperatur und setzt die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz nach Gl. (3.18) zur Berechnung von  $\bar{t}_H$  gemäß Gl. (3.19) an, die eigentlich nur bei konstantem Wärmedurchgangskoeffizient zutrifft, so ergibt sich

$$\bar{t}_H = \frac{\vartheta_0 - \vartheta_A}{\ln \frac{\vartheta_0}{\vartheta_A}} + t_U = \frac{(90 - 20) - (69,83 - 20)}{\ln \frac{90 - 20}{69,83 - 20}} \text{ K} + 20^\circ\text{C} = 79,34^\circ\text{C} \quad \{\text{exakter Wert: } 79,18^\circ\text{C}\}.$$

#### **Fazit:**

Bei Verwendung der exakten Austrittstemperatur und eines mittleren  $k$ -Wertes kann mit dem einfachen Verfahren unter der Annahme  $k = \text{const}$  – trotz der relativ großen Temperaturabhängigkeit von  $k$  – in der Praxis gearbeitet werden kann.

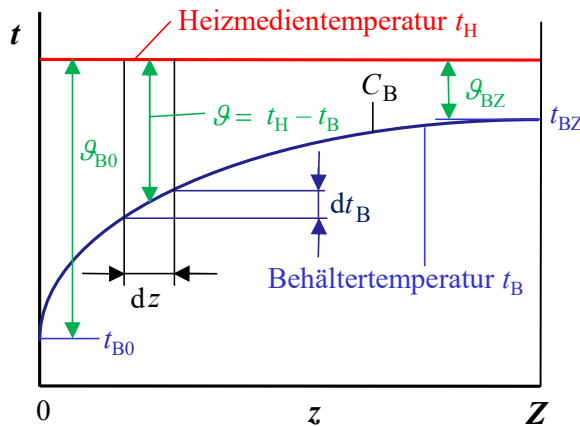
Das logarithmische Mittel ersetzt die exakte Berechnung nur dann gut, wenn der mittlere  $k$ -Wert zutrifft, ansonsten ist dieser iterativ einzuarbeiten.



## 4 Behälteraufheizung mit Dampf

### 4.1 Behälteraufheizung mit Dampf ohne Wärmeverluste und Durchströmung

Bild 4.1 zeigt das Temperatur-Zeit-Schaubild für die Behälteraufheizung im einfachsten Fall, d. h. bei einer konstanten Heizmedientemperatur  $t_H$ . Die Aufheizzeit beträgt  $Z$ .



**Bild 4.1** Temperatur-Zeit-Schaubild für eine Behälteraufheizung mittels Sattdampf mit Kennzeichnung der relevanten Größen

$t_H$	konstante Heizmedientemperatur
$t_B$	Behältertemperatur (Beginn $t_{B0}$ ; Ende $t_{BZ}$ )
$g$	Übertemperatur des Heizmediums bezogen auf $t_B$ (Beginn $g_{B0}$ ; Ende $g_{BZ}$ )
$z$	Zeitkoordinate (Beginn $z = 0$ ; Ende $z = Z$ { $\equiv$ Aufheizzeit})
$C_B$	Wärmekapazität des Behälterinhalts ( $C_B = m_B c_B$ )

Als weitere Besonderheiten gelten: **temperaturunabhängiger Wärmedurchgangskoeffizient  $k = \text{const}$ , gerührter Behälterinhalt mit stets homogener Temperatur  $t_B$  zu jeder Zeit  $z$ , keine Wärmeverluste an die Umgebung und keine Behälterdurchströmung während des Aufheizens.**

Damit ergibt sich die Behälteraufheizung in Abhängigkeit der Zeit  $z$  mit der Heizmedienübertemperatur  $g_{BZ}$  am Ende der Aufheizzeit  $Z$  nach folgenden Berechnungsschritten:

$$dQ = C_B dt_B = k A (t_H - t_B) dz \quad (4.1)$$

$$g = t_H - t_B; \quad dg = -dt_B$$

$$-C_B \int_{g_{B0}}^{g_{BZ}} \frac{dg}{g} = k A \int_0^Z dz \quad (4.2)$$

$$g_{BZ} = g_{B0} e^{-\frac{kA}{C_B} Z}. \quad (4.3)$$

Die **Aufheizzeit** folgt sofort aus Gl. (4.3) zu

$$Z = \frac{C_B}{kA} \ln \frac{g_{B0}}{g_{BZ}} = \frac{C_B}{kA} \ln \frac{t_H - t_{B0}}{t_H - t_{BZ}}. \quad (4.4)$$

Die an den Behälterinhalt übertragene Wärme beträgt

$$Q = C_B (t_{BZ} - t_{B0}) = C_B (g_{B0} - g_{BZ}), \quad (4.5)$$

woraus sich gemäß der Definitionsgleichung (0.5) nach Substitution von Gl. (4.4) die **mittlere Temperaturdifferenz** ergibt

$$\Delta t_m = t_H - \bar{t}_B = \frac{g_{B0} - g_{BZ}}{\ln \frac{g_{B0}}{g_{BZ}}} \equiv \Delta t_{\log}. \quad (4.6)$$

Obwohl es sich bei der Behälteraufheizung um eine Zeitfunktion handelt, stellt sich die **mittlere Temperaturdifferenz** wiederum als **logarithmisches Mittel** dar.

Der zeitabhängige Übertemperaturverlauf bzw. der Temperaturverlauf des Behälterinhaltes folgen mit der Zeitkoordinate  $z$  aus Gl. (4.3) zu:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{B0} e^{-\frac{kA}{C_B} z} \quad \text{bzw.} \quad t_B = t_H - (t_H - t_{B0}) e^{-\frac{kA}{C_B} z}. \quad (4.7)$$

Aus Gl. (4.7) ist die **mittlere Behältertemperatur** während des Aufheizens durch Integration über die Aufheizzeit bestimmbar

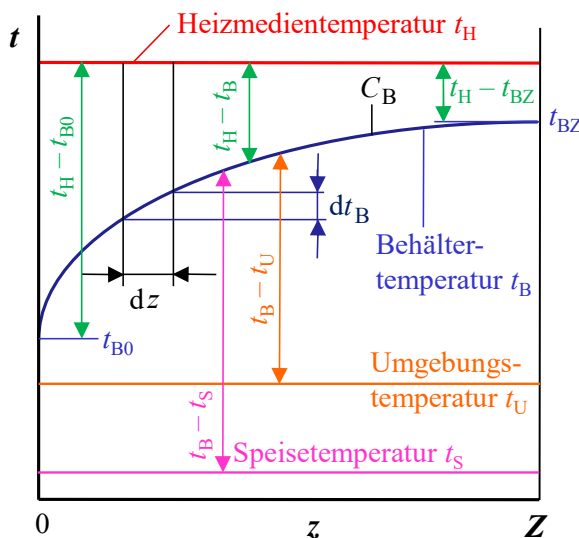
$$\bar{t}_B = \frac{1}{Z} \int_0^Z t_B dz = \frac{1}{Z} \int_0^Z \left[ t_H - (t_H - t_{B0}) e^{-\frac{kA}{C_B} z} \right] dz \quad \text{und mit der zweimaligen Nutzung der Gl. (4.3) folgt}$$

$$\bar{t}_B = t_H - (t_H - t_{B0}) \frac{C_B}{k A Z} \left[ 1 - e^{-\frac{kA}{C_B} Z} \right] = t_H - \frac{(t_H - t_{B0}) - (t_H - t_{BZ})}{\ln \frac{t_H - t_{B0}}{t_H - t_{BZ}}}. \quad (4.8)$$

Das Bilden von  $t_H - \bar{t}_B$  und das Einarbeiten der Übertemperatur am Anfang und Ende der Aufheizzeit  $\mathcal{G}_{B0} = t_H - t_{B0}$  sowie  $\mathcal{G}_{BZ} = t_H - t_{BZ}$  liefert selbstverständlich auch  $\Delta t_m$  gemäß Gl. (4.6).

## 4.2 Behälteraufheizung mit Dampf bei Wärmeverlusten und gleichzeitiger Durchströmung

Das Temperatur-Zeit-Schaubild nach Bild 4.2 entspricht qualitativ Bild 4.1, wobei die Besonderheiten gelten: **temperaturunabhängiger Wärmedurchgangskoeffizient  $k = \text{const}$ , gerührter Behälterinhalt mit stets homogener Temperatur  $t_B$  zu jeder Zeit  $z$ , behältertemperaturabhängiger Wärmeverluststrom an die Umgebung der Temperatur  $t_U$  und Behälterdurchströmung mit einem vorgegebenen Massestrom konstanter Eintrittstemperatur  $t_S$  während des Aufheizens.**



**Bild 4.2** Temperatur-Zeit-Schaubild für eine Behälteraufheizung mittels Sattdampf bei zusätzlichem Wärmeverlust und Durchströmung des Behälters mit Kennzeichnung der relevanten Größen

$t_H$	konstante Heizmedientemperatur
$t_B$	Behältertemperatur (Beginn $t_{B0}$ ; Ende $t_{BZ}$ )
$t_U$	Umgebungstemperatur des Behälters
$t_S$	Einspeisetemperatur in den Behälter
$z$	Zeitkoordinate (Beginn $z = 0$ ; Ende $z = Z$ { $\equiv$ Aufheizzeit})
$C_B$	Wärmekapazität des Behälterinhalts ( $C_B = m_B c_B$ )
$\dot{C}_S$	Wärmekapazitätsstrom der Einspeisung ( $\equiv$ der Abspeisung) ( $\dot{C}_S = \dot{m}_S c_B$ )

Der Wärmestrom  $\dot{Q}_V^*$  vom Behälterinhalt zur Umgebung sei für einen berechneten oder gemessenen Bezugsfall  $t_B^* - t_U$  bekannt. Der Wärmestrom  $\dot{Q}_V$  ist linear von der vorhandenen Temperaturdifferenz abhängig, sodass gelten:

$$\dot{Q}_V = \dot{Q}_V^* \frac{t_B - t_U}{t_B^* - t_U} \quad \text{und mit der Abkürzung} \quad V_V = \frac{\dot{Q}_V^*}{t_B^* - t_U} \quad \text{folgt} \quad \dot{Q}_V = V_V (t_B - t_U). \quad (4.9)$$

Außerdem wird der Behälter mit einem verhältnismäßig kleinem Massestrom  $\dot{m}_S$  durchströmt, wie dies beispielsweise bei einem Warmwasserbereiter auftritt. Die Einspeisetemperatur  $t_S$  ändert sich beim Wassereintritt sprunghaft auf die zeitabhängige Behältertemperatur  $t_B$  und der Massestrom tritt mit dieser aus, sodass der Wärmestrom lautet:

$$\dot{Q}_S = \dot{C}_S (t_B - t_S). \quad (4.10)$$

Damit ist die Wärmebilanz gegenüber Gl. (4.1) zu erweitern und umzuformen:

$$\begin{aligned}dQ &= C_B dt_B = k A (t_H - t_B) dz - \dot{Q}_V dz - \dot{Q}_S dz \\C_B dt_B &= k A (t_H - t_B) dz - V_V (t_B - t_U) dz - \dot{C}_S (t_B - t_S) dz \\C_B dt_B + (k A + V_V + \dot{C}_S) t_B dz &= (k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S) dz.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Mit den [Abkürzungen für Abschnitt 4.2](#)

$$X = \frac{C_B}{k A + V_V + \dot{C}_S} \quad \text{und} \quad Y = \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S}, \quad (4.12)$$

wobei  $Y$  als eine **fiktive Heizmedientemperatur** gesehen werden kann, da sie die Korrekturen durch den Verlustwärmestrom und die Durchflussaufheizung impliziert, ergibt sich die zu lösende inhomogene, lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

$$X \frac{dt_B}{dz} + t_B = Y. \quad (4.13)$$

Zur Lösung der homogenen Differenzialgleichung  $X \frac{dt_B}{dz} + t_B = 0$  wird  $t_B = e^{\lambda z}$  gesetzt. Es folgen

$$X \lambda e^{\lambda z} + e^{\lambda z} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{X}.$$

Eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung, die der homogen Lösung hinzuzufügen ist, lautet  $t_B = Y$ , sodass sich zusammenfassend ergibt:

$$t_B = C e^{-\frac{z}{X}} + Y.$$

Die Integrationskonstante  $C$  ist aus der Anfangsbedingung  $t_{B0}$  zur Zeit  $z = 0$  bestimmbar

$t_{B0} = C e^{-\frac{0}{X}} + Y = C + Y \rightarrow C = t_{B0} - Y$ , woraus endgültig der zeitabhängige Temperaturverlauf im Behälter folgt:

$$t_B = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y \quad (4.14)$$

und nach Substitution der Abkürzungen:

$$t_B = \left( t_{B0} - \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S} \right) e^{-\frac{k A + V_V + \dot{C}_S}{C_B} z} + \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S}. \quad (4.15)$$

Die Behältertemperatur am Ende der Aufheizzeit beträgt

$$t_{BZ} = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{Z}{X}} + Y \quad \text{bzw.} \quad (4.16)$$

$$t_{BZ} = \left( t_{B0} - \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S} \right) e^{-\frac{k A + V_V + \dot{C}_S}{C_B} Z} + \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S}. \quad (4.17)$$

Dass Gl. (4.14) tatsächlich eine Lösung der Differenzialgleichung (4.13) ist, sei für "Ungläubige" nachfolgend bewiesen:



Mit  $t_B = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y$  und  $\frac{dt_B}{dz} = -\frac{1}{X} (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}}$  gilt

für  $X \frac{dt_B}{dz} + t_B = Y$  nach Substitution  $X \left( -\frac{1}{X} (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} \right) + (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y = Y$  w. z. b. w.

Die **Aufheizzeit** folgt nach Umformung aus Gl. (4.16)

$$Z = X \ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}} \quad \text{bzw.} \quad Z = \frac{C_B}{k A + V_V + \dot{C}_S} \ln \frac{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{B0}}{k A + V_V + \dot{C}_S}}{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{BZ}}{k A + V_V + \dot{C}_S}} \quad (4.18)$$

Aus Gl. (4.14) kann die **mittlere Behältertemperatur** während des Aufheizens durch Integration über die Aufheizzeit schrittweise bestimmt werden:

$$\begin{aligned} t_B &= (t_{B0} - Y) e^{-\frac{Z}{X}} + Y \\ \bar{t}_B &= \frac{1}{Z} \int_0^Z \left[ (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y \right] dz \\ \bar{t}_B &= Y - (Y - t_{B0}) \frac{X}{Z} \left[ 1 - e^{-\frac{Z}{X}} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die zweimalige Substitution der Gl. (4.16) und das Einsetzen der Abkürzungen ergeben:

$$\bar{t}_B = Y - \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = Y - \frac{t_{BZ} - t_{B0}}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = \frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{k A + V_V + \dot{C}_S} - \frac{t_{BZ} - t_{B0}}{\ln \frac{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{B0}}{k A + V_V + \dot{C}_S}}{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{BZ}}{k A + V_V + \dot{C}_S}}}. \quad (4.20)$$

Der Vergleich mit Gl. (4.8) liefert für einen wärmeverlustfreien Behälter  $V_V = 0$  und einen nicht durchströmten Behälter  $\dot{C}_S = 0$  logischerweise völlige Übereinstimmung.

Das Bilden von  $t_H - \bar{t}_B$  gemäß der Definitionsgleichung (0.6) ergibt die **mittlere Temperaturdifferenz**:

$$\Delta t_m = t_H - \bar{t}_B = t_H - Y + \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = \frac{V_V (t_H - t_U) + \dot{C}_S (t_H - t_S)}{k A + V_V + \dot{C}_S} + \frac{t_{BZ} - t_{B0}}{\ln \frac{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{B0}}{k A + V_V + \dot{C}_S}}{\frac{k A t_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{BZ}}{k A + V_V + \dot{C}_S}}}. \quad (4.21)$$

Läge ein wärmeverlustfreier Behälter  $V_V = 0$  und nicht durchströmter Behälter  $\dot{C}_S = 0$  vor, wäre Gl. (4.21) mit Gl. (4.6) vollkommen identisch.

Die Gl. (4.21) beinhaltet implizit das logarithmische Mittel, es erfolgen lediglich Korrekturen bezüglich der Heizmedientemperatur gemäß Gl. (4.12) zur sogenannten fiktiven Heizmedientemperatur  $Y$ .

### 4.3 Beispiel: Behälteraufheizung mit Satttdampf

Ein Warmwasserbereiter mit einem Volumen von 5000 l ( $C_B \approx V \rho c = 20730 \text{ kWs/K}$ ) wird mit Satttdampf  $t_H = 105 \text{ °C}$  (1,2 bar) aufgeheizt. Die installierte Heizfläche hat den Wert  $k A = 3000$

W/K. Die Anfangstemperatur sei  $t_{B0} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ , die gewünschte Endtemperatur  $t_{BZ} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Es ist vom Idealfall einer stets homogenen Wassertemperatur im Behälter auszugehen (gerührter Inhalt).

*Fall a:* Ideale Behälterdämmung und keine Durchströmung.

*Fall b:* Der Wärmestrom an die Umgebung ( $t_U = 10 \text{ }^\circ\text{C} = \text{const}$ ) beträgt im Referenzfall  $\dot{Q}_V^* = 300 \text{ W}$  bei  $t_B^* = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Die Durchströmung während der Aufheizung wird mit  $\dot{m}_s = 0,2 \text{ kg/s}$  ( $\dot{C}_s = 836 \text{ W/K}$ ) bei einer Einspeisetemperatur  $t_s = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  angenommen.

Gesucht sind die Aufheizzeit und die mittlere Temperaturdifferenz zwischen Heizmedium und Behälterinhalt während des Aufheizens.

### Fall a

Die Aufheizzeit ergibt sich in Verbindung mit Bild 4.1 sofort aus Gl. (4.4) zu:

$$Z = \frac{C_B}{kA} \ln \frac{\vartheta_{B0}}{\vartheta_{BZ}} = \frac{C_B}{kA} \ln \frac{t_H - t_{B0}}{t_H - t_{BZ}} = \frac{20730000}{3000} \ln \frac{105-10}{105-60} \text{ s} = 5163 \text{ s} = 1,43 \text{ h}.$$

Die mittlere Temperaturdifferenz entspricht dem logarithmischen Mittel gemäß Gl. (4.6):

$$\Delta t_m = \frac{\vartheta_{B0} - \vartheta_{BZ}}{\ln \frac{\vartheta_{B0}}{\vartheta_{BZ}}} = \frac{(105-10) - (105-60)}{\ln \frac{105-10}{105-60}} \text{ K} = 66,9 \text{ K}.$$

Zur Kontrolle wird zusätzlich Gl. (4.8) ausgewertet und danach die mittlere Temperaturdifferenz gebildet:

$$\bar{t}_B = t_H - (t_H - t_{B0}) \frac{C_B}{kAZ} \left[ 1 - e^{-\frac{kA}{C_B} Z} \right] = 105^\circ\text{C} - (105^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) \frac{20730000}{3000 \cdot 5163} \left[ 1 - e^{-\frac{3000 \cdot 5163}{20730000}} \right] = 38,1^\circ\text{C}$$

$$\Delta t_m = t_H - \bar{t}_B = 105^\circ\text{C} - 38,1^\circ\text{C} = 66,9 \text{ K}.$$

Außerdem wird die Wärmebilanz aufgestellt:

$$kA \Delta t_m Z = 3000 \cdot 66,9 \cdot 5163 \text{ Ws} = 287,8 \text{ kWh}$$

$$C_B (\vartheta_{B0} - \vartheta_{BZ}) = 20730000 \cdot (95 - 45) \text{ Ws} = 287,9 \text{ kWh}.$$

### Fall b

Zunächst sind einige Hilfsgrößen zu bestimmen. Aus Gln. (4.9) und (4.12) folgen:

$$V_V = \frac{\dot{Q}_V^*}{t_B^* - t_U} = \frac{300}{60-10} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 6 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$X = \frac{C_B}{kA + V_V + \dot{C}_s} = \frac{20730000}{3000 + 6 + 836} \text{ s} = 5396 \text{ s}$$

$$Y = \frac{kA t_H + V_V t_U + \dot{C}_s t_s}{kA + V_V + \dot{C}_s} = \frac{3000 \cdot 105 + 6 \cdot 10 + 836 \cdot 10}{3000 + 6 + 836} \text{ }^\circ\text{C} = 84,2^\circ\text{C}.$$

Weiter ergeben sich:

$$\text{Aufheizzeit nach G. (4.18)} \quad Z = X \ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}} = 5396 \text{ s} \ln \frac{84,2-10}{84,2-60} = 6046 \text{ s} = 1,68 \text{ h}$$

mittlere Temperaturdifferenz nach Gl. (4.21)

$$\Delta t_m = t_H - Y + \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = 105^\circ\text{C} - 84,2^\circ\text{C} + \frac{(84,2 - 10) - (84,2 - 60)}{\ln \frac{84,2 - 10}{84,2 - 60}} \text{K} = 65,4 \text{K}$$

mittlere Behältertemperatur nach Gl. (4.20)

$$\bar{t}_B = Y - \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = 84,2^\circ\text{C} - \frac{(84,2 - 10) - (84,2 - 60)}{\ln \frac{84,2 - 10}{84,2 - 60}} \text{K} = 39,6^\circ\text{C}.$$

Zur Ergebniskontrolle wird die Wärmebilanz aufgestellt:

- über die Heizfläche zugeführte Wärme  $k A \Delta t_m Z = 3000 \cdot 65,4 \cdot 6046 \text{Ws} = 329,5 \text{kWh}$
- vom Wasser aufgenommene Wärme  $C_B (t_{B0} - t_{BZ}) = 20730000 \cdot (60 - 10) \text{Ws} = 287,9 \text{kWh}$
- an die Umgebung abgegebene Wärme  $Q_V = V_V (\bar{t}_B - t_U) Z = 6(39,6 - 10) 6046 \text{Ws} = 0,3 \text{kWh}$
- an den Durchfluss abgegebene Wärme  $Q_S = \dot{C}_S (\bar{t}_B - t_S) Z = 836 (39,6 - 10) 6046 \text{Ws} = 41,6 \text{kWh}$

Die Summe für Wassererwärmung und Verluste von 329,8 kWh entspricht im Rahmen der Rechengenauigkeit der zugeführten Wärme.

### **Fall b – Berechnung mit einfacher Näherung**

Die Tatsache, dass das logarithmische Mittel implizit in der Berechnungsgleichung (4.21) enthalten ist, bildet die Grundlage nachfolgender Näherung.

- Bilden des logarithmischen Mittels gemäß *Fall a* nach Gl. (4.6)

$$\Delta t_{m,N} = \frac{\vartheta_{B0} - \vartheta_{BZ}}{\ln \frac{\vartheta_{B0}}{\vartheta_{BZ}}} = \frac{(105 - 10) - (105 - 60)}{\ln \frac{105 - 10}{105 - 60}} \text{K} = 66,9 \text{K}$$

- Berechnung der mittleren Behältertemperatur

$$\bar{t}_{B,N} = t_H - \Delta t_{m,N} = 105^\circ\text{C} - 66,9 \text{K} = 38,1^\circ\text{C}$$

- Aufstellen der Wärmebilanz mit der angenäherten mittleren Behältertemperatur

$$k A \Delta t_{m,N} Z_N = C_B (t_{BZ} - t_{B0}) + V_V (\bar{t}_{B,N} - t_U) Z_N + \dot{C}_S (\bar{t}_{B,N} - t_S) Z_N$$

- Ermittlung der näherungsweise Aufheizzeit  $Z_N$

$$\{k A \Delta t_{m,N} - V_V (\bar{t}_{B,N} - t_U) - \dot{C}_S (\bar{t}_{B,N} - t_S)\} Z_N = C_B (t_{BZ} - t_{B0})$$

$$Z_N = \frac{C_B (t_{BZ} - t_{B0})}{k A \Delta t_{m,N} - V_V (\bar{t}_{B,N} - t_U) - \dot{C}_S (\bar{t}_{B,N} - t_S)}$$

$$Z_N = \frac{20730000 (60 - 10)}{3000 \cdot 66,9 - 6(38,1 - 10) - 836 (38,1 - 10)} \text{s} = 5855 \text{s} = 1,63 \text{h}.$$

### **Fazit:**

Das Verwenden der einfachen Näherung bringt ein gutes Ergebnis bezüglich der Aufheizzeit (Näherung 1,63 h; exakter Wert 1,68 h).

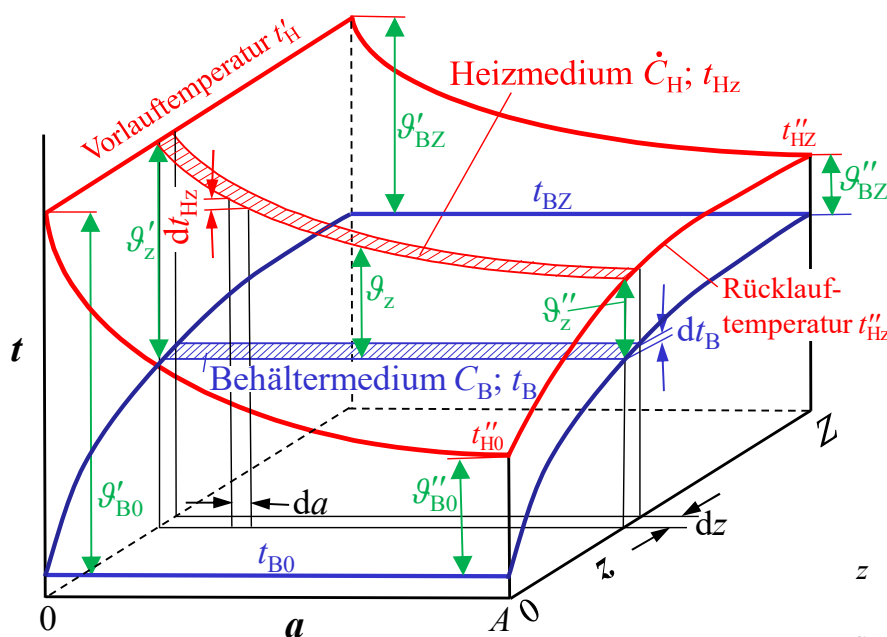
Dass dies so ist, liegt am dominanten Einfluss des logarithmischen Mittels, welches bei der exakten Lösung nach Gl. (4.21) implizit wirkt und bei der Näherung direkt Anwendung findet.

Zudem ist natürlich noch hilfreich, dass der Wärmeverlust nur marginal und der Wärmestrom an den Durchfluss relativ klein gegenüber der eigentlichen Behälteraufheizung sind. Wichtig ist aber, dass man die näherungsweise mittlere Behältertemperatur in Ansatz bringt.

## 5 Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom

### 5.1 Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom ohne Wärmeverluste und Durchströmung

Bild 5.1 zeigt das Temperatur-Heizflächen-Zeit-Schaubild für die Behälteraufheizung mittels Flüssigkeitsstrom, wobei die Eintrittstemperatur des Heizmediums  $t'_H$  über die Aufheizzeit  $Z$  konstant ist. Da sich die Heizmedientemperatur längs der Heizfläche ( $\equiv$  Wärmeübertragerfläche) und der Zeit ändert, ist das Schaubild 5.1 dreidimensional zu entwerfen.



**Bild 5.1** Temperatur-Heizflächen-Zeit-Schaubild für eine Behälteraufheizung mittels Flüssigkeitsstrom mit Kennzeichnung der relevanten Größen

$t_H$  Heizmedientemperatur

( $t'_H$  Vorlauf;

$t''_{Hz}$  Rücklauf zur Zeit  $z$ )

$t_B$  Behältertemperatur

(Beginn  $t_{B0}$ ; Ende  $t_{BZ}$ )

$g$  Übertemperatur bezogen auf Behältertemperatur (Beginn  $g_{B0}$ ; Ende  $g_{BZ}$ ) (Eintritt  $g'$ ; Austritt  $g''$ )

$z$  Zeitkoordinate (Beginn  $z = 0$ ; Ende  $z = Z \{ \equiv \text{Aufheizzeit} \}$ )

$a$  Heizflächenkoordinate (Beginn  $a = 0$ ; Ende  $a = A$ )

$C_B$  Wärmekapazität des Behälterinhalts ( $C_B = m_B c_B$ )

$\dot{C}_H$  Wärmekapazitätsstrom des Heizmediums ( $\dot{C}_H = \dot{m}_H c_H$ )

Als weitere Besonderheiten gelten: **temperaturunabhängiger Wärmedurchgangskoeffizient  $k = \text{const}$ , gerührter Behälterinhalt mit stets homogener Temperatur  $t_B$  zu jeder Zeit  $z$ , keine Wärmeverluste an die Umgebung und keine Behälterdurchströmung während des Aufheizens.**

Die Komplexität des Aufheizvorganges wird entkoppelt, indem man zuerst die Abkühlung des Heizmedienstromes längs der Wärmeübertragerfläche bei konstanter Behältertemperatur betrachtet und danach die zeitabhängige Behälteraufheizung analysiert.

#### 1. Abkühlung des Heizmedienstromes

Zu einer beliebigen Zeit  $z$  wird der infinitesimal kleine Wärmestrom vom Heizmedium durch die Wärmeübertragerfläche  $da$  an das Behältermedium übertragen, das für den Zeitmoment  $z$  die Temperatur  $t_B$  besitzt:

$$d\dot{Q} = -\dot{C}_H dt_{Hz} = k(t_{Hz} - t_B)da. \quad (5.1)$$

Mit den im Bild 5.1 vermerkten Bezeichnungen kann aufgrund der konstanten Behältertemperatur auch die Übertemperatur verwendet werden:

$$d\dot{Q} = -\dot{C}_H dg'_z = k g'_z da. \quad (5.2)$$

Nach Trennung der Variablen und Integration längs der Heizfläche ergibt sich

$$-\dot{C}_H \int_{g'_z}^{g''_z} \frac{dg_z}{g_z} = k \int_0^A da, \text{ woraus schrittweise}$$

$$\ln \frac{g''_z}{g'_z} = -\frac{k A}{\dot{C}_H}$$

$$g''_z = g'_z e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}} \quad (5.3)$$

folgt. Diese Beziehung gilt zeitunabhängig. (Übrigens besteht inhaltliche Identität mit Gl. (1.2).)

## 2. Erwärmung des Behälterinhaltes

Die im Zeitintervall  $dz$  durch die Heizfläche zugeführte Wärme  $dQ$  bewirkt eine Temperaturerhöhung des Behältermediums um  $dt_B$

$$dQ = C_B dt_B = \dot{C}_H (g'_z - g''_z) dz. \quad (5.4)$$

Substituiert man Gl. (5.3), so ergibt sich

$$C_B dt_B = \dot{C}_H g'_z \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}} \right) dz, \quad (5.5)$$

woraus weiter nach Substitution von  $dt_B = -dg'_z$ , Trennen der Variablen und Integration über die **Aufheizzeit** folgen:

$$-\frac{C_B}{\dot{C}_H} \int_{g'_{B0}}^{g'_{BZ}} \frac{dg'_z}{g'_z} = \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}} \right) \int_0^Z dz$$

$$Z = \frac{C_B}{\dot{C}_H} \ln \frac{g'_{B0}}{g'_{BZ}} \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}} \right)^{-1}. \quad (5.6)$$

Aus der Wärmebilanz  $k A \Delta t_m Z = C_B (g'_{B0} - g'_{BZ})$ , die in dieser Form nach Gl. (0.5) als Definitionsgleichung für die mittlere Temperaturdifferenz gilt, folgt nach Einsetzen der Gl. (5.6)

$$\Delta t_m = \frac{C_B}{k A Z} (g'_{B0} - g'_{BZ}) = \frac{\dot{C}_H}{k A} \frac{g'_{B0} - g'_{BZ}}{\ln \frac{g'_{B0}}{g'_{BZ}}} \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}} \right) \text{ und weiter mit Gl. (5.3) nach Substitution des}$$

Terms  $\frac{\dot{C}_H}{k A}$  und des Ausdrucks  $1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H}}$

$$\Delta t_m = \frac{1}{g'_z} \frac{g'_z - g''_z}{\ln \frac{g'_z}{g''_z}} \frac{g'_{B0} - g'_{BZ}}{\ln \frac{g'_{B0}}{g'_{BZ}}}. \quad (5.7)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Heizfläche}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Aufheizzeit}}$

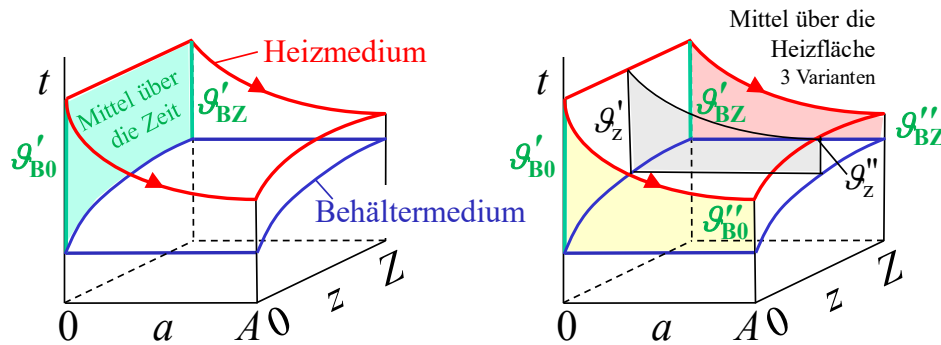
Der erste Term über die Heizfläche gilt für jeden Zeitpunkt, sodass man für die **mittlere Temperaturdifferenz** auch die folgenden Formen schreiben kann:

$$\Delta t_m = \frac{1}{g'_{B0}} \frac{g'_{B0} - g''_{B0}}{\ln \frac{g'_{B0}}{g''_{B0}}} \frac{g'_{B0} - g'_{BZ}}{\ln \frac{g'_{B0}}{g'_{BZ}}} = \frac{1}{g'_{BZ}} \frac{g'_{BZ} - g''_{BZ}}{\ln \frac{g'_{BZ}}{g''_{BZ}}} \frac{g'_{B0} - g'_{BZ}}{\ln \frac{g'_{B0}}{g'_{BZ}}}. \quad (5.8)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Heizfläche}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Aufheizzeit}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Heizfläche}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Aufheizzeit}}$



MACSKÁSY hat diese Gleichung 1964 in der Vorlesung "Heizungs- und Klimatechnik" an der TU Dresden angegeben und mich als Studenten damit total beeindruckt! Denn dies ist ein sehr interessantes Ergebnis, da **zwei logarithmische Mittel** wirksam werden. Eines wird über die Aufheizzeit am Anfang der Heizfläche mit der konstanten Vorlauftemperatur gebildet und das Zweite beschreibt das Verhalten des Heizstromes längs der Heizfläche. Dieses Mittel ist unter Beachtung des zugehörigen Divisors  $\mathcal{G}'_z$  zu jeder Zeit gleich. Bild 5.2 verdeutlicht dies. Üblicherweise wird man die charakteristischen Übertemperaturen am Anfang oder am Ende der Aufheizzeit benutzen.



**Bild 5.2** Veranschaulichung der Mittelbildung  
 - über die Zeit → grüne Fläche nach Gl. (5.7) und (5.8)  
 - über die Heizfläche → graue Fläche nach Gl. (5.7) oder gelbe oder orange Fläche nach Gl. (5.8)

Die Bestimmung der mittleren Temperaturen des Behälter- und des Heizmediums sind zur Ermittlung der Stoffwerte und den daraus abgeleiteten Größen von Interesse. Ihre Größe könnte aus den bisherigen Gleichungen als integrales Mittel bestimmt werden. Die Überlegung, dass die mittleren Temperaturen aber bereits in Gl. (5.8) impliziert sind, führt sofort zum Ziel.

Das logarithmische Mittel über die Aufheizzeit bezieht sich auf die konstante Eintrittstemperatur des Heizmediums, die Vorlauftemperatur  $t'_H$ , sodass für die **mittlere Behältertemperatur** gilt:

$$t'_H - \bar{t}_B = \underbrace{\frac{\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}}}}_{\text{Mittel über Aufheizzeit}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{t}_B = t'_H - \frac{\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}}} \quad (5.9)$$

Die **mittlere Heizmedientemperatur** liegt um  $\Delta t_m$  darüber, sodass folgt:

$$\bar{t}_H = \bar{t}_B + \Delta t_m \quad (5.10)$$

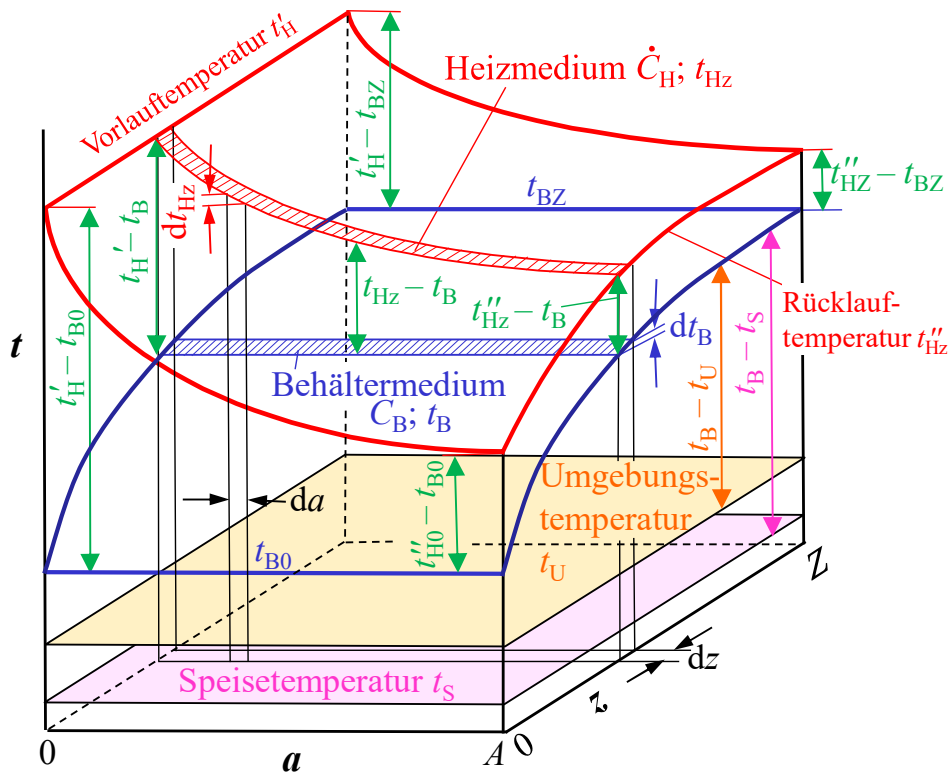
**Hinweis:** Die im Abschnitt 4.1 behandelte Dampfbeheizung mit konstanter Heizmedientemperatur stellt einen Sonderfall des jetzigen dar. Da keine Temperaturänderung längs der Heizfläche auftritt, entfällt folgerichtig in Gl. (5.8) der zugehörige Term, sodass

$$\Delta t_m = \underbrace{\frac{\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}}}}_{\text{Aufheizzeit}} \quad \text{gilt. Da die Heizmedienübertemperatur bezogen auf die Behältertemperatur längs der Wärmeübertragerfläche gleich ist, besteht Identität mit Gl. (4.6)}$$

$$\Delta t_m = t_H - \bar{t}_B = \frac{\mathcal{G}_{B0} - \mathcal{G}_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}_{B0}}{\mathcal{G}_{BZ}}} \equiv \Delta t_{\log}$$

### 5.2 Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom bei Wärmeverlusten und gleichzeitiger Durchströmung

Bild 5.2 ist gegenüber Bild 5.1 lediglich um die Umgebungstemperatur  $t_U$ , die für die Wärmeverluste maßgeblich ist, und um die Eintrittstemperatur des Durchströmungsmediums  $t_S$  erweitert. Beide gelten während der gesamten Aufheizzeit.



**Bild 5.3** Temperatur-Heizflächen-Zeit-Schaubild für eine Behälteraufheizung mittels Flüssigkeitsstrom bei zusätzlichem Wärmeverlust und Durchströmung des Behälters mit Kennzeichnung der relevanten Größen

- $t_H$  Heizmedientemperatur ( $t'_H$  Vorlauf;  $t''_{HZ}$  Rücklauf zur Zeit  $z$ )
- $t_B$  Behältertemperatur (Beginn  $t_{B0}$ ; Ende  $t_{BZ}$ )
- $t_U$  Umgebungstemperatur des Behälters
- $t_S$  Einspeisetemperatur in den Behälter
- $z$  Zeitkoordinate (Beginn  $z = 0$ ; Ende  $z = Z \{ \equiv \text{Aufheizzeit} \}$ )
- $a$  Heizflächenkoordinate (Beginn  $a = 0$ ; Ende  $a = A$ )
- $C_B$  Wärmekapazität des Behälterinhalts ( $C_B = m_B c_B$ )
- $\dot{C}_H$  Wärmekapazitätsstrom des Heizmediums ( $\dot{C}_H = \dot{m}_H c_H$ )
- $\dot{C}_S$  Wärmekapazitätsstrom der Einspeisung ( $\equiv$  der Abspeisung) ( $\dot{C}_S = \dot{m}_S c_B$ )

Als weitere Besonderheiten gelten: **temperaturunabhängiger Wärmedurchgangskoeffizient  $k = \text{const}$ , gerührter Behälterinhalt mit stets homogener Temperatur  $t_B$  zu jeder Zeit  $z$ , behältertemperaturabhängiger Wärmeverluststrom an die Umgebung der Temperatur  $t_U$  und Behälterdurchströmung mit einem vorgegebenen Massestrom konstanter Eintrittstemperatur  $t_S$  während des Aufheizens.**

Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgen die Ableitungen mit Bezug auf die Temperatur  $t$  anstelle der Übertemperaturen  $\mathcal{S}$  weitestgehend parallel zum Abschnitt 5.1. Die Besonderheiten der Störgrößen Wärmeverlust und Durchströmung werden wie im Abschnitt 4.2 behandelt, aber zur besseren Lesbarkeit wiederholt beschrieben.

Der Wärmestrom  $\dot{Q}_V^*$  vom Behälterinhalt zur Umgebung sei für einen berechneten oder gemessenen Bezugsfall  $t_B^* - t_U$  bekannt. Der Wärmestrom  $\dot{Q}_V$  ist linear von der vorhandenen Temperaturdifferenz abhängig, sodass gelten:

$$\dot{Q}_V = \dot{Q}_V^* \frac{t_B - t_U}{t_B^* - t_U} \quad \text{und mit der Abkürzung} \quad V_V = \frac{\dot{Q}_V^*}{t_B^* - t_U} \quad \text{folgt} \quad \dot{Q}_V = V_V (t_B - t_U). \quad (5.11)$$

Außerdem wird der Behälter mit einem verhältnismäßig kleinem Massestrom  $\dot{m}_s$  durchströmt, wie dies beispielsweise bei einem Warmwasserbereiter auftritt. Die Einspeisetemperatur  $t_s$  ändert sich beim Wassereintritt sprunghaft auf die zeitabhängige Behältertemperatur  $t_B$  und der Massestrom tritt mit dieser aus, sodass der Wärmestrom lautet:

$$\dot{Q}_s = \dot{C}_s (t_B - t_s). \quad (5.12)$$

Die Komplexität des Aufheizvorganges wird wiederum entkoppelt untersucht.

### 1. Abkühlung des Heizmedienstromes

Gemäß der Gln. (5.1) bis (5.3) folgen:

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= -\dot{C}_H dt_{Hz} = k da (t_{Hz} - t_B) \\ t''_{Hz} &= t_B + (t'_H - t_B) e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für die laufende Heizflächenkoordinate  $a$  kann man analog

$$t_{Hz} = t_B + (t'_H - t_B) e^{-\frac{ka}{\dot{C}_H}} \quad (5.14)$$

schreiben und daraus die zur Zeit  $z$  mittlere Heizmedientemperatur bestimmen. Es gilt:

$$\bar{t}_{Hz} = \frac{1}{A} \int_0^A t_{Hz} da = \frac{1}{A} \int_0^A \left( t_B + (t'_H - t_B) e^{-\frac{ka}{\dot{C}_H}} \right) da = t_B + (t'_H - t_B) \frac{\dot{C}_H}{kA} \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right). \quad (5.15)$$

### 2. Erwärmung des Behälterinhaltes

Damit ergeben sich zur Zeit  $z$  für den Zeitraum  $dz$  die Wärmebilanz und weitere Umformungen:

$$\begin{aligned} dQ &= C_B dt_B = k A (\bar{t}_{Hz} - t_B) dz - \dot{Q}_V dz - \dot{Q}_S dz \\ C_B dt_B &= k A (t'_H - t_B) \frac{\dot{C}_H}{kA} \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) dz - V_V (t_B - t_U) dz - \dot{C}_S (t_B - t_s) dz \\ C_B dt_B + \left\{ \dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) + V_V + \dot{C}_S \right\} t_B dz &= \left\{ \dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_s \right\} dz. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit den [Abkürzungen für Abschnitt 5.2](#)

$$K = \dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right); \quad X = \frac{C_B}{K + V_V + \dot{C}_S}; \quad Y = \frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_s}{K + V_V + \dot{C}_S}, \quad (5.17)$$

wobei  $Y$  wiederum als eine **fiktive Heizmedientemperatur** gesehen werden kann, da sie die Korrekturen durch den Verlustwärmestrom und die Durchflussaufheizung impliziert, ergibt sich die zu lösende inhomogene, lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten

$$X \frac{dt_B}{dz} + t_B = Y. \quad (5.18)$$

Die Lösung entspricht der des Abschnittes 4.2, sie wird der Vollständigkeit aber komplett wiedergegeben. Zur Lösung der homogenen Differenzialgleichung  $X \frac{dt_B}{dz} + t_B = 0$  gilt der Ansatz  $t_B = e^{\lambda z}$

$$X \lambda e^{\lambda z} + e^{\lambda z} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{X}.$$

Eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung, die der homogen Lösung hinzuzufügen ist, lautet  $t_B = Y$ , sodass sich zusammenfassend ergibt:

$$t_B = C e^{-\frac{z}{X}} + Y.$$

Die Integrationskonstante  $C$  ist aus der Anfangsbedingung  $t_{B0}$  zur Zeit  $z = 0$  bestimmbar

$t_{B0} = C e^{-\frac{0}{X}} + Y = C + Y \rightarrow C = t_{B0} - Y$ , woraus endgültig der zeitabhängige Temperaturverlauf im Behälter folgt:

$$t_B = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y. \quad (5.19)$$

Die Behältertemperatur am Ende der Aufheizzeit  $Z$  beträgt

$$t_{BZ} = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{Z}{X}} + Y. \quad (5.20)$$

Die **Aufheizzeit** folgt nach Umformung aus Gl. (5.20) und Ersetzen der Abkürzungen  $X$  und  $Y$  zu:

$$Z = X \ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}} \quad \text{bzw.} \quad Z = \frac{C_B}{K + V_V + \dot{C}_S} \ln \frac{\frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{K + V_V + \dot{C}_S} - t_{B0}}{\frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{K + V_V + \dot{C}_S} - t_{BZ}}. \quad (5.21)$$

Eine Umformung dieser Gleichung mit Ersatz der Abkürzung  $K$  und Substitution der Gl. (5.11) bietet noch eine weitere interessante Aussage:

$$Z = \frac{C_B}{\dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) + V_V + \dot{C}_S} \ln \frac{\overbrace{\dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) (t'_H - t_{B0})}^{\text{zugeführter Wärmestrom am Anfang}} - \overbrace{\frac{\dot{Q}_V^*}{t'_B - t_U} (t_{B0} - t_U) - \dot{C}_S (t_{B0} - t_S)}^{\text{Wärmeverluststrom am Anfang}}}{\underbrace{\dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) (t'_H - t_{BZ})}_{\text{zugeführter Wärmestrom am Ende}} - \underbrace{\frac{\dot{Q}_V^*}{t'_B - t_U} (t_{BZ} - t_U) - \dot{C}_S (t_{BZ} - t_S)}_{\text{Wärmeverluststrom am Ende}}}. \quad (5.22)$$

Ein Behälter ohne Wärmeverluste würde die Aufheizzeit gemäß Gl. (5.6) ergeben.

Aus Gl. (5.19) kann die **mittlere Behältertemperatur** während des Aufheizens durch Integration über die Aufheizzeit bestimmt werden:

$$\begin{aligned} t_B &= (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y \\ \bar{t}_B &= \frac{1}{Z} \int_0^Z \left[ (t_{B0} - Y) e^{-\frac{z}{X}} + Y \right] dz \\ \bar{t}_B &= Y - (Y - t_{B0}) \frac{X}{Z} \left[ 1 - e^{-\frac{Z}{X}} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Aus der Übertemperatur am Ende der Aufheizzeit nach Gl. (5.20)

$$t_{BZ} - Y = (t_{B0} - Y) e^{-\frac{Z}{X}} \quad \text{folgen} \quad \frac{Z}{X} = -\ln \frac{Y - t_{BZ}}{Y - t_{B0}} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{Z}{X}} = \frac{Y - t_{BZ}}{Y - t_{B0}},$$

womit Gl. (5.23) die folgende Form annimmt

$$\bar{t}_B = Y - \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}}. \quad (5.24)$$

Substitution der Abkürzung  $Y$  und geringes Umformen ergibt:

$$\bar{t}_B = \frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{K + V_V + \dot{C}_S} - \frac{t_{BZ} - t_{B0}}{\ln \frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{B0}}{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S - t_{BZ}}} \quad (5.25)$$

Der Vergleich mit Gl. (4.8) liefert für einen wärmeverlustfreien Behälter  $V_V = 0$  und einen nicht durchströmten Behälter  $\dot{C}_S = 0$  logischerweise völlige Übereinstimmung, wenn weiterhin für  $t'_H$  die dort konstante Heizmedientemperatur  $t_H$  gesetzt wird.

Um die mittlere Temperaturdifferenz während des Aufheizens zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- Wenn die Definitionsgleichung (0.5) verwendet werden soll, ist die gesamte erforderliche Wärme zu bestimmen. D. h., es müssen die Verlustwärme und die für einen eventuell vorhandenen Durchfluss erforderliche Wärme berechnet werden, wozu die zeitlich mittlere Behältertemperatur maßgeblich ist.
- Setzt man die Definitionsgleichung (0.6) an, so ist zur bereits ermittelten mittleren Behältertemperatur  $\bar{t}_B$  auch die mittlere Heizmedientemperatur  $\bar{t}_H$  zu bestimmen.

Es wird der zweite Weg gewählt, wobei  $\bar{t}_H$  der Mittelwert über die Heizfläche und die Aufheizzeit ist. Aufbauend auf Gl. (5.15) gilt dann für die mittlere Temperatur längs der Heizfläche zur Zeit  $z$

$$\bar{t}_{Hz} = t_B + (t'_H - t_B) \frac{\dot{C}_H}{k A} \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H} z} \right), \text{ wobei } t_B \text{ die Behältertemperatur zur Zeit } z \text{ darstellt (Bild 5.3).}$$

Somit gilt für die integrale mittlere Heizmedientemperatur  $\bar{t}_H$

$$\bar{t}_H = \frac{1}{Z} \int_0^Z \bar{t}_{Hz} dz = \frac{1}{Z} \int_0^Z \left\{ t_B + (t'_H - t_B) \underbrace{\frac{\dot{C}_H}{k A} \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H} z} \right)}_{\text{Abkürzung } L} \right\} dz = \frac{1}{Z} \int_0^Z \{ t_B + (t'_H - t_B) L \} dz, \quad (5.26)$$

woraus nach gliedweiser Integration folgt:

$$\bar{t}_H = \bar{t}_B + L t'_H - L \bar{t}_B = \bar{t}_B + L (t'_H - \bar{t}_B). \quad (5.27)$$

Die eigentlich gesuchte mittlere Temperaturdifferenz ergibt sich sofort

$$\Delta t_m = \bar{t}_H - \bar{t}_B = L (t'_H - \bar{t}_B) = \frac{\dot{C}_H}{k A} \left( 1 - e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H} Z} \right) (t'_H - \bar{t}_B). \quad (5.28)$$

Schreibt man Gl. (5.13) für das Ende der Aufheizzeit  $z = Z$  an, so gilt

$$t''_{HZ} = t_{BZ} + (t'_H - t_{BZ}) e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H} Z}, \quad (5.29)$$

woraus eliminierbar sind

$$\frac{t''_{HZ} - t_{BZ}}{t'_H - t_{BZ}} = e^{-\frac{k A}{\dot{C}_H} Z}; \quad \ln \frac{t'_H - t_{BZ}}{t''_{HZ} - t_{BZ}} = \frac{k A}{\dot{C}_H} Z.$$

Damit nimmt Gl. (5.28) die Form an

$$\Delta t_m = \frac{1}{\ln \frac{t'_H - t_{BZ}}{t''_{HZ} - t_{BZ}}} \left( 1 - \frac{t''_{HZ} - t_{BZ}}{t'_H - t_{BZ}} \right) (t'_H - \bar{t}_B) = \frac{1}{t'_H - t_{BZ}} \frac{(t'_H - t_{BZ}) - (t''_{HZ} - t_{BZ})}{\ln \frac{t'_H - t_{BZ}}{t''_{HZ} - t_{BZ}}} (t'_H - \bar{t}_B),$$

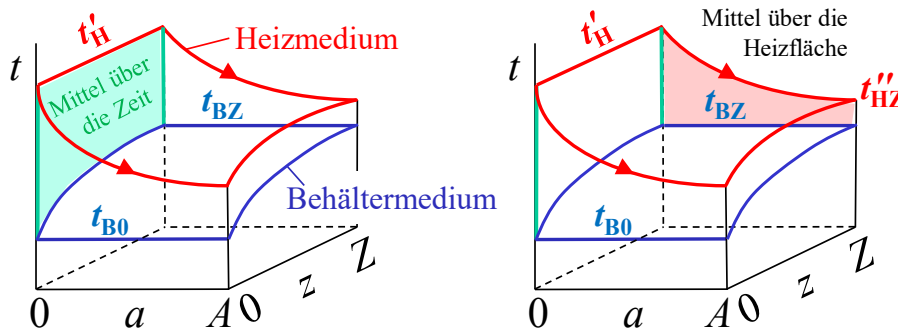
die nach Substitution der Gl. (5.24) endgültig die **mittlere Temperaturdifferenz** ergibt

$$\Delta t_m = \underbrace{\frac{1}{t'_H - t_{BZ}} \frac{(t'_H - t_{BZ}) - (t''_{HZ} - t_{BZ})}{\ln \frac{t'_H - t_{BZ}}{t''_{HZ} - t_{BZ}}}}_{\text{Heizfläche}} \left( t'_H - Y + \underbrace{\frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}}}_{\text{Aufheizzeit}} \right). \quad (5.30)$$

Wegen der Unübersichtlichkeit wird das Ersetzen des Terms  $Y$  nach Gl. (5.17) unterlassen.

In Gl. (5.30) ist das logarithmische Mittel zweifach vorhanden. Es erfolgen lediglich Korrekturen bezüglich der Heizmedientemperatur gemäß Gl. (5.17) auf die sogenannte fiktive Heizmedientemperatur  $Y$ , die hinsichtlich der Aufheizzeit relevant ist.

Bild 5.4 zeigt die Mittelwertbildung gemäß Gl. (5.30). Es besteht Analogie zu Bild 5.2. Dabei ist zu beachten, dass  $Y$  die **fiktive Heizmedientemperatur** darstellt. Das Mittel über die Heizfläche wurde hier am Ende der Aufheizzeit gebildet.



**Bild 5.4** Veranschaulichung der Mittelbildung  
 - über die Zeit  $\rightarrow$  grüne Fläche nach Gl. (5.30) unter Beachten von  $Y$   
 - über die Heizfläche  $\rightarrow$  orange Fläche nach Gl. (5.30) am Ende der Aufheizzeit

*Kontrollbetrachtungen:*

- Läge ein wärmeverlustrfreier Behälter  $V_V = 0$  und nicht durchströmter Behälter  $\dot{C}_s = 0$  vor, wäre Gl. (5.30) mit Gl. (5.8) vollkommen identisch, d. h., die mittlere Temperaturdifferenz entspräche dem reinen logarithmischen Mittel.
- Wäre der Behälter wärmeverlustrbehaftet und durchströmter, aber die Heizmedientemperatur längs der Wärmeübertragerfläche konstant  $t_H$ , so ergäbe sich Gl. (4.21), das ebenfalls als Kernstück das logarithmische Mittel – allerdings mit der Störgrößenkorrektur – beinhaltet.

Die Bestimmung der mittleren Temperaturen des Behälter- und des Heizmediums sind zur Ermittlung der Stoffwerte und den daraus abgeleiteten Größen von Interesse. Der Vollständigkeit sei die **mittlere Heizmedientemperatur** angegeben:

$$\bar{t}_H = \Delta t_m + \bar{t}_B. \quad (5.31)$$

### 5.3 Beispiel: Behälteraufheizung mit einem Flüssigkeitsstrom

Das Beispiel basiert auf den Daten des Beispiels 4.3. Ein Warmwasserbereiter mit einem Volumen von 5000 l ( $C_B \approx V \rho c = 20730$  kWs/K) wird mit einem Flüssigkeitsstrom  $\dot{m}_H = 1$  kg/s ( $\dot{C}_H = 4180$  W/K) und der konstanten Heizmedieneintrittstemperatur  $t'_H = 105$  °C aufgeheizt. Die installierte Heizfläche hat den Wert  $kA = 3000$  W/K. Die Anfangstemperatur sei  $t_{B0} = 10$  °C, die

gewünschte Endtemperatur  $t_{BZ} = 60\text{ °C}$ . Es ist vom Idealfall einer stets homogenen Wassertemperatur im Behälter auszugehen (gerührter Inhalt).

*Fall a:* Ideale Behälterdämmung und keine Durchströmung.

*Fall b:* Der Wärmestrom an die Umgebung ( $t_U = 10\text{ °C} = \text{const}$ ) beträgt im Referenzfall  $\dot{Q}_v^* = 300\text{ W}$  bei  $t_B^* = 60\text{ °C}$ . Die Durchströmung während der Aufheizung wird mit  $\dot{m}_s = 0,2\text{ kg/s}$  ( $\dot{C}_s = 836\text{ W/K}$ ) bei einer Einspeisetemperatur  $t_s = 10\text{ °C}$  angenommen.

Gesucht sind die Aufheizzeit und die mittlere Temperaturdifferenz zwischen Heizmedium und Behälterinhalt während des Aufheizens.

### Fall a

Die Übertemperaturen sind gemäß Bild 5.1 zu bilden. Die Aufheizzeit ergibt sich aus Gl. (5.6) zu:

$$Z = \frac{C_B}{\dot{C}_H} \ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}} \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right)^{-1} = \frac{20730000}{4180} \ln \frac{105-10}{105-60} \left( 1 - e^{-\frac{3000}{4180}} \right)^{-1} \text{ s} = 7236 \text{ s} = 2,01 \text{ h}.$$

Dies ist eine um ca. 40 % längere Aufheizzeit als bei Dampfbeheizung (Abschnitt 4.3).

Bevor die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz berechenbar ist, muss noch eine Heizmedienaustrittstemperatur bestimmt werden. Nach Gl. (5.3) gilt am Ende der Aufheizzeit

$$\mathcal{G}''_{BZ} = \mathcal{G}'_{BZ} e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} = (105-60) e^{-\frac{3000}{4180}} \text{ K} = 22,0 \text{ K}.$$

Dies entspricht nach Bild 5.1 der Temperatur  $t''_{HZ} = t_{BZ} + \mathcal{G}''_{BZ} = 60\text{ °C} + 22,0 \text{ K} = 82,0\text{ °C}$ .

Die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz folgt nach Gl. (5.8), wenn diese mit den Werten am Ende der Aufheizzeit gebildet wird, zu:

$$\Delta t_m = \frac{1}{\mathcal{G}'_{BZ}} \underbrace{\frac{\mathcal{G}'_{BZ} - \mathcal{G}''_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{BZ}}{\mathcal{G}''_{BZ}}}}_{\text{Heizfläche}} \underbrace{\frac{\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}}}}_{\text{Aufheizzeit}}$$

$$\Delta t_m = \frac{1}{105-60} \frac{(105-60) - (82,0-60)}{\ln \frac{105-60}{82,0-60}} \frac{(105-10) - (105-60)}{\ln \frac{105-10}{105-60}} \text{ K} = 47,8 \text{ K}.$$

Die mittlere Behältertemperatur nach Gl. (5.9) ergibt

$$\bar{t}_B = t'_H - \frac{\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}}{\ln \frac{\mathcal{G}'_{B0}}{\mathcal{G}'_{BZ}}} = 105\text{ °C}_H - \frac{(105-10) - (105-60)}{\ln \frac{105-10}{105-60}} \text{ K} = 38,1\text{ °C}.$$

Dieser Wert stimmt logischerweise mit dem früheren Ergebnis bei Dampfaufheizung überein, denn die Wassererwärmung im wärmeverlustfreien Behälter ergibt auch bei längerer Aufheizzeit den gleichen Mittelwert.

Die mittlere Heizmedientemperatur beträgt gemäß Gl. (5.10)

$$\bar{t}_H = \bar{t}_B + \Delta t_m = 38,1\text{ °C} + 47,8\text{ K} = 85,9\text{ °C}.$$

Außerdem wird die Bilanz der übertragenen und der aufgenommenen Wärme aufgestellt:

$$\left. \begin{aligned} k A \Delta t_m Z &= 3000 \cdot 47,8 \cdot 7236 \text{ Ws} = 288,2 \text{ kWh} \\ C_B (\mathcal{G}'_{B0} - \mathcal{G}'_{BZ}) &= 20730000 \cdot (95 - 45) \text{ Ws} = 287,9 \text{ kWh.} \end{aligned} \right\} \text{ Im Rahmen der Rechengenauigkeit besteht Übereinstimmung.}$$

**Fall b**

Vorab sind einige Hilfsgrößen zu bestimmen. Aus Gln. (5.11) und (5.17) folgen:

$$V_V = \frac{\dot{Q}_V^*}{t_B^* - t_U} = \frac{300}{60 - 10} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 6 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$K = \dot{C}_H \left( 1 - e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} \right) = 4180 \left( 1 - e^{-\frac{3000}{4180}} \right) \frac{\text{W}}{\text{K}} = 2141 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$X = \frac{C_B}{K + V_V + \dot{C}_S} = \frac{20730000}{2141 + 6 + 836} \text{s} = 6949 \text{s}$$

$$Y = \frac{K t'_H + V_V t_U + \dot{C}_S t_S}{K + V_V + \dot{C}_S} = \frac{2141 \cdot 105 + 6 \cdot 10 + 836 \cdot 10}{2141 + 6 + 836} \text{°C} = 78,2 \text{°C}.$$

Weiter ergeben sich:

Aufheizzeit nach G. (5.21)

$$Z = X \ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}} = 6949 \ln \frac{78,2 - 10}{78,2 - 60} \text{s} = 9180 \text{s} = 2,55 \text{h}$$

mittlere Behältertemperatur nach Gl. (5.24)

$$\bar{t}_B = Y - \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} = 78,2 \text{°C} - \frac{(78,2 - 10) - (78,2 - 60)}{\ln \frac{78,2 - 10}{78,2 - 60}} \text{K} = 40,4 \text{°C}$$

Heizmedienaustrittstemperatur am Ende der Aufheizzeit nach Gl. (5.29)

$$t''_{HZ} = t_{BZ} + (t'_H - t_{BZ}) e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} = 60 \text{°C} + (105 - 60) e^{-\frac{3000}{4180}} \text{K} = 82,0 \text{°C}$$

(Es besteht Übereinstimmung mit Fall a, da die Temperaturverhältnisse am Ende der Aufheizzeit identisch sind.)

mittlere Temperaturdifferenz nach Gl. (5.30)

$$\Delta t_m = \underbrace{\frac{1}{t'_H - t_{BZ}} \frac{(t'_H - t_{BZ}) - (t''_{HZ} - t_{BZ})}{\ln \frac{t'_H - t_{BZ}}{t''_{HZ} - t_{BZ}}}}_{\text{Heizfläche}} \underbrace{\left( t'_H - Y + \frac{(Y - t_{B0}) - (Y - t_{BZ})}{\ln \frac{Y - t_{B0}}{Y - t_{BZ}}} \right)}_{\text{Aufheizzeit}}$$

$$\Delta t_m = \frac{1}{105 - 60} \frac{(105 - 60) - (82,0 - 60)}{\ln \frac{105 - 60}{82,0 - 60}} \left( 105 - 78,2 + \frac{(78,2 - 10) - (78,2 - 60)}{\ln \frac{78,2 - 10}{78,2 - 60}} \right) \text{K} = 46,2 \text{K}.$$

Kontrollrechnungen anhand der Wärmebilanzen:

- über die Heizfläche zugeführte Wärme  $k A \Delta t_m Z = 3000 \cdot 46,2 \cdot 9180 \text{Ws} = 353,4 \text{kWh}$
- vom Wasser aufgenommene Wärme  $C_B (t_{B0} - t_{BZ}) = 20730000 \cdot (60 - 10) \text{Ws} = 287,9 \text{kWh}$
- an die Umgebung abgegebene Wärme  $Q_V = V_V (\bar{t}_B - t_U) Z = 6(40,4 - 10) 9180 \text{Ws} = 0,5 \text{kWh}$
- an den Durchfluss abgegebene Wärme  $Q_S = \dot{C}_S (\bar{t}_B - t_S) Z = 836(40,4 - 10) 9180 \text{Ws} = 64,8 \text{kWh}$

Die Summe für Wassererwärmung und Verluste 353,2 kWh entspricht bis auf Rechenungenauigkeiten der zugeführten Wärme.



**Fall b – Berechnung mit einfacher Näherung**

Man betrachtet zunächst einen verlustfreien Behälter und übernimmt aus dem *Fall a* die einfach zu ermittelnden Ergebnisse, die jetzt als Näherung (Index N) zu verstehen sind:

- Heizmedienaustrittstemperatur nach Gl. (5.3) am Ende der Aufheizzeit

$$\mathcal{G}_{\text{BZ,N}}'' = \mathcal{G}_{\text{BZ}}' e^{-\frac{kA}{\dot{C}_H}} = (105 - 60) e^{-\frac{3000}{4180}} \text{ K} = 22,0 \text{ K} \rightarrow t_{\text{HZ,N}}'' = t_{\text{BZ}} + \mathcal{G}_{\text{BZ}}'' = 60^\circ\text{C} + 22,0 \text{ K} = 82,0^\circ\text{C}$$

(Es besteht Übereinstimmung mit dem exakten Wert nach Fall b, da die Temperaturverhältnisse am Ende der Aufheizzeit identisch sind.)

- mittlere logarithmische Temperaturdifferenz nach Gl. (5.8)

$$\Delta t_{\text{m,N}} = \frac{1}{\underbrace{\mathcal{G}_{\text{BZ}}'}_{\text{Heizfläche}} \underbrace{\ln \frac{\mathcal{G}_{\text{BZ}}'}{\mathcal{G}_{\text{BZ}}''}}_{\text{Aufheizzeit}}} \frac{(\mathcal{G}_{\text{B0}}' - \mathcal{G}_{\text{BZ}}'')}{\ln \frac{\mathcal{G}_{\text{B0}}'}{\mathcal{G}_{\text{BZ}}''}} = \frac{1}{105 - 60} \frac{(105 - 60) - (82,0 - 60)}{\ln \frac{105 - 60}{82,0 - 60}} \frac{(105 - 10) - (105 - 60)}{\ln \frac{105 - 10}{105 - 60}} \text{ K} = 47,8 \text{ K}$$

- mittlere Behältertemperatur nach Gl. (5.9)

$$\bar{t}_{\text{B,N}} = t_{\text{H}}' - \frac{(\mathcal{G}_{\text{B0}}' - \mathcal{G}_{\text{BZ}}'')}{\ln \frac{\mathcal{G}_{\text{B0}}'}{\mathcal{G}_{\text{BZ}}''}} = 105^\circ\text{C}_\text{H} - \frac{(105 - 10) - (105 - 60)}{\ln \frac{105 - 10}{105 - 60}} \text{ K} = 38,1^\circ\text{C}.$$

Damit wird die Wärmebilanz aufgestellt, wobei man die Behälterverluste für die näherungsweise ermittelte, mittlere Behältertemperatur formuliert, aus der die Aufheizzeit folgt:

$$k A \Delta t_{\text{m,N}} Z_{\text{N}} = C_{\text{B}} (t_{\text{BZ}} - t_{\text{B0}}) + V_{\text{V}} (\bar{t}_{\text{B,N}} - t_{\text{U}}) Z_{\text{N}} + \dot{C}_{\text{S}} (\bar{t}_{\text{B,N}} - t_{\text{S}}) Z_{\text{N}}$$

$$Z_{\text{N}} = \frac{C_{\text{B}} (t_{\text{BZ}} - t_{\text{B0}})}{k A \Delta t_{\text{m,N}} - V_{\text{V}} (\bar{t}_{\text{B,N}} - t_{\text{U}}) - \dot{C}_{\text{S}} (\bar{t}_{\text{B,N}} - t_{\text{S}})}$$

$$Z_{\text{N}} = \frac{20730000(60 - 10)}{3000 \cdot 47,8 - 6(38,1 - 10) - 836(38,1 - 10)} \text{ s} = 8656 \text{ s} = 2,40 \text{ h}.$$

Die Abweichung zum exakten Ergebnis beträgt ca. 6 %.