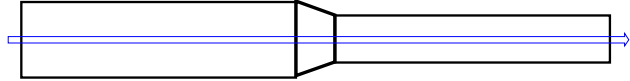


Bedeutung des hydraulischen und des gleichwertigen Durchmessers

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, Jößnitz (Plauen)

Die Strömungsverhältnissen in Rohren wurden sehr umfangreich untersucht, sodass beispielsweise die Druckverluste nach einer vereinfachten Modellvorstellung berechnet werden können. Es handelt sich um ein eindimensionales Modell, der sogenannten Stromfadentheorie.

Bild 1 Zusammengesetzte Rohrleitung (drei Rohrtelstrecken i) mit einem angedeuteten Stromfaden in der Mitte der Rohrleitung
Die Strömung im Rohr ist rotationssymmetrisch.

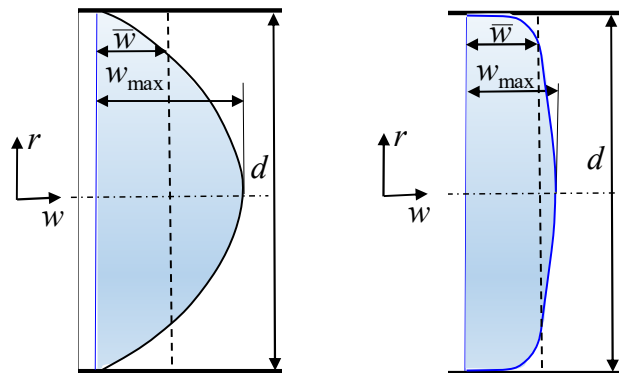


Es gilt die Annahme Druck, Geschwindigkeit, Temperatur und Dichte sind über den Querschnitt konstant. Der Querschnitt kann sich selbstverständlich längs der Stromröhre ändern.

Bei turbulenter Strömung treffen die vereinfachten Annahmen infolge der Quervermischung relativ gut zu. Die Strömungsprofile für eine laminare und eine turbulente Rohrströmung zeigt Bild 2.

Bild 2 Isotherme Rohrströmungen mit laminarem (links) und turbulentem Strömungsprofil (rechts) (Quelle: [1])

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\bar{w}$ ist in beiden Fällen gleich groß. Bei laminarer Strömung ist die Maximalgeschwindigkeit in der Rohrachse stets doppelt so groß wie die mittlere Geschwindigkeit ($\bar{w}/w_{\max} = 0,5$). Beim dargestellten turbulenten Strömungsprofil ist $\bar{w}/w_{\max} = 1,224$ (Profilexponent: 7).



Für den Druckverlust einer Rohrtelstrecke i gilt dann für übliche technische Anwendungen:

$$\Delta p_{R,i} = p'_i - p''_i = \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \Sigma \zeta_i \right) \frac{\rho_i}{2} \bar{w}_i^2 = R_i l_i + S_i \Sigma \zeta_i \quad \text{mit} \quad \bar{w}_i = \frac{4 \dot{V}}{\pi d_i^2} \quad (1)$$

$p'_i ; p''_i$	Pa	Druck am Anfang bzw. Ende der Teilstrecke		
l_i	m	Rohrlänge	$\dot{V}_i$	m ³ /s Volumenstrom
λ_i	-	Rohrreibungsbeiwert	$\bar{w}_i$	m/s mittlere Geschwindigkeit über Querschnitt
ρ_i	kg/m ³	Dichte	$\Sigma \zeta_i$	- Summe der Einzelwiderstandbeiwerte
R_i	Pa/m	spezifischer Druckverlust durch Rohrreibung		
S_i	Pa	Staudruck.		

Die Ermittlung der Beiwerte bedarf einer gesonderten Betrachtung.

- Rohrreibungsbeiwert λ_i

Detaillierte Betrachtungen für den laminaren Strömungsfall sind beispielhaft im Anhang (Seite 9ff.) zu finden. Es gilt für die Teilstrecke i bei *laminarer* Rohrströmung

$$\lambda_i = \frac{64}{Re_i} \quad (2)$$

und bei *turbulenter* Rohrströmung nach PRANDTL-COLEBROOK

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{Re_i \sqrt{\lambda_i}} + \frac{\varepsilon_i}{3,71 d_i} \right) \quad (3)$$

Re_i - Reynoldszahl $Re_i = w_i d_i / \nu_i$

ε_i m Rohrrauigkeit

ν_i m²/s dynamische Viskosität ($\nu = \eta / \rho_i$ mit dynamische Viskosität η in Pa s).

Da die transzente Gleichung (3) manuell praktisch nicht lösbar ist, kann das Diagramm im Bild 3 verwendet werden. In [1, Seite 51] ist ein iterativ arbeitender Algorithmus angegeben. Die Gl. (3) hat den großen Vorteil, dass sie die Grenzgebiete "ausgebildete Rauigkeitsströmung" und "Glattrohrströmung" einschließt.

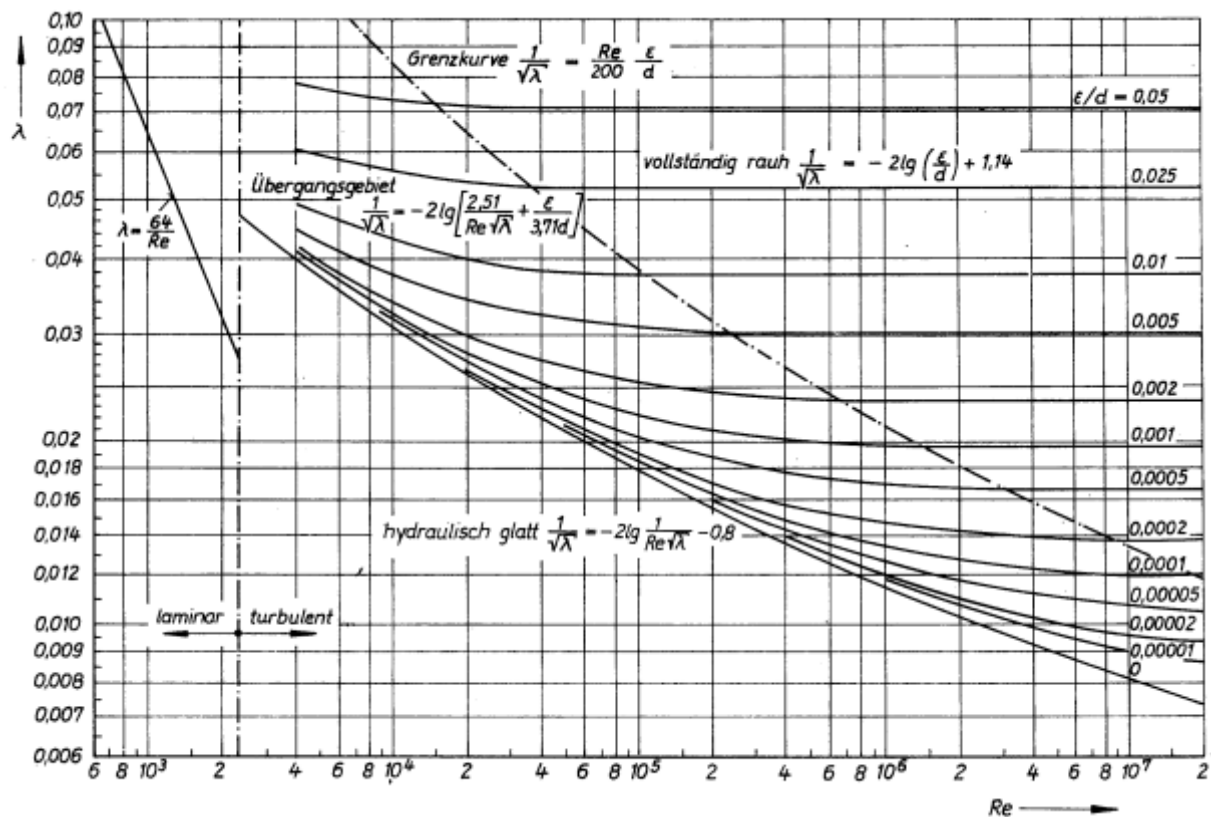


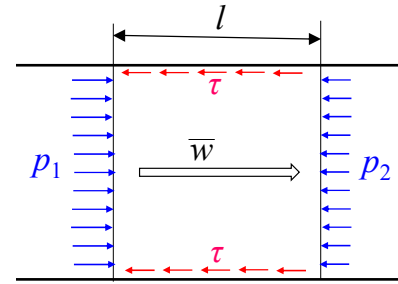
Bild 3 Rohrreibungsbeiwert für gerade Rohre in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re und der relativen Rauigkeit ε/d — Diagramm zur Wiedergabe der Gln. (2) und (3) (Quelle: [1, Seite 52]).

- Es sind zwei Arten von Einzelwiderständen ζ_i in Rohrleitungen zu unterscheiden, es gibt konstante und durchflussabhängige Werte.

Hydraulischer Durchmesser

In der Technik sind außer Rohren häufig Kanäle als Durchströmteile zu finden. Man hat sich bemüht die Druckverlustberechnung von Kanälen der verschiedenen Geometrien ähnlich den der kreisrunden Rohre abzuhandeln. Deshalb wurde das Gedankenmodell nach Bild 4 aufgestellt.

Bild 4 Ausschnitt aus einem Durchströmteil (Rohrquerschnitt, Rechteckquerschnitt oder beliebiger Querschnitt) der Länge l mit den auf das Fluid wirkenden Druckkräften im Durchströmquerschnitt und den Schubspannungen an den Wänden



Es herrscht im Strömungsfall folgendes Kräftegleichgewicht:

$$(p_1 - p_2)A = \tau U l, \quad (4)$$

wenn A den Querschnitt, p die Drücke im Fluid, U den Umfang, l die Länge und τ die Schubspannung des Fluids an den Wänden darstellen. Dabei gelten A und U für beliebige Geometrien. Bezogen auf das Rohr – das bestuntersuchte Durchströmteil – ist dies

$$(p_1 - p_2) \frac{\pi d^2}{4} = \tau \pi d l. \quad (5)$$

Definiert man ersatzweise für das Rohr den Durchmesser d als hydraulischen Durchmesser d_h so gilt

$$d_h = \frac{4 \tau l}{p_1 - p_2}. \quad (6)$$

Die Substitution der Gl. (4) liefert den bekannten Zusammenhang für den *hydraulischen Durchmesser*

$$d_h = \frac{4 A}{U}. \quad (7)$$

Dieses Gedankenmodell gilt exakt nur bei einer *konstanten mittleren Geschwindigkeit* über den Querschnitt, die aus der Kontinuitätsgleichung mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ folgt:

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{A}. \quad (8)$$

Bei Betrachtung von Bild 2 sieht man, dass die turbulente Strömung dies besser als die laminare Strömung erfüllt. So kann zur Bestimmung des Rohrreibungsbeiwertes λ auch bei beliebigen Querschnitten Gl. (3) bzw. Bild 3 verwendet werden, während bei der laminaren Kanalströmung eine Korrektur

$$\lambda = \varphi \frac{64}{Re} \quad (9)$$

vorzunehmen ist. Der Korrekturwert φ wurde für Rechteckquerschnitte mit der Breite b und der Höhe h ermittelt (Angaben z. B. in [3]):

h/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1
φ	1,5	1,34	1,2	1,1	1,02	0,97	0,94	0,92	0,9	0,89	0,88

Beispiel 1

Für eine laminare Strömung in einem kreisrunden Rohr gilt der Druckverlust

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = 32 \frac{l \eta}{d^2} \bar{w} \quad (10)$$

und für einen ebenen Spalt der Höhe h sehr großer Breite $b \gg h$ berechnet sich der Druckverlust zu

$$\Delta p_{\text{Spalt}} = 12 \frac{l \eta}{h^2} \bar{w}. \quad (11)$$

Es ist eine Darstellung mit dem hydraulischen Durchmesser aufzustellen und der Korrekturwert φ für den Spalt zu ermitteln.

Hinweis: Die Berechnung der gegebenen Druckverluste ist im Anhang (Seite 9ff.) dargestellt.

Lösung:

Nach Gl. (7) gelten für das Rohr und für den Spalt

$$d_{h,\text{Rohr}} = \frac{4 A}{U} = \frac{4 \pi \frac{d^2}{4}}{\pi d} = d; \quad d_{h,\text{Spalt}} = \frac{4 h b}{2(h+b)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2 h}{(\frac{h}{b} + 1)} = 2 h. \quad (12)$$

Die Gln. (10) und (11) werden gezielt erweitert, wobei stets d_h geschrieben wird:

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = 32 \frac{l \eta}{d^2} \bar{w} = 32 \frac{l \eta}{d^2} \bar{w} \frac{2 \bar{w} \rho}{2 \bar{w} \rho} = 64 \frac{1}{\frac{\bar{w} d_h}{\nu}} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 = 64 \frac{1}{Re} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{Rohr}} = \frac{64}{Re}$$

$$\Delta p_{\text{Spalt}} = 12 \frac{l \eta}{h^2} \bar{w} = 12 \frac{l \eta}{(\frac{d_h}{2})^2} \bar{w} \frac{2 \bar{w} \rho}{2 \bar{w} \rho} = 96 \frac{1}{\frac{\bar{w} d_h}{\nu}} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 = 96 \frac{1}{Re} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{Spalt}} = \frac{96}{Re}.$$

Damit gilt nach Definitionsgleichung für den Korrekturwert φ

$$\varphi_{\text{Spalt}} = 1,5 \varphi_{\text{Rohr}},$$

wie dieser in der Tabelle auf Seite 3, unten angegeben wurde.

Beispiel 2

Ein Luftkanal der Länge 20 m und mit den Querschnittsabmessungen 1 m Breite sowie 0,4 m Höhe besteht aus verzinktem Stahlblech (Rauigkeit $\varepsilon = 0,15$ mm). Er wird von einem Luftvolumenstrom $\dot{V} = 2,4$ m³/s durchströmt. Es gelten die Temperatur 20 °C und der Luftdruck $p_L = 100$ kPa, sodass die kinematische Viskosität $\nu \approx 15,4 \cdot 10^{-6}$ m²/s und die Dichte $\rho \approx 1,2$ kg/m³ betragen [2]. Es ist der Druckverlust zu berechnen.

Lösung:

Nach Gl. (7) berechnet sich für den Kanal der hydraulische Durchmesser

$$d_h = \frac{4 A}{U} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0,4}{2 (1 + 0,4)} \text{ m} = 0,5714 \text{ m}. \quad (13)$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Kanal beträgt nach Gl. (8)

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{2,4 \text{ m}}{0,4 \text{ s}} = 6 \text{ m/s.} \quad (14)$$

Damit ergibt sich

$$Re = \frac{\bar{w} d_h}{\nu} = \frac{6 \cdot 0,5714}{15,4 \cdot 10^{-6}} = 2,22623 \cdot 10^5. \quad (15)$$

Mit der relativen Rauigkeit $\varepsilon/d_h = 0,00026$ ergibt sich der Rohrreibungsbeiwert nach Bild 3 oder nach iterativer Auswertung der Gl. (3) zu

$$\lambda = 0,0173.$$

Damit liefert Gl. (1)

$$\Delta p_R = \lambda \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 = 0,0173 \frac{20}{0,5714} \frac{1,2}{2} 6^2 \text{ Pa} = 13 \text{ Pa.} \quad (16)$$

Fazit zum hydraulischen Durchmesser

Wie bereits eingangs betont gilt das geometrische Ersatzmodell – hydraulischer Durchmesser – grundsätzlich nur bei der *gleichen mittleren Geschwindigkeit* in den Durchströmteilen, denn nur dann sind die Reynoldszahlen vergleichbar und der Rohrreibungsbeiwert z. B. nach den Gln. (2), (3) oder gemäß Bild 3 bestimmbar.

Das Modell stimmt umso besser, je gleichmäßiger die Strömungsgeschwindigkeit über dem Querschnitt ist (gleichmäßiges Strömungsprofil).

Die Anwendung ist somit für *turbulente Durchströmungen sehr gut geeignet*. Es ist das in der Praxis *übliche Verfahren*.

Zusammengesetzte Querschnitte mit sehr unterschiedlich durchströmten Teilquerschnitten sind dagegen weniger modellgerecht.

Aufgrund der unterschiedlichen Strömungsprofile (Bild 2) können bei laminarer Strömung große Abweichungen auftreten, sodass der Rohrreibungsbeiwert λ zu korrigieren ist.

Gleichwertiger Durchmesser

Der gleichwertige oder auch äquivalente Durchmesser ist in der Strömungstechnik weitestgehend unbekannt. Mit dem hydraulischen Durchmesser werden – wie vorgestellt – alle praxisüblichen Druckverlustberechnungen nach der Stromfadentheorie erfolgreich vorgenommen. Der *gleichwertige Durchmesser* wurde meines Erachtens in der *Lüftungstechnik* eingeführt und hat nur dort eine praktische Bedeutung erlangt. Er basiert nicht auf einem allgemein anerkannten Ersatzmodell wie der hydraulische Durchmesser, die Unregelmäßigkeiten bei seiner Herleitung werden in der Regel nicht sauber benannt. Im Gegenteil wird oftmals suggeriert, als stünden hydraulischer und gleichwertiger Durchmesser theoretisch fundiert nebeneinander.

Begründung der Definition: In der Lüftungstechnik werden Kanalnetze verwendet, die aus Rohren und Rechteckkanälen mit beliebigen Querschnittsabmessungen in gemischter Weise bestehen. Oftmals werden die Kanäle individuell gefertigt und den örtlichen Platzverhältnissen

angepasst. Zu den Zeiten der manuellen Auslegung wurde meistens nach dem Prinzip gleicher spezifischer Druckverluste pro Meter Kanallänge bezogen auf den längsten Strang vorgegangen. Da nicht unendlich viele Druckverlustdiagramme für alle Kanalquerschnitte erstellt werden konnten, hat man sich in der Regel auf Netzgrafiken oder Tabellen *nur für Rohre* festgelegt. Hatte man teilstreckenweise die Rohrdurchmesser fixiert, rechnete man auf praktisch geforderte Kanalquerschnitte um. Dabei sollten für jede Teilstrecke weiterhin der Druckverlust und der Volumenstrom unverändert wie im Rohrquerschnitt gelten.

Die Druckverluste für das Rohr mit dem Durchmesser d und den Kanal mit dem Querschnitt $a \times b$ ergeben bei Annahme reiner Reibung (ohne Einzelwiderstände):

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = \lambda_{\text{Rohr}} \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}_{\text{Rohr}}^2 \quad \Delta p_{\text{Kanal}} = \lambda_{\text{Kanal}} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}_{\text{Kanal}}^2 \quad (17)$$

Substitution des Volumenstromes $\dot{V}$

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = \lambda_{\text{Rohr}} \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \left(\frac{4 \dot{V}}{\pi d^2} \right)^2 \quad \Delta p_{\text{Kanal}} = \lambda_{\text{Kanal}} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\dot{V}}{a b} \right)^2$$

Gleichsetzen und Substitution des hydraulischen Durchmessers d_h für den Rechteckkanal

$$\lambda_{\text{Rohr}} \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \left(\frac{4 \dot{V}}{\pi d^2} \right)^2 = \lambda_{\text{Kanal}} \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\dot{V}}{a b} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda_{\text{Rohr}}}{d} \left(\frac{4}{\pi d^2} \right)^2 = \frac{\lambda_{\text{Kanal}}}{\frac{4 a b}{2(a+b)}} \left(\frac{1}{a b} \right)^2.$$

Schließlich wird d_g als der gleichwertige Rohrdurchmesser deklariert:

$$d_g = \sqrt[5]{\frac{32}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{a^3 b^3}{a+b}} \underbrace{\sqrt[5]{\frac{\lambda_{\text{Rohr}}}{\lambda_{\text{Kanal}}}}}_{\approx 1} \approx 1,265 \sqrt[5]{\frac{a^3 b^3}{a+b}}. \quad (18)$$

Die üblichen Herleitungen in der Fachliteratur setzen stets *stillschweigend* $\lambda_{\text{Rohr}} = \lambda_{\text{Kanal}}$. Sie sind aber unterschiedlich groß, denn es bestehen in Wirklichkeit die Abhängigkeiten

$$\lambda_{\text{Rohr}} = f(\bar{w}_{\text{Rohr}}, d) \quad \text{und} \quad \lambda_{\text{Kanal}} = f(\bar{w}_{\text{Kanal}}, d_h) \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{Rohr}} \neq \lambda_{\text{Kanal}}. \quad (19)$$

Dabei ist es unschön, dass man keine Fehlergröße quantifizieren kann. Sie ist je nach Lage im strömungstechnischen Übergangsbereich (Bild 3) unterschiedlich. Dass Gl. (18) als Näherung dennoch brauchbar ist, liegt an der Verkleinerung des Quotienten durch die 5. Wurzel.

Bei der praktischen Bemessungsstrategie muss vom Diagramm- bzw. Tabellenwert d_g auf die Abmessungen a und b geschlossen werden. Dabei geht man so vor, dass man das Seitenverhältnis

$$n = \frac{a}{b} \quad (20)$$

für den Kanal vorgibt. Damit nimmt Gl. (18) die folgende Form an:

$$d_g = \sqrt[5]{\frac{32}{\pi^2}} \sqrt[5]{\frac{n^3 b^3 b^3}{n b + b}} \rightarrow b = \frac{d_g}{2} \sqrt[5]{\pi^2 \frac{n+1}{n^3}}. \quad (21)$$

Beispiel 3

Der gleichwertige Durchmesser aus einem Druckverlustdiagramm ergab sich zu $d_g = 616$ mm. Es soll ein Kanal mit dem Seitenverhältnis $n = 2$ zum Einsatz kommen.

Lösung:

Gl. (21) liefert die Kanalseite

$$b = \frac{d_g}{2} \sqrt[5]{\pi^2 \frac{n+1}{n^3}} = \frac{616}{2} \sqrt[5]{\pi^2 \frac{2+1}{2^3}} \text{ mm} = 400 \text{ mm}$$

und Gl. (20) die zugehörige Seite a

$$a = n b = 2 \cdot 400 \text{ mm} = 800 \text{ mm}.$$

Beispiel 4

Für den im Beispiel 2 betrachteten Luftkanal soll er gleichwertige Durchmesser bestimmt werden. Mit diesem Durchmesser sei dann ein Wickelfalzrohr aus verzinktem Stahlblech (Rauigkeit $\varepsilon = 0,15$ mm) betrachtet, das über die Länge von 20 m den gleichen Luftvolumenstrom wie im Beispiel 2 durchleitet. Wie groß ist der Druckverlust im modellierten Ersatzrohr?

Lösung:

Nach Gl. (18) berechnet sich für den Kanal der gleichwertige Durchmesser zu

$$d_g = 1,265 \sqrt[5]{\frac{a^3 b^3}{a+b}} = 1,265 \sqrt[5]{\frac{1^3 0,4^3}{1+0,4}} \text{ m} = 0,682 \text{ m}. \quad (22)$$

Die mittlere Geschwindigkeit im Ersatzrohr beträgt nach Gl. (8)

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{\pi \frac{d_g^2}{4}} = \frac{2,4}{\pi \frac{0,682^2}{4}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,57 \text{ m/s}. \quad (23)$$

Damit ergibt sich

$$Re = \frac{\bar{w} d_g}{\nu} = \frac{6,57 \cdot 0,682}{15,4 \cdot 10^{-6}} = 2,90957 \cdot 10^5.$$

Mit der relativen Rauigkeit $\varepsilon/d_g = 0,00022$ ergibt sich der Rohrreibungsbeiwert nach Bild 3 oder nach iterativer Auswertung der Gl. (3) zu

$$\lambda = 0,0165.$$

Damit liefert Gl. (1)

$$\Delta p_R = \lambda \frac{l}{d_g} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 = 0,0165 \frac{20}{0,682} \frac{1,2}{2} 6,57^2 \text{ Pa} = 12,5 \text{ Pa}.$$

Es besteht Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Beispiels 2. Die Rohrreibungsbeiwerte unterscheiden sich um ca. 5 % ($\lambda_{\text{Rohr}} = 0,0165$; $\lambda_{\text{Kanal}} = 0,0173$). Der nivellierende Term

$$\sqrt[5]{\frac{\lambda_{\text{Rohr}}}{\lambda_{\text{Kanal}}}} = 0,99 \quad \text{liefert einen vernachlässigbaren Fehler für dieses Beispiel.}$$

Fazit zum gleichwertigen Durchmesser

Bei der Herleitung werden die unterscheiden Rohrreibungsbeiwerte für das Rohr λ_{Rohr} und den Kanal λ_{Kanal} gleichgesetzt, obwohl dies nicht zutreffend ist. Der Fehler ist leider nicht quantifizierbar, sondern ist von Re und der relativen Rauigkeit ε/d_h abhängig. Der hydraulische Durchmesser findet hierbei keine Beachtung.

Der hydraulische Durchmesser wird nur beim Term l/d bzw. l/d_h berücksichtigt.

Der hydraulische Durchmesser besitzt eine höhere Wertigkeit bezüglich der theoretischen Grundlage als der gleichwertige Durchmesser!

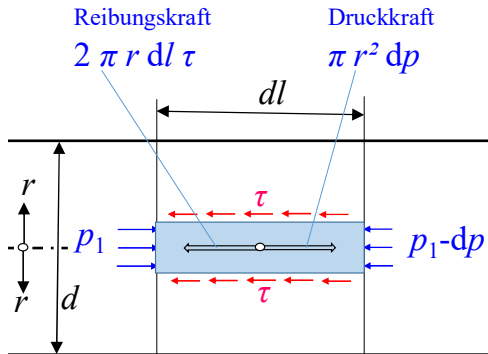
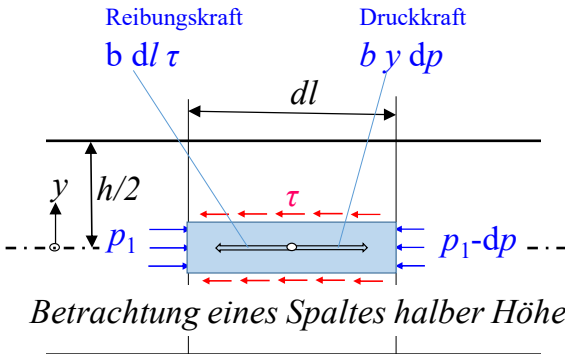
Für praktische Belange ist dennoch der gleichwertige Durchmesser geeignet. Aber beim heutigen Stand der Software zur Berechnung der Druckverluste in Rohr- bzw. Kanalnetzen ist die Verwendung des gleichwertigen Durchmessers überflüssig.

Verwendete Literatur

- [1] GLÜCK, B.: Hydrodynamische und gasdynamische Rohrströmung; Druckverluste (Reihe: Bausteine der Heizungstechnik). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1988, ISBN 3-345-00222-1 <http://berndglueck.de/Druckverluste>
- [2] GLÜCK, B.: Zustands- und Stoffwerte; Verbrennungsrechnung (Reihe: Bausteine der Heizungstechnik). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1986, ISBN 3-345-00228-0; Berlin: Marhold-Verlag 1986; 2. überarbeitete und erweiterte Auflage Berlin: Verlag für Bauwesen 1991, ISBN 3-345-00487-9 <http://berndglueck.de/Stoffwerte>
- [3] BOHL, W.: Technische Strömungslehre. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1984, 6. Auflage

Anhang

**Herleitung des Druckverlustes für das Rohr und den unendlich breiten Spalt
bei laminarer Durchströmung**

Rohr (Durchmesser d) 	Spalt (Höhe h; Breite $b \gg h$)  <i>Betrachtung eines Spaltes halber Höhe</i>
Newtonscher Ansatz: $\tau = -\eta \frac{dw}{dr}$ Kräftegleichgewicht: $2\pi r \, dl \, \tau = \pi r^2 \, dp$ $-2\pi r \, \eta \frac{dw}{dr} = \pi r^2 \frac{dp}{dl} \quad (*)$ DGL der Geschwindigkeitsverteilung: $dw = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) r \, dr$ Integration: $w = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) r^2 + C$ Mit $w = 0$ an der Stelle $r = d/2$ folgen: $C = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \frac{d^2}{4}$ $w = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right)$ $w_{\max} = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \frac{d^2}{4} \equiv C$ Geschwindigkeitsverteilung: $w = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{2r}{d} \right)^2 \right]$	Newtonscher Ansatz: $\tau = -\eta \frac{dw}{dy}$ Kräftegleichgewicht: $b \, dl \, \tau = b \, y \, dp$ $-b \, \eta \frac{dw}{dy} = b \, y \frac{dp}{dl} \quad (**)$ DGL der Geschwindigkeitsverteilung: $dw = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) y \, dy$ Integration: $w = -\frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) y^2 + C$ Mit $w = 0$ an der Stelle $y = h/2$ folgen: $C = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \frac{h^2}{4}$ $w = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ $w_{\max} = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{dp}{dl} \right) \frac{h^2}{4} \equiv C$ Geschwindigkeitsverteilung: $w = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]$

$$\frac{dw}{dr} = -w_{\max} \frac{8r}{d^2}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{w} = \frac{2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} w r \, dr}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

$$\bar{w} = \frac{8}{d^2} w_{\max} \int_0^{d/2} \left[r - \frac{4}{d^2} r^3 \right] dr$$

$$\bar{w} = \frac{8}{d^2} w_{\max} \left[\frac{d^2}{8} - \frac{d^4}{16 d^2} \right]$$

$$\bar{w} = \frac{1}{2} w_{\max}$$

Druckdifferenz durch Integration
der Gl. (*):

$$dp = -2 \eta \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} dl = 16 \eta w_{\max} \frac{1}{d^2} dl$$

$$\int_1^2 dp = 16 \eta w_{\max} \frac{1}{d^2} \int_0^l dl$$

$$p_2 - p_1 = 32 \eta \bar{w} \frac{1}{d^2} l$$

Druckverlust:

$$\Delta p_{\text{Rohr}} = p_1 - p_2 = 32 \frac{l \eta}{d^2} \bar{w}$$

$$\frac{dw}{dy} = -w_{\max} \frac{8y}{h^2}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{w} = \frac{\int_0^{\frac{h}{2}} w \, dy}{\frac{h}{2}}$$

$$\bar{w} = \frac{2}{h} w_{\max} \int_0^{h/2} \left[1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right] dy$$

$$\bar{w} = \frac{2}{h} w_{\max} \left[\frac{h}{2} - \frac{4 h^3}{24 h^2} \right]$$

$$\bar{w} = \frac{2}{3} w_{\max}$$

Druckdifferenz durch Integration
der Gl. (**):

$$dp = -\eta \frac{1}{y} \frac{dw}{dy} dl = 8 \eta w_{\max} \frac{1}{h^2} dl$$

$$\int_1^2 dp = 8 \eta w_{\max} \frac{1}{h^2} \int_0^l dl$$

$$p_2 - p_1 = 12 \eta \bar{w} \frac{1}{h^2} l$$

Druckverlust:

$$\Delta p_{\text{Kanal}} = p_1 - p_2 = 12 \frac{l \eta}{h^2} \bar{w}$$