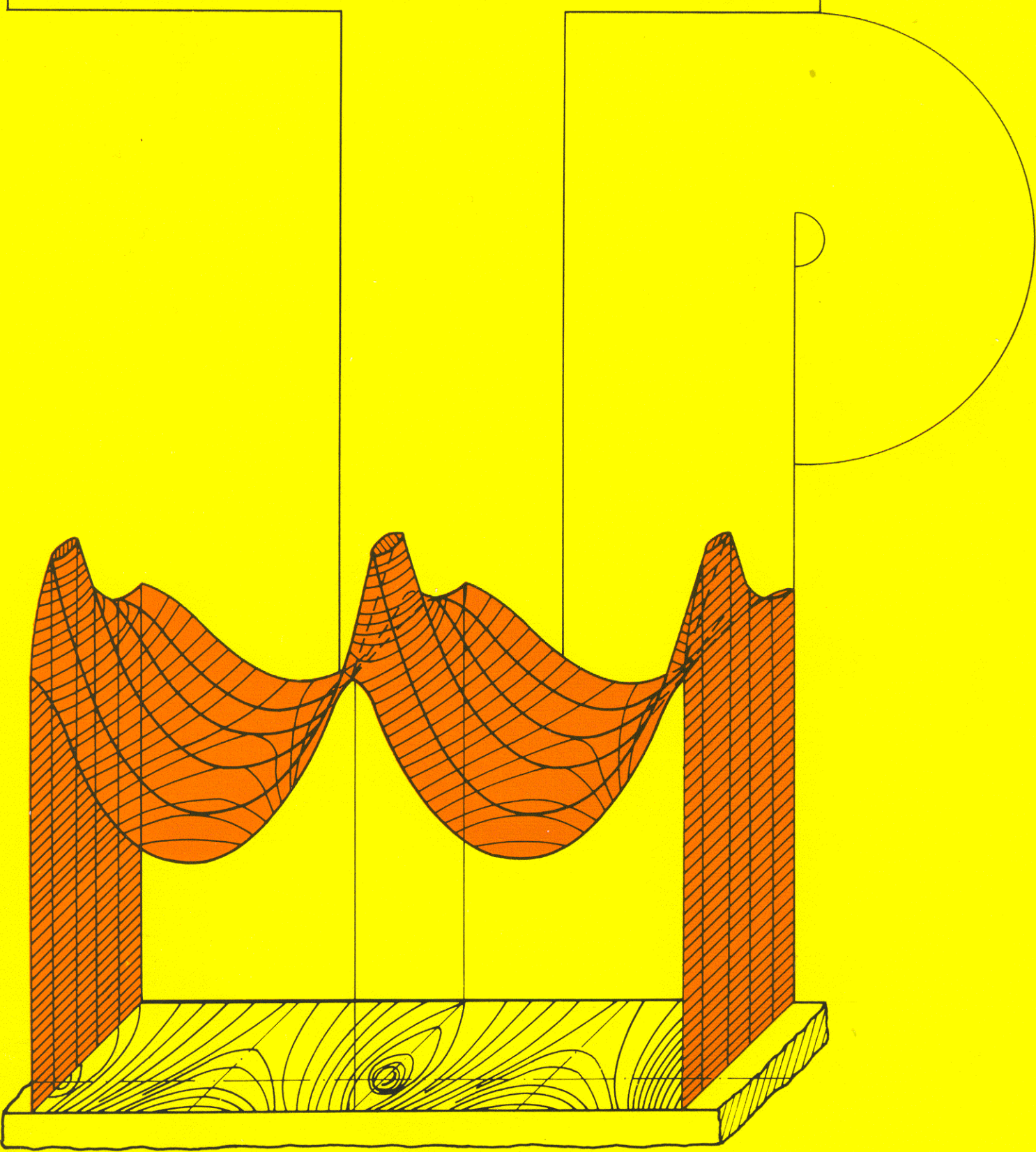


Bernd Glück

Strahlungsheizung- Theorie und Praxis



Strahlungsheizung- Theorie und Praxis

von
Dr. sc. techn. Bernd Glück

Mit einem Abschnitt
WÄRMEPHYSIOLOGIE
von
Dr.-Ing. Klaus Windisch



Verlag C. F. Müller Karlsruhe 1982

Glück, Bernd:

Strahlungsheizung — Theorie und Praxis / von
Bernd Glück. Mit e. Abschn. Wärmephysiologie /
von Klaus Windisch. — Karlsruhe : Müller,
1981.

ISBN 3-7880-7157-5

NE: Windisch, Klaus: Wärmephysiologie

ISBN 3-7880-7157-5

Lektor: Dipl.-Ing. *Barbara Roesler*

© VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1982

Teilaufgabe für Verlag C. F. Müller, Karlsruhe

Gesamtherstellung:

VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg

Printed in GDR

Vorwort

Die stetige Entwicklung der Strahlungsheizungen, vor allem im Bereich der Fußbodenheizung, machten es notwendig, die Technik und Anwendung der Strahlungsheizung dem neuesten technischen und wissenschaftlichen Stand anzupassen. Darüber hinaus war es erforderlich, die Berechnungsverfahren so aufzubauen, daß durch den Einsatz von programmierbaren Taschenrechnern bzw. Tischcomputern der Rechenaufwand minimiert wurde. Auch war es notwendig, die Bedingungen für die Einhaltung der thermischen Behaglichkeit den neuesten internationalen Erkenntnissen anzupassen.

Dr. B. Glück ist es mit dem vorliegenden Werk gelungen, den modernen Erkenntnisstand auf dem Gebiet der Strahlungsheizung umfassend darzustellen.

Die detaillierte Beschreibung der Berechnungsmethoden sowie die dazu angegebenen Rechenprogramme als auch die Vielzahl der Auslegungsdiagramme erleichtern die Berechnung der Strahlungsheizungen. Die Berechnungsverfahren werden ausführlich an praxisnahen Beispielen erläutert.

Das Werk eignet sich sowohl für den Theoretiker als auch für den Praktiker und ist die umfassendste Darstellung auf dem Gebiet der Strahlungsheizungen.

Der Verlag dankt Herrn Dipl.-Ing. S. Hesslinger für die Lektoratsbearbeitung des Werkes.

Karlsruhe, im Juli 1981

Verlag C. F. Müller

Vorwort des Verfassers

Die ersten modernen Strahlungsheizungen wurden kurz nach der Jahrhundertwende gebaut. Über Jahrzehnte hinweg erfolgte die Anwendung hauptsächlich zur Verbesserung der wärmephysiologischen Bedingungen. Seit Mitte der sechziger Jahre ist international eine starke Aufwärtsentwicklung bezüglich der Anzahl ausgeführter Nieder- und Hochtemperatur-Strahlungsheizungen zu verzeichnen. Diese große Verbreitung ist aus energiewirtschaftlicher Sicht mit zwei Aspekten zu begründen:

Mit dem Einsatz von Wärmeenergie niedrigen Temperaturpotentials, wie dies bei der Ausnutzung von Abwärme, der Absenkung der Rücklauftemperaturen von Fernheiznetzen, dem Einsatz von Wärmepumpen oder der zur Zeit üblichen Nutzung von Sonnenenergie auftritt, müssen Niedertemperatur-Heizungssysteme — beispielsweise in Form von Flächenheizungen — Anwendung finden.

Zwecks direkter Einsparung von Wärmeenergie in Großräumen werden mit Erfolg Hochtemperatur-Strahlungsheizungen gebaut. Die Einsparungen entstehen durch Umwandlung der elektromagnetischen Wellen in Wärme unmittelbar im Aufenthaltsbereich

des Menschen. Dadurch bildet sich gegenüber der traditionellen Konvektionsheizung ein geringerer Lufttemperaturgradient über die Hallenhöhe aus, wodurch der Wärmestrom nach außen sinkt.

Da der Strahlungsheizung in der Praxis immer noch das Attribut aufwendiger und komplizierter Bemessung anhaftet, wurde der Versuch unternommen, Unterlagen zur rationellen Bemessung bereitzustellen. Ausgehend von den Grundlagen, die der Nestor der Strahlungsheizung, Dr.-Ing. A. KOLLMAR, geschaffen hat, und bezugnehmend auf den gegenwärtigen Erkenntnisstand der Berechnung von Strahlungsheizungen, wurden Algorithmen, Rechenprogramme und Diagrammsysteme erarbeitet, die eine exakte Bemessung ermöglichen. Weiterhin kann der Projektant für eine große Anzahl feinabgestufter Parameter die wärmetechnischen Ergebnisse für die verschiedensten Heizflächen direkt aus umfangreichem Tabellen- und Diagrammaterial ablesen. Anhand dieser sofort nutzbaren Unterlagen sind auch Wirtschaftlichkeitsvergleiche, Materialeinsatzoptimierungen, das Aufstellen von Temperaturfahrkurven u. a. m. auf einfachste Art durchführbar. Damit ist die Bemessung von Strahlungsheizungen mit relativ geringem Aufwand möglich, ohne daß die Genauigkeit darunter leidet.

Alle vorgestellten Berechnungsverfahren sind an praxisnahen Beispielen erläutert, und für die komplexe Bemessung von Strahlungsheizungen stehen Rezeptlösungen zur Verfügung. Zur Vereinfachung erfolgte dabei eine Vereinheitlichung der Lösungswege. So wurde beispielsweise die Bemessung von Strahlungsheizungen mit Infrarotstrahlern dem für Strahlplatten entgegen der bisherigen Praxis vollkommen angepaßt. Um die Durchgängigkeit der Berechnungen zu wahren, sind offene Probleme — wie zum Beispiel die Heizflächenanordnung, die einer verallgemeinerungsfähigen theoretischen Lösung noch bedürfen, vorläufig durch praktikable Näherungen geklärt worden.

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e. h. Á. MACSKÁSY zu gedenken, der durch seine Vorlesungen an der Technischen Universität Dresden im Jahre 1965 die Grundlagen der Strahlungsheizung lehrte, zahlreiche Impulse für die Weiterentwicklung der Theorie gab und mein Interesse für diese Fachdisziplin weckte.

Besonderer Dank gebührt Herrn Dr.-Ing. K. WINDISCH, der die komplette Bearbeitung des Abschnittes „Wärmephysiologie“ übernahm. Er bereitete die aktuellen, internationalen Erkenntnisse dieses Wissenschaftsgebietes hinsichtlich der Bemessung von Strahlungsheizungen in völlig neuartiger Form auf.

Mein Dank gilt auch den Herren Prof. Dr.-Ing. habil. G. KRAFT, Dr.-Ing. W. PFEIFER und Dipl.-Ing. S. HESSLINGER, die wertvolle Hinweise gaben und das Erscheinen des Titels befürworteten.

Abschließend sei den Mitarbeitern des Institutes und des Organisations- und Rechenzentrums beim VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung, die die Herausgabe des Buches unterstützten, sowie dem Verlag für die gegebene Anregung zur vorliegenden Monographie und für das gezeigte Entgegenkommen bei der Gestaltung gedankt.

Bernd Glück

Inhaltsverzeichnis

1.	Grundlagen der Wärmeübertragung .	10
1.1.	Strahlung	10
1.1.1.	Plancksches Strahlungsgesetz	10
1.1.2.	Wiensches Verschiebungsgesetz	10
1.1.3.	Stefan-Boltzmannsches Gesetz	11
1.1.4.	Lambertsches Kosinusetz	11
1.1.5.	Absorption, Reflexion und Durchlässigkeit	12
1.1.6.	Emission	13
1.1.7.	Kirchhoffsches Gesetz	14
1.1.8.	Strahlungsaustausch zwischen parallelen Platten	15
1.1.9.	Strahlungsaustausch zwischen Körpern und deren Umhüllungen	16
1.1.10.	Strahlungsaustausch zwischen einem Flächenelement und einer Fläche beliebiger Lage	17
1.1.11.	Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen beliebiger Lage	18
1.1.12.	Strahlungsaustausch zwischen einem kugelförmigen Element und einer Fläche	18
1.1.13.	Strahlungsaustausch zwischen einem Gasvolumen und einer Oberfläche	19
1.1.14.	Definition des Temperaturfaktors und des Wärmeübergangskoeffizienten	20
1.1.15.	Strahlungstemperatur der Umgebung	21
1.2.	Konvektion	22
1.2.1.	Strömungsformen und Grenzschichten	22
1.2.2.	Mittlere Geschwindigkeit und mittlere Medientemperatur	23
1.2.3.	Bezugstemperatur und charakteristische Abmessung	23
1.2.4.	Definitionsgleichung und Methoden zur Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten	24
1.2.5.	Wärmeübergangskoeffizient bei freier Konvektion	24
1.2.6.	Wärmeübergangskoeffizient bei erzwungener Konvektion	27
1.3.	Wärmeleitung	28
1.3.1.	Temperaturfeld und Fouriersches Gesetz	28
1.3.2.	Randbedingungen	29
1.3.3.	Wärmeleitung in einer ebenen Wand	30
1.3.4.	Wärmeleitung in einer zylindrischen Wand	31
1.3.5.	Wärmeleitung in einer unregelmäßig berandeten Wand	32
1.3.6.	Wärmeleitung in einer ebenen Wand, die aus unterschiedlichen Schichten parallel zum Wärmestrom besteht	32
1.4.	Wärmedurchgang	32
1.4.1.	Definitionsgleichung	33
1.4.2.	Spezielle Wärmedurchgangskoeffizienten	33
1.4.3.	Teilwärmedurchgangskoeffizienten	34

2.	Wärmeabgabe von Massivplatten mit eingelegten Rohrregistern	36
2.1.	Allgemeines	36
2.2.	Eindimensionale Wärmeleitung in gerader Richtung	36
2.2.1.	Ableitung der Temperaturverteilung bei gleichen Umgebungstemperaturen	36
2.2.2.	Praktische Anwendung auf Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen	38
2.2.3.	Beispiel	38
2.2.4.	Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen	40
2.2.5.	Praktische Anwendung auf Platten bei ungleichen Umgebungstemperaturen	41
2.2.6.	Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen und ungleichen Rippenfußtemperaturen	41
2.2.7.	Beispiel	42
2.2.8.	Ableitung der Temperaturverteilung in Platten bei eingelegten Einzelrohren	43
2.2.9.	Randwärmeabgabe	44
2.2.10.	Beispiel	46
2.2.11.	Vereinfachte Berechnung mit Hilfe von Diagrammen	48
2.2.12.	Anwendungsbeispiel	51
2.3.	Eindimensionale Wärmeleitung in gekrümmter Richtung	55
2.4.	Eindimensionale, radiale Wärmeleitung in Kreisringen	56
2.4.1.	Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleicher Umgebungstemperatur	56
2.4.2.	Praktische Anwendung auf Platten bei ungleicher Umgebungstemperatur	58
2.4.3.	Randwärmeabgabe	59
2.4.4.	Beispiel	60
2.5.	Zweidimensionale Wärmeleitung in parallel berandeten Platten	63
2.5.1.	Ableitung der Temperaturverteilung in einschichtigen Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen	63
2.5.2.	Beispiel	69
2.5.3.	Ableitung der Temperaturverteilung in mehrschichtigen Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen	71
2.5.4.	Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen	72
2.5.5.	Beispiel	74
2.5.6.	Vereinfachte Berechnung mit Hilfe von Näherungen und Diagrammen	75
2.5.7.	Anwendungsbeispiel	79
2.6.	Zweidimensionale Wärmeleitung in einseitig, geradlinig berandeten unendlich dicken Platten	82
2.6.1.	Mittlere Temperaturen und Wärmeströme bei einschichtigen Platten	82
2.6.2.	Mittlere Temperaturen und Wärmeströme bei mehrschichtigen Platten	83

2.6.3.	Berücksichtigung realer Verhältnisse bei auf dem Erdreich liegenden Heiz- platten	84	3.5.	Rechenprogramm für eine elektronische Datenverarbeitungsanlage	269
2.6.4.	Beispiel	85	3.5.1.	Eingabewerte	269
2.7.	Zusammenhang zwischen Wassertempe- ratur und äußerer Rohroberflächen- temperatur	86	3.5.2.	Algorithmus	271
2.7.1.	Beispiel	87	3.5.3.	Ausgabewerte	271
2.8.	Rechenprogramm für eine elektronische Datenverarbeitungsanlage	87	3.6.	Ergebnisse berechneter Lamellen- elemente	275
2.8.1.	Eingabewerte	87	3.6.1.	Beispiele	275
2.8.2.	Algorithmus	88	3.6.2.	Ergebnisse spezieller Strahlplatten	280
2.8.3.	Ausgabewerte	94			
2.8.4.	Anwendungsbeispiele	97	4.	Wärmeabgabe von Infrarotstrahlern .	282
2.9.	Anwendungsgrenzen	102	4.1.	Allgemeines	282
2.10.	Ergebnisse berechneter Massivlamellen	103	4.2.	Wirkung von Reflektoren	283
2.10.1.	Darstellung der bearbeiteten Varianten	103	4.2.1.	Gütegrad	283
2.10.2.	Anwendungsmöglichkeiten und Beispiele	104	4.2.2.	Ermittlung von Strahlungsverteilungen	283
2.10.3.	Tabellen und deren Handhabung	106	4.2.3.	Beispiel	285
3.	Wärmeabgabe von Lamellen- elementen und Strahlplatten	239	4.3.	Ermittlung der Gesamtstrahlungsenergie	286
3.1.	Allgemeines	239	4.3.1.	Rechnerisches Verfahren	286
3.2.	Ableitung der Rippenfußtemperatur	239	4.3.2.	Zeichnerisches Verfahren	286
3.2.1.	Rippenfußtemperatur bei form- und kraftschlüssiger Verbindung	239	4.3.3.	Gesamtstrahlung und getauschte Wärme- menge	287
3.2.2.	Beispiel	242	4.3.4.	Beispiel	287
3.2.3.	Rippenfußtemperatur bei stoffschlüssiger Verbindung	244	4.4.	Praktische Verteilungskurven und mög- liche Näherungen für Infrarotstrahler mit flachen Reflektoren	288
3.2.3.1.	Heizrohr ist außerhalb der Schweißnaht adiabat gedämmt	246	4.4.1.	Reale Strahlungskurven	288
3.2.3.2.	Beispiel	248	4.4.2.	Angenäherte Strahlungskurven	288
3.2.3.3.	Heizrohr gibt auch außerhalb der Schweißnaht Wärme ab	250	4.4.3.	Oberflächentemperatur der Glühkörper und fiktive Temperatur des Strahlers	289
3.2.3.4.	Beispiel	252	4.4.4.	Beispiel	289
3.3.	Ableitung der Temperaturverteilung in der Lamelle	253	5.	Einstrahlzahlen	290
3.3.1.	Temperaturverteilung in homogenen Lamellen	253	5.1.	Definition	290
3.3.2.	Beispiel	254	5.2.	Grafische Ermittlung von Einstrahl- zahlen	291
3.3.3.	Temperaturverteilung in heterogenen Lamellen	255	5.2.1.	Ableitung	291
3.3.3.1.	Massivlamellen mit fest eingestrichter Blechlamelle	255	5.2.2.	Beispiel	292
3.3.3.2.	Beispiel	257	5.3.	Analytische Ermittlung von Einstrahl- zahlen	293
3.3.3.3.	Massivlamelle mit aufliegender Blech- lamelle	258	5.3.1.	Ableitung	293
3.3.3.4.	Beispiel	262	5.3.2.	Beispiele	293
3.4.	Praktische Berechnung der Gesamt- wärmeabgabe	263	5.3.3.	Standardlösungen und deren Hand- habung	296
3.4.1.	Verfahrensmöglichkeiten	263	5.3.3.1.	Einstrahlzahlen von Flächenelementen auf Flächen	296
3.4.2.	Wärmetechnische Näherungen bei der Kombination der Konstruktionselemente	264	5.3.3.2.	Einstrahlzahlen von streifenförmigen Flächenelementen auf Flächen	297
3.4.3.	Anwendungsbeispiel	265	5.3.3.3.	Einstrahlzahlen von kugelförmigen Ele- menten auf Flächen	298
			5.3.3.4.	Einstrahlzahlen von Flächen auf Flächen	299
			5.3.3.5.	Handhabung der Standardlösungen	303
			5.3.4.	Beispiel	305
			5.4.	Numerische Ermittlung von Einstrahl- zahlen	306

5.4.1.	Mathematisches Modell des Strahlungsaustausches	306	6.3.2.3.	Vorhandene Empfindungstemperatur und ihre Messung	369
5.4.2.	Mathematische Formulierung der Flächenbegrenzungen	307	6.3.2.4.	Grenzen des Unterschiedes zwischen Luft- und Umgebungstemperatur . . .	371
5.4.3.	Mathematisches Modell schatten-erzeugender Bauteile	308	6.4.	Partikuläre Behaglichkeitskriterien bei Strahlungsheizungen	371
5.4.4.	Mathematisches Modell spezieller Strahlungsflächen	309	6.4.1.	Zulässige Fußbodentemperaturen . . .	371
5.4.4.1.	Flächenelement und kugelförmiges Element	309	6.4.2.	Zulässige Deckentemperaturen	372
5.4.4.2.	Fläche 2. Ordnung	310	7.	Wärmebedarf und Anordnung der Heizflächen	376
5.4.4.3.	Ebene	310	7.1.	Wärmebilanzsystem eines Raumes . . .	377
5.4.4.4.	Kreiszyylinder	311	7.1.1.	Tatsächlicher Wärmebedarf	377
5.4.4.5.	Elliptischer Zylinder	311	7.1.2.	Beispiel	380
5.4.4.6.	Kugel	312	7.1.3.	Fiktiver Wärmebedarf	387
5.4.5.	Rechenprogramm für eine elektronische Datenverarbeitungsanlage	312	7.1.4.	Beispiel	389
5.4.5.1.	Eingabewerte	312	7.1.5.	Standardisierter Wärmebedarf	390
5.4.5.2.	Algorithmus	316	7.1.5.1.	Vorschlag für Räume des Wohnungs- und Gesellschaftsbau	390
5.4.5.3.	Ausgabewerte	322	7.1.5.2.	Beispiel	394
5.4.5.4.	Anwendungsbeispiele	322	7.1.5.3.	Vorschlag für Hallenbauten	394
5.5.	Ergebnisse berechneter Einstrahlzahlen	323	7.1.5.4.	Merkmale der genormten Berechnungen	395
5.5.1.	Einstrahlzahlen von Flächenelementen auf Flächen	325	7.2.	Anordnung der Heizflächen	396
5.5.2.	Einstrahlzahlen von streifenförmigen Flächenelementen auf Flächen	337	7.2.1.	Wand-, Decken- und Fußbodenheizungen in Wohnungs- und Gesellschaftsbauten	396
5.5.3.	Einstrahlzahlen von kugelförmigen Flächenelementen auf Flächen	338	7.2.1.1.	Darstellung der Einflüsse an einem speziellen Beispiel	396
5.5.4.	Einstrahlzahlen von Flächen auf Flächen	349	7.2.1.2.	Schlußfolgernde Hinweise zur Heizflächenanordnung	402
5.5.5.	Anwendungsbeispiele	351	7.2.2.	Strahlplattenheizung in Hallenbauten .	402
6.	Wärmephysiologie in strahlungsbeheizten Räumen . . .	352	7.2.2.1.	Darstellung der Einflüsse an einem speziellen Beispiel	402
6.1.	Thermische Behaglichkeit	352	7.2.2.2.	Einstrahlzahlen von kugelförmigen Elementen auf Strahlplattenbänder . .	403
6.1.1.	Allgemeines	352	7.2.2.3.	Einstrahlzahlen von kugelförmigen Elementen auf die Gesamtheit der Strahlplattenbänder einer Halle	408
6.1.2.	Qualitative und quantitative Formulierung der thermischen Behaglichkeit . .	352	7.2.2.4.	Lage der Strahlplatten zur optimalen Realisierung der praktischen Forderungen	410
6.1.3.	Bedeutung der Einhaltung der thermischen Behaglichkeit	354	7.2.2.5.	Einfluß der Strahlplattenverteilung auf die Strahlungstemperatur	414
6.2.	Wärmebildung und Wärmeabgabe des Menschen	354	7.2.2.6.	Anordnung der Strahlplatten in Abhängigkeit von den nach außen fließenden Wärmeströmen	415
6.2.1.	„Wärmeproduktion“ des Menschen . .	354	7.2.2.7.	Annahmen für die Strahlungstemperatur	416
6.2.2.	Wärmeabgabe des Menschen	355	7.2.2.8.	Schlußfolgernde Hinweise zur Heizflächenanordnung	417
6.2.2.1.	Wärmeabgabe bei der Atmung	356	7.2.3.	Infrarotheizung in Hallenbauten . . .	418
6.2.2.2.	Wärmeabgabe durch insensible Transpiration	356	7.2.3.1.	Einstrahlzahlen von kugelförmigen Elementen auf Infrarotstrahler	418
6.2.2.3.	Wärmeabgabe durch sensible Schweißverdunstung	357	7.2.3.2.	Ermittlung der Strahlungstemperatur .	421
6.2.2.4.	Wärmeabgabe durch Konvektion . . .	357	7.2.3.3.	Schlußfolgernde Hinweise zur Strahleranordnung	422
6.2.2.5.	Wärmeabgabe durch Strahlung	358	8.	Aufbau und Fertigung von Heizelementen	423
6.2.2.6.	Wärmetransport durch die Kleidung .	362	8.1.	Technische Ausführung von Massiv- elementen mit Rohrregistern	423
6.2.2.7.	Die trockene Wärmeabgabe des Menschen	363			
6.3.	Bedingungen für die Einhaltung der thermischen Behaglichkeit	364			
6.3.1.	Behaglichkeitsgleichung nach FANGER .	364			
6.3.2.	Empfindungstemperatur	365			
6.3.2.1.	Behagliche Oberflächentemperatur des Menschen	366			
6.3.2.2.	Behagliche Empfindungstemperatur . .	367			

8.1.1.	Registerausführung	423	10.3.2.	Hallen mit mechanischer Lüftung	460
8.1.2.	Ausführung der Rohreinbettung	424	10.3.3.	Hallentore	460
8.1.2.1.	Putz mit eingebetteten Rohrregistern	425	10.4.	Besonderheiten beim Einsatz von Gas-Infrarotstrahlern	461
8.1.2.2.	Beton mit eingebetteten Rohrregistern	426			
8.2.	Technische Ausführung von Lamellenelementen mit Rohrregistern	427	11.	Spezielle Strahlungsheizungen	462
8.3.	Technische Ausführung von Stahlstrahlplatten mit Rohrregistern	428	11.1.	Arbeitsplatz- und Freiflächenbeheizung	462
8.4.	Technische Ausführung von Infrarotstrahlern	431	11.1.1.	Berechnungsmodell	462
8.4.1.	Gasstrahler	431	11.1.2.	Beispiel	464
8.4.2.	Elektrostrahler	432	11.2.	Flächenheizung bei Aggregatzustandsänderung des angrenzenden Fluids	465
9.	Regelungsverhalten	432	11.2.1.	Berechnungsmodell	465
9.1.	Stationäres Regelungsverhalten	433	11.2.2.	Beispiele	467
9.1.1.	Belastungsgrad	433	11.3.	Flächenheizungen mit elektrischen Heizkabeln	468
9.1.2.	Anlagen mit Heizflächen konstanter Wärmeleistung	433	11.3.1.	Beispiel	468
9.1.2.1.	Beispiel	434	12.	Komplexbeispiele	469
9.1.3.	Anlagen mit gleitender Fahrweise	434	12.1.	Kombinierte Fußboden-Decken-Heizung in einem Gesellschaftsbau	469
9.1.3.1.	Heizflächenexponent	434	12.2.	Strahlplattenheizung in einer Industriehalle	473
9.1.3.2.	Theoretische Temperaturkurven	435	12.3.	Infrarotstrahlung in einer Industriehalle	480
9.1.3.3.	Praktische Temperaturkurven	439			
9.1.3.4.	Beispiel	440	13.	Anhang	484
9.1.3.5.	Besonderheiten bei Reihenschaltung von Heizflächen	440	14.	Literaturverzeichnis	503
9.1.3.6.	Beispiel	442	15.	Namen- und Sachwörterverzeichnis	505
9.2.	Instationäres Regelungsverhalten	442			
9.2.1.	Speicherverhalten	442			
9.2.1.1.	Gespeicherte Wärmeenergie im Heizelement	443			
9.2.1.2.	Beispiel	444			
9.2.1.3.	Gespeicherte Wärmeenergie im bestrahlten Erdreich	444			
9.2.1.4.	Beispiel	445			
9.2.2.	Lastanpassung durch Selbstregulierungseffekt	446			
9.2.2.1.	Beispiel	447			
9.2.3.	Temperaturdynamik eines Raumes	447			
9.2.3.1.	Beispiel	449			
10.	Systemgestaltung	451			
10.1.	Wärmebereitstellungssysteme	451			
10.1.1.	Kesselanlage	451			
10.1.2.	Fernwärmebereitstellung	452			
10.1.3.	Niedertemperatur-Energiequellen	453			
10.2.	Abnehmersysteme	453			
10.2.1.	Schaltung der Heizelemente zur Gewährleistung turbulenter Rohrströmung	453			
10.2.2.	Beispiele	454			
10.2.3.	Systemwahl und Systemgröße	455			
10.2.4.	Gestaltung der Stromkreise	457			
10.3.	Beeinflussung der Strahlungsheizung durch die Gebäudelüftung	460			
10.3.1.	Hallen mit natürlicher Lüftung	460			

2. Wärmeabgabe von Massivplatten mit eingelegten Rohrregistern

2.1. Allgemeines

Im Jahre 1937 veröffentlichte KALOUS ein Berechnungsverfahren für die Wärmeabgabe von Heizdecken. Er arbeitete mit der Theorie für die Wärmeleitung in einer Rippe. Dieses Problem war wärmetechnisch schon lange vorher gelöst worden. Im Buch von KOLLMAR/HEID bzw. KOLLMAR/LIESE steht die KALOUSSche Theorie im Vordergrund. Es wurden lediglich einige geringfügige Änderungen angebracht, die sich jedoch nur auf die Idealisierung des praktischen Problems bezogen. Auf diese Unterschiede wird an den entsprechenden Stellen noch verwiesen.

In Schweden wurde 1937, also zu der Zeit, in der KALOUS seine Arbeit veröffentlichte, von FAXÉN eine Berechnungsmethode angegeben, die die zweidimensionale Wärmeleitung zugrunde legte. Im Jahre 1955 wurde diese Veröffentlichung wieder aufgegriffen und für den praktischen Gebrauch von RYDBERG/HUBER ausgearbeitet. Die Anwendungsmöglichkeit des theoretischen Algorithmus ist dabei auf weitere spezielle Fälle erweitert worden. Erst in den letzten Jahren hat sich ein Sonderfall des Verfahrens in der deutschsprachigen Literatur eingeführt.

In Deutschland veröffentlichten 1947 NUSSELT und in Fortführung 1951 LÜCK eine Lösung ebenfalls auf der Grundlage der zweidimensionalen Wärmeleitung. Leider ist dieses Verfahren in der gegebenen Form für den Praktiker nicht anwendbar.

Die verstärkte Anwendung der Flächenstrahlungsheizung in der Sowjetunion führte zu weitergehenden theoretischen Lösungswegen. So veröffentlichte KOPKO 1975 ein Verfahren zur dreidimensionalen Berechnung der Wärmeabgabe von Heizplatten aus Beton. Es handelt sich dabei um ein numerisches Verfahren, welches den Einsatz elektronischer Datenverarbeitungsanlagen bedingt.

Der konstruktive Aufbau und die Fertigungsprinzipien von Massivelementen, die mit beheizbaren Rohrregistern bestückt sind, werden im Abschnitt 8.1. ausführlich behandelt.

2.2. Eindimensionale Wärmeleitung in gerader Richtung

2.2.1. Ableitung der Temperaturverteilung bei gleichen Umgebungstemperaturen

Bild 2.2.-1 zeigt den Längsschnitt durch eine Rippe konstanter Dicke δ mit beiderseits gleicher Übertemperatur ϑ_0 . Der Abstand zwischen den beiden Rippenfußflächen beträgt l . Der qualitative Temperaturverlauf längs der Rippe $\vartheta = \vartheta(x)$ ist ebenfalls im Bild dargestellt. An der Stelle x wurde ein infinitesimales Element der Länge dx und der Querschnittsfläche $A = b \cdot \delta$ herausgegriffen.

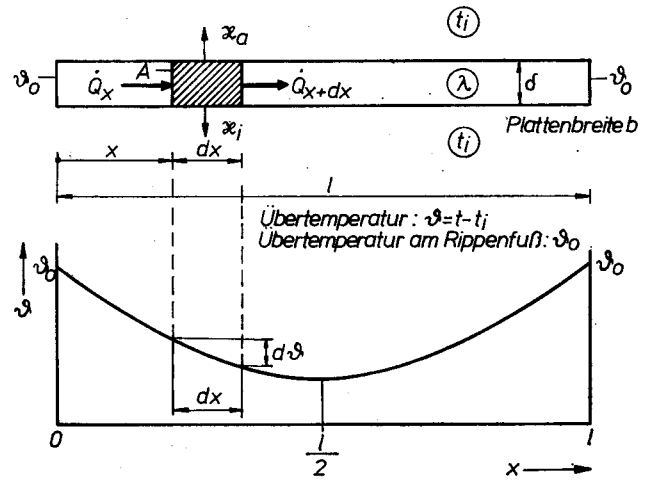


Bild 2.2.-1
Schematische Darstellung der thermodynamischen Verhältnisse in einer massiven Rippe mit gleichen Übertemperaturen am Fuß und gleichen Umgebungstemperaturen

Es treten folgende Wärmeströme auf:

eintretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{d\vartheta}{dx} \quad (2.2.-1)$$

austretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) \quad (2.2.-2)$$

Wärmestrom an Umgebung

$$d\dot{Q} = (\alpha_a + \alpha_i) \vartheta b dx. \quad (2.2.-3)$$

Weiterhin gilt die Wärmebilanz

$$d\dot{Q} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}, \quad (2.2.-4)$$

die durch Substitution der Gln. (2.2.-1) bis (2.2.-3) die Form

$$(\alpha_a + \alpha_i) \vartheta b = \lambda A \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \quad (2.2.-5)$$

annimmt. Die Teilwärmedurchgangskoeffizienten α_i und α_a werden im Abschnitt 1.4.3. definiert. Das weitere Umformen liefert

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \vartheta \frac{\alpha_a + \alpha_i}{\lambda \delta} = 0. \quad (2.2.-6)$$

Diese Gleichung stellt eine Sonderform der FOURIERschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{q}_E}{\rho c} \quad (2.2.-7)$$

dar. Bei Gl. (2.2.-6) handelt es sich um ein eindimensionales, stationäres Wärmeleitproblem mit einer Wärmesenke. Dabei wird die Wärmeabgabe an die Umgebung mathematisch als fiktive Senke wiedergegeben.

Lösung der Differentialgleichung

Zunächst wird zur Vereinfachung

$$\frac{\kappa_a + \kappa_i}{\lambda \delta} = m^2 \quad (2.2.-8)$$

gesetzt, so daß die Gl. (2.2.-6) die Form

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - m^2 \vartheta = 0 \quad (2.2.-9)$$

annimmt. Mathematisch betrachtet, handelt es sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstantem Koeffizienten, zu deren Lösung der Ansatz

$$\vartheta = e^{\lambda x} \quad (2.2.-10)$$

gewählt wird. Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - m^2 = 0, \quad (2.2.-11)$$

woraus sofort

$$\lambda_1 = m; \quad \lambda_2 = -m \quad (2.2.-12)$$

folgen. Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (2.2.-13)$$

Zur Bestimmung der Konstanten sind die Randbedingungen einzuführen. Dies sind zunächst zwei Randbedingungen 1. Art (vgl. Bild 2.2.-1)

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \vartheta_{x=l} = \vartheta_0. \quad (2.2.-14)$$

In Gl. (2.2.-13) eingesetzt, ergeben sich somit

$$\vartheta_0 = C_1 + C_2 \quad (2.2.-15)$$

$$\vartheta_0 = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml} \quad (2.2.-16)$$

und die Konstanten zu

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{1 - e^{-ml}}{e^{ml} - e^{-ml}} \quad (2.2.-17)$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{e^{ml} - 1}{e^{ml} - e^{-ml}}. \quad (2.2.-18)$$

Werden diese Konstanten in Gl. (2.2.-13) substituiert, so nimmt der Übertemperaturverlauf die Formen

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\sinh [m(l-x)] + \sinh (mx)}{\sinh (ml)} \quad (2.2.-19)$$

bzw. nach weiteren Umformungen

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} \quad (2.2.-20)$$

an. Der Kurvenverlauf ähnelt der sogenannten Kettenlinie, die beispielsweise ein an zwei Punkten befestigter, schwerer Faden annimmt. Siehe auch Fußnote.

Anmerkung:

Die Herleitung der Gl. (2.2.-20) kann vereinfacht werden, wenn statt der angegebenen zweiten Randbedingung Gl. (2.2.-16) eine Symmetriebedingung zur Ermittlung der Konstanten Verwendung findet. Es muß in der Mitte zwischen den beiden Heizflächen — d. h. bei $l/2$ —

$$\frac{d\vartheta}{dx} = C_1 m e^{m \frac{l}{2}} - C_2 m e^{-m \frac{l}{2}} = 0 \quad (2.2.-21)$$

gelten. Zusammen mit Gl. (2.2.-15) ergeben sich die Konstanten dann zu

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{e^{-m \frac{l}{2}}}{e^{m \frac{l}{2}} + e^{-m \frac{l}{2}}} \quad (2.2.-22)$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{e^{m \frac{l}{2}}}{e^{m \frac{l}{2}} + e^{-m \frac{l}{2}}}. \quad (2.2.-23)$$

Diese Werte in Gl. (2.2.-13) substituiert, führt selbstverständlich auch zur Gl. (2.2.-20). Bei den weiteren Betrachtungen wird teilweise auf die hier gezeigte vereinfachte Ableitung zurückgegriffen.

Mittlere Übertemperatur

Aus dem Übertemperaturverlauf längs der Rippe kann über dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die mittlere Übertemperatur der Rippe errechnet werden. Diese ist für die Wärmeabgabe letztlich bestimmend. Es gelten die folgenden Schritte:

Definition der mittleren Übertemperatur

$$\vartheta_m = \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta \, dx \quad (2.2.-24)$$

Einführen des Übertemperaturverlaufs nach Gl. (2.2.-20)

$$\vartheta_m = \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta_0 \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} \, dx \quad (2.2.-25)$$

Integration

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_0}{l \cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} \left[-\frac{\sinh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{m} \right]_0^l \quad (2.2.-26)$$

$$\vartheta_m = \vartheta_0 \frac{\tanh \left(\frac{ml}{2} \right)}{m \frac{l}{2}}. \quad (2.2.-27)$$

2.2.2. Praktische Anwendung auf Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen

Im vorangegangenen Abschnitt sind die theoretischen Temperaturverteilungen bei idealisierten Annahmen abgeleitet worden. Nunmehr müssen praktikable Approximationen festgelegt werden, die den realen Verhältnissen — bei möglichst geringem mathematischem Aufwand — Rechnung tragen. Problematisch ist vor allem die näherungsweise Bestimmung der Rippenfußtemperatur ϑ_o , denn diese Übertemperatur wird selbstverständlich nicht über den gesamten Rippenquerschnitt — wie im Bild 2.2.-1 gezeigt — vorliegen. Infolge der Rohrgeometrie und der den Rohraußendurchmesser d_a überschreitenden Rippendicke δ stellt sich am Rippenfuß eine Temperaturverteilung ein, die qualitativ angenähert im Bild 2.2.-2 (Detail) wiedergegeben ist.

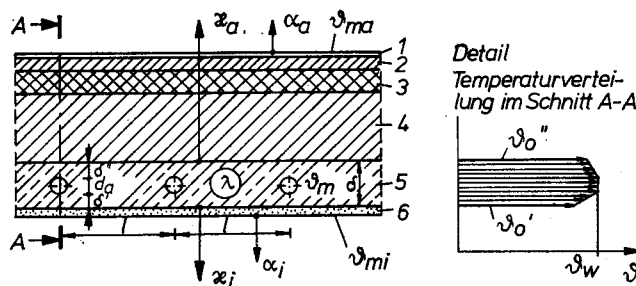


Bild 2.2.-2

Praktischer Aufbau einer Massivdecke und näherungsweise Darstellung des Temperaturverlaufes am Rippenfuß

1 Fußbodenbelag; 2 Estrich; 3 Dämmung; 4 Stahlbetonrippendecke mit Füllkörpern; 5 Stahlbeton mit Heizrohren; 6 Putz

Dabei wird über dem Rohrquerschnitt die konstante Rohrübertemperatur ϑ_w und nach den Rippenbegrenzungen hin ein linearer Temperaturabfall auf die Werte ϑ_o' und ϑ_o'' entsprechend einem rechtwinklig zur Rippenachse ungestört verlaufenden Wärmedurchgang angenommen. Die mittlere Rippenfußtemperatur ergibt sich mit den im Bild (2.2.-2) eingetragenen Werten zu

$$\vartheta_o = \frac{1}{\delta} \left[\frac{\vartheta_o' + \vartheta_w}{2} \delta' + \frac{\vartheta_o'' + \vartheta_w}{2} \delta'' + \vartheta_w d_a \right]. \quad (2.2.-28)$$

Der Zusammenhang zwischen der Rohrübertemperatur ϑ_w und der Übertemperatur des Wassers wird im Abschnitt 2.7. dargelegt. Weiterhin betragen die Temperaturgrenzwerte

$$(\vartheta_w - \vartheta_o') \frac{\lambda}{\delta'} = \vartheta_o' \kappa_i \rightarrow \vartheta_o' = \frac{\vartheta_w \lambda}{\kappa_i \delta' + \lambda} \quad (2.2.-29)$$

$$(\vartheta_w - \vartheta_o'') \frac{\lambda}{\delta''} = \vartheta_o'' \kappa_a \rightarrow \vartheta_o'' = \frac{\vartheta_w \lambda}{\kappa_a \delta'' + \lambda}, \quad (2.2.-30)$$

die, in Gl. (2.2.-28) eingesetzt, schließlich die mittlere Rippenfußtemperatur

$$\vartheta_o = \frac{\vartheta_w}{2\delta} \left[\frac{1}{\frac{\kappa_i}{\lambda} + \frac{1}{\delta'}} + \frac{1}{\frac{\kappa_a}{\lambda} + \frac{1}{\delta''}} + \delta + d_a \right] \quad (2.2.-31)$$

ergeben. Diese Form der Mittelwertbildung liefert — wie später noch gezeigt wird — eine gute Übereinstimmung zur Berechnung mittels zweidimensionaler Wärmeströmung in den Grenzbereichen. Das vorgestellte Berechnungsverfahren sollte Anwendung finden, wenn die betrachtete „Rippe“ gegenüber den übrigen parallelen Schichten eine bevorzugte Wärmeleitung in Richtung der Rippenachse aufweist und nicht dicker als etwa der dreifache Rohraußendurchmesser ist.

Anmerkung:

Die einzelnen Veröffentlichungen unterscheiden sich vor allem in der Annahme von ϑ_o , δ und l . So rechnete KALOUS mit $\vartheta_o = \vartheta_w$ und der Rippendicke $\delta^* = \delta' + d_a$. KOLLMAR/HEID behielt diese Dicke δ^* bei, setzte aber $\vartheta_o = \zeta \vartheta_w$. Der Korrekturfaktor ζ wurde als Funktion von Rohrabstand, Bewehrung und Wassergeschwindigkeit in den Rohren aufgefaßt und als Empfehlung $\zeta = 0,9$ angegeben. KOLLMAR/LIESE geht dann wieder zu $\vartheta_o = \vartheta_w$ über, setzt als Rippendicke nur den Rohraußendurchmesser $\delta^{**} = d_a$ an und reduziert den Rohrabstand auf das lichte Maß $l^* = l - d_a$. Es wird dann allerdings ϑ_w im Rohrbereich zur Mittelwertbildung von ϑ_m mit herangezogen. MACSKÁSY rechnet mit der gesamten Rippendicke δ , verwendet jedoch ϑ_o' als Übertemperatur am Rippenfuß.

Die mittleren Übertemperaturen an den Außenseiten des Bauteils ergeben sich aus den Wärmebilanzen

$$\dot{q}_a = \alpha_a \vartheta_{ma} = \kappa_a \vartheta_m \quad (2.2.-32)$$

und

$$\dot{q}_i = \alpha_i \vartheta_{mi} = \kappa_i \vartheta_m \quad (2.2.-33)$$

zu

$$\vartheta_{ma} = \frac{\kappa_a}{\alpha_a} \vartheta_m \quad (2.2.-34)$$

bzw.

$$\vartheta_{mi} = \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \vartheta_m. \quad (2.2.-35)$$

Damit sind sowohl die Übertemperaturen als auch die auf die Flächeneinheit bezogenen Wärmeströme bereitgestellt.

2.2.3. Beispiel

Es sind die Temperaturverteilung in einer Decke zu berechnen und die Isothermen aufzuzeichnen. Als Übertemperatur am Rippenfuß ist $\vartheta_o = 25 \text{ K}$ anzunehmen. Der Deckenaufbau entspricht Bild 2.2.-2. Die speziellen Werte sind nachfolgend aufgeführt.

Rippe (Stahlbeton mit Heizrohren):

$$\delta = 0,04 \text{ m} \quad l = 0,30 \text{ m} \quad \lambda = 1,16 \text{ W/m K}$$

Putz:

$$\delta = 0,015 \text{ m} \quad \lambda = 0,90 \text{ W/m K}$$

Stahlbetonrippendecke mit Füllkörpern:

$$\delta = 0,18 \text{ m} \quad \lambda = 0,63 \text{ W/m K}$$

Dämmung (Holzwole-Leichtbauplatte):

$$\delta = 0,015 \text{ m} \quad \lambda = 0,14 \text{ W/m K}$$

Estrich einschließlich Fußbodenbelag:

$$\delta = 0,045 \text{ m} \quad \lambda = 0,70 \text{ W/m K}$$

Wärmeübergangskoeffizienten:

$$\alpha_a = 8,58 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad \alpha_i = 7 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

Die Raumtemperatur beträgt $t_i = 18^\circ\text{C}$. Die Berechnung der Temperaturverteilung hat nach der Theorie der eindimensionalen Wärmeleitung in der Rippe zu erfolgen. Die übrigen Schichten zeichnen sich gemäß Berechnungsannahme nur durch eine senkrechte Wärmeleitung zur Rippenachse aus.

• Lösung

Die Teilwärmedurchgangskoeffizienten berechnen sich zu

$$\frac{1}{\kappa_a} = \left(\frac{0,18}{0,63} + \frac{0,015}{0,14} + \frac{0,045}{0,70} + \frac{1}{8,58} \right) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}}$$

$$\rightarrow \kappa_a = 1,74 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\frac{1}{\kappa_i} = \left(\frac{0,015}{0,90} + \frac{1}{7} \right) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}}$$

$$\rightarrow \kappa_i = 6,27 \text{ W/m}^2 \text{ K},$$

und der charakteristische Wert m beträgt nach Gl. (2.2.-8)

$$m = \sqrt{\frac{1,74 + 6,27}{1,16 \cdot 0,04}} \frac{1}{\text{m}} = 13,14 \text{ m}^{-1}.$$

Damit kann die Übertemperatur längs der Rippe nach Gl. (2.2.-20)

$$\vartheta = 25 \cdot \frac{\cosh \left[13,14 \left(\frac{0,30}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(13,14 \frac{0,30}{2} \right)} \text{ in K}$$

für die laufende Koordinate x in m ausgewertet werden. Die Teilergebnisse lauten

x in m	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15
ϑ in K	25,00	19,53	15,31	12,21	9,95	8,36	7,37	6,84

Um die Verläufe der Übertemperaturen an den Schichtgrenzen bestimmen zu können, sind zunächst die schrittweise reduzierten Teilwärmedurchgangskoeffizienten — im Bild 2.2.-3 veranschaulicht — zu bestimmen. Sie betragen

$$\frac{1}{\kappa'_a} = \left(\frac{0,015}{0,14} + \frac{0,045}{0,70} + \frac{1}{8,58} \right) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}}$$

$$\rightarrow \kappa'_a = 3,47 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\frac{1}{\kappa''_a} = \left(\frac{0,045}{0,70} + \frac{1}{8,58} \right) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}}$$

$$\rightarrow \kappa''_a = 5,53 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\frac{1}{\kappa'''_a} = \frac{1}{\alpha_a} \rightarrow \alpha_a = 8,58 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\frac{1}{\kappa'_i} = \frac{1}{\alpha_i} \rightarrow \alpha_i = 7 \text{ W/m}^2 \text{ K},$$

womit die Übertemperaturen nach den Beziehungen

$$\vartheta'_a = \frac{\kappa_a}{\kappa'_a} \vartheta; \quad \vartheta''_a = \frac{\kappa_a}{\kappa''_a} \vartheta;$$

$$\vartheta'''_a = \frac{\kappa_a}{\alpha_a} \vartheta; \quad \vartheta'_i = \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \vartheta$$

und den in der vorstehenden Tabelle genannten ϑ -Werte berechenbar sind. Im einzelnen ergeben sich

x in m	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15
ϑ'_a in K	12,54	9,79	7,68	6,12	4,99	4,19	3,70	3,43
ϑ''_a in K	7,87	6,15	4,82	3,84	3,13	2,63	2,32	2,15
ϑ'''_a in K	5,07	3,96	3,10	2,48	2,02	1,70	1,49	1,39
ϑ'_i in K	22,39	17,49	13,71	10,94	8,91	7,49	6,60	6,13

Die bildliche Darstellung der Temperaturkurven erfolgte im Bild 2.2.-3. Deutlich sind die Grundsätze der eindimensionalen Wärmeleittheorie erkennbar. So wird in der Rippe also nur eine Wärmeströmung in Richtung der Rippenachse angesetzt. Damit sind alle Temperaturen in einem Querschnitt der Rippe rechtwinklig zu deren Achse gleich, das heißt, die Isothermen verlaufen parallel zu den Heizrohren. Völlig anders ist der Verlauf der Temperaturkurven in den übrigen Schichten. Dort wird nach dem theoretischen Modell nur eine Wärmeströmung rechtwinklig zur Rippe zugelassen. Um dies darzustellen, sind im Bild sogenannte Elementarkanäle von unendlich kleiner Breite auszugsweise eingetragen. Diese Elementarkanäle muß man sich dicht nebeneinanderliegend vorstellen. Sie sind jedoch mit wärmeundurchlässigen seitlichen Begrenzungen behaftet, so daß also eine Wärmeleitung nur in Kanalrichtung möglich ist. Innerhalb der homogenen Schichten nimmt die Temperatur demzufolge linear mit der Längenkoordinate ab. Die Isothermen in den Elementarkanälen sind im Bild eingetragen. Aus der umfassenden Darstellung werden die dem eindimensionalen Verfahren zugrunde liegenden Näherungen besonders deutlich. In Wirklichkeit wird sowohl in der Rippe als auch in den benachbarten Schichten eine zweidimensionale Wärmeleitung vorhanden sein. Die vorliegende Näherung ist um so realistischer, je weniger die Rippendicke den Heizrohrdurchmesser übersteigt, je dünner die übrigen Schichtdicken sind und je größer die Wärmeleitfähigkeit des Rippenmaterials gegenüber der der angrenzenden Materialien ist.

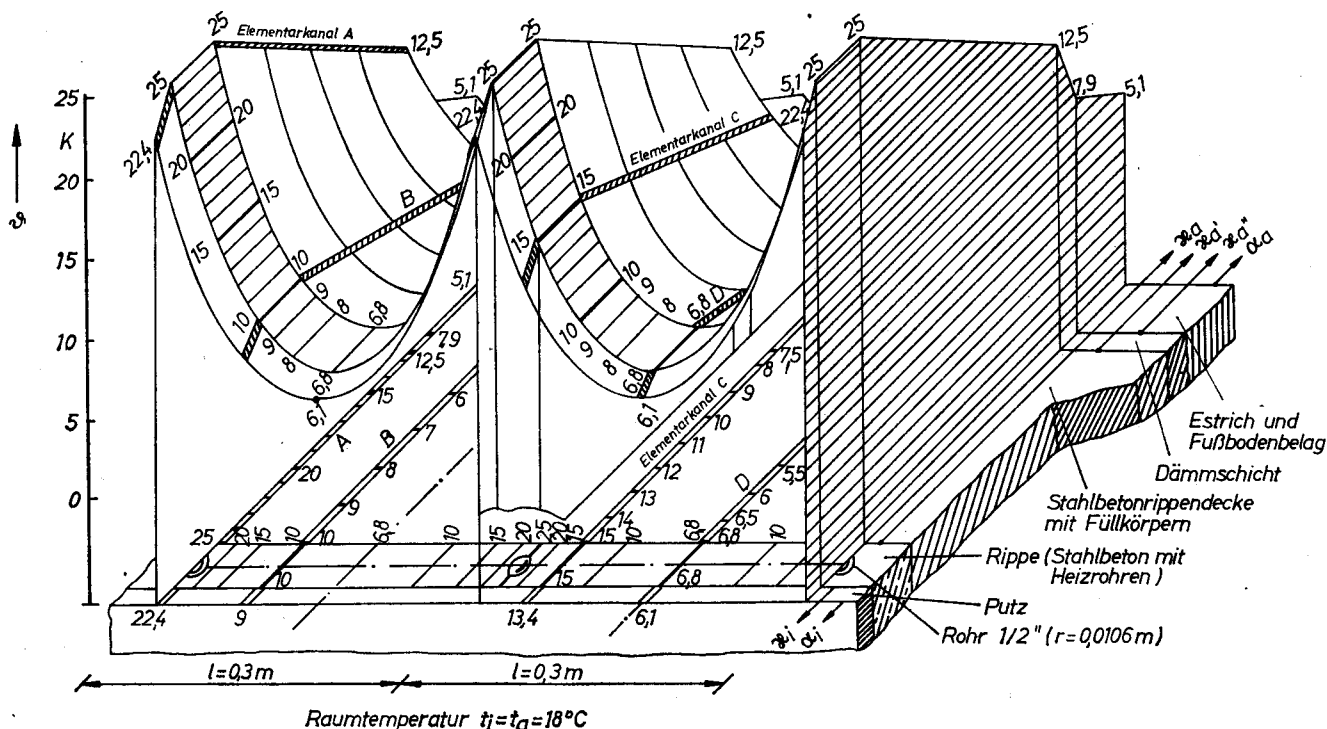


Bild 2.2.-3

Querschnitt einer beheizten Decke und Darstellung des zugehörigen Temperaturverlaufes unter Annahme eindimensionaler Wärmeleitung

2.2.4. Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Bei der Ableitung kann von Bild 2.2.-4 ausgegangen werden. Dieses unterscheidet sich vom Bild 2.2.-1 nur durch die veränderte Umgebungstemperatur t_a . Wegen der teilweisen Analogie kann auf die Differentialgleichung Gl. (2.2.-6) zurückgegriffen werden, wobei lediglich die unterschiedlichen Temperaturdifferenzen (Rippentemperatur — Umgebungstemperatur) zu beachten sind.

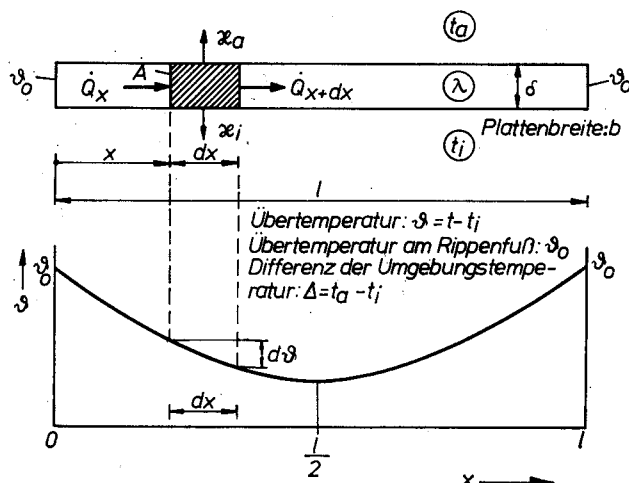


Bild 2.2.-4

Schematische Darstellung der thermodynamischen Verhältnisse in einer massiven Rippe mit gleichen Übertemperaturen am Fuß und ungleichen Umgebungstemperaturen

Die hierfür gültige Differentialgleichung lautet zunächst

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \vartheta \frac{\kappa_1}{\lambda\delta} - \vartheta_a \frac{\kappa_a}{\lambda\delta} = 0 \quad (2.2.-36)$$

mit $\vartheta = t - t_1$ und $\vartheta_a = t - t_a$. Für die Übertemperatur ϑ_a kann auch

$$\vartheta_a = \vartheta + t_1 - t_a = \vartheta - \Delta \quad (2.2.-37)$$

mit

$$\Delta = t_a - t_1 \quad (2.2.-38)$$

geschrieben werden. Damit nimmt Gl. (2.2.-36) die endgültige Form

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \vartheta \frac{\kappa_1 + \kappa_a}{\lambda\delta} = -\Delta \frac{\kappa_a}{\lambda\delta} \quad (2.2.-39)$$

an.

Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung dieser inhomogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstantem Koeffizienten ist schrittweise zu erarbeiten. Dabei kann aus Abschnitt 2.2.1. die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

nach Gl. (2.2.-13) übernommen werden. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung be-

stimmt sich zu

$$\vartheta = \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta, \quad (2.2.-40)$$

so daß zusammenfassend die allgemeine Lösung

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.2.-41)$$

lautet. Zur raschen Bestimmung der Konstanten werden eine Rand- und eine Symmetriebedingung

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\frac{l}{2}} = 0 \quad (2.2.-42)$$

verwendet. Hieraus folgen die Bestimmungsgleichungen

$$\vartheta_0 = C_1 + C_2 + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.2.-43)$$

$$C_1 e^{\frac{m}{2}l} = C_2 e^{-\frac{m}{2}l} \quad (2.2.-44)$$

und nach kurzer Zwischenrechnung die Konstanten

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta}{\frac{e^{\frac{m}{2}l}}{e^{-\frac{m}{2}l}} + 1} \quad (2.2.-45)$$

$$C_2 = \frac{\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta}{1 + \frac{e^{-\frac{m}{2}l}}{e^{\frac{m}{2}l}}} \quad (2.2.-46)$$

Die Substitution in Gl. (2.2.-41) ergibt schrittweise

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_0 & \left[\frac{e^{-\frac{m}{2}l} e^{mx}}{e^{\frac{m}{2}l} + e^{-\frac{m}{2}l}} + \frac{e^{\frac{m}{2}l} e^{-mx}}{e^{\frac{m}{2}l} + e^{-\frac{m}{2}l}} \right] \\ & - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \left[\frac{e^{-\frac{m}{2}l} e^{mx}}{e^{\frac{m}{2}l} + e^{-\frac{m}{2}l}} + \frac{e^{\frac{m}{2}l} e^{-mx}}{e^{\frac{m}{2}l} + e^{-\frac{m}{2}l}} \right] \\ & + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \end{aligned} \quad (2.2.-47)$$

und

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.2.-48)$$

Mittlere Übertemperatur

Die mittlere Übertemperatur ergibt sich analog zu Gl. (2.2.-27)

$$\begin{aligned} \vartheta_m = t_m - t_1 &= \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2} \right)}{m \frac{l}{2}} \\ &+ \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \end{aligned} \quad (2.2.-49)$$

2.2.5. Praktische Anwendung auf Platten bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Problematisch ist wiederum die Festlegung der mittleren Rippenfußtemperatur ϑ_0 . Die Gl. (2.2.-28) kann beibehalten werden, allerdings sind die darin enthaltenen Übertemperaturen stets auf t_1 zu beziehen. Damit gilt Gl. (2.2.-29) uneingeschränkt, während Gl. (2.2.-30) eine Modifikation erfahren muß, so daß

$$(\vartheta_w - \vartheta_0'') \frac{\lambda}{\delta''} = (\vartheta_0'' - \Delta) \kappa_a \rightarrow \vartheta_0'' = \frac{\vartheta_w \frac{\lambda}{\delta''} + \Delta \kappa_a}{\kappa_a + \frac{\lambda}{\delta''}} \quad (2.2.-50)$$

gilt. Die Substitution in Gl. (2.2.-28) liefert dann die interessierende Rippenfußtemperatur

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{\vartheta_w}{2\delta} \left[\frac{1}{\frac{\kappa_1}{\lambda} + \frac{1}{\delta'}} + \frac{1}{\frac{\kappa_a}{\lambda} + \frac{1}{\delta''}} + \delta + d_a \right] \\ &+ \frac{\Delta \delta'^2}{2\delta} \frac{\kappa_a}{\kappa_a \delta'' + \lambda}. \end{aligned} \quad (2.2.-51)$$

Die Wärmeabgaben an die Umgebung berechnen sich nach den Gleichungen

$$\dot{q}_a = \kappa_a (t_m - t_a) = \kappa_a (\vartheta_m - \Delta) = \alpha_a (t_{ma} - t_a) \quad (2.2.-52)$$

$$\dot{q}_i = \kappa_i (t_m - t_i) = \kappa_i \vartheta_m = \alpha_i \vartheta_{mi} = \alpha_i (t_{mi} - t_i), \quad (2.2.-53)$$

wobei die mittleren Temperaturen t_m an den Außenflächen des Bauteils

$$t_{ma} = \frac{\kappa_a}{\alpha_a} (\vartheta_m - \Delta) + t_a \quad (2.2.-54)$$

$$t_{mi} = \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \vartheta_m + t_i \quad (2.2.-55)$$

betragen.

2.2.6. Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen und ungleichen Rippenfußtemperaturen

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Temperatur der Heizrohre stets gleich ist. In Wirklichkeit sind die Rohrregister aus Rohrschlangen so hergestellt, daß sich immer zwei Rohre von ungleicher Temperatur gegenüberliegen. Dies bedeutet, daß sich die Rippenfußtemperaturen unterscheiden. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung — Gl. (2.2.-41) — gilt in vollem Umfang, lediglich die Randbedingungen sind neu zu formulieren. Da keine Symmetrie im Temperaturverlauf vorliegt, gelten die Bedingungen

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \vartheta_{x=l} = \vartheta_0 - \vartheta^*, \quad (2.2.-56)$$

wobei

$$\vartheta^* = t_{0,\text{Rohr1}} - t_{0,\text{Rohr2}} \quad (2.2.-57)$$

gesetzt wurde. Diese Randbedingungen, auf Gl. (2.2.-41) bezogen, ergeben das Gleichungssystem

$$\vartheta_0 = C_1 + C_2 + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.2.-58)$$

$$\vartheta_0 - \vartheta^* = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta, \quad (2.2.-59)$$

aus dem nach Zwischenrechnung die Konstanten

$$C_1 = \frac{\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) (1 - e^{-ml}) - \vartheta^*}{-e^{-ml} + e^{ml}} \quad (2.2.-60)$$

und

$$C_2 = \frac{\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) (1 - e^{ml}) - \vartheta^*}{e^{-ml} - e^{ml}} \quad (2.2.-61)$$

folgen. Die Substitution dieser Konstanten in Gl. (2.2.-41) liefert nach einigen Umrechnungen

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x\right)\right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2}\right)} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta - \vartheta^* \frac{\sinh (mx)}{\sinh (ml)}. \quad (2.2.-62)$$

Der Unterschied zum symmetrischen Temperaturverlauf nach Gl. (2.2.-48) wird durch den letzten Term bewirkt. Er ist Null an der Stelle $x = 0$ und nimmt den Wert $(-\vartheta^*)$ bei $x = l$ an. Weiterhin ist es interessant zu wissen, bei welcher x -Koordinate der asymmetrische Kurvenverlauf sein Minimum hat. An dieser Stelle muß die Tangente an $\vartheta = \vartheta(x)$ den Anstieg Null annehmen. Es gilt

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) m \frac{\sinh \left[m \left(\frac{l}{2} - x\right)\right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2}\right)} - \vartheta^* m \frac{\cosh (mx)}{\sinh (ml)} = 0, \quad (2.2.-63)$$

woraus sich

$$x^0 =$$

$$\frac{1}{m} \operatorname{artanh} \left[\tanh \left(m \frac{l}{2}\right) + \frac{\vartheta^*}{\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) \sinh (ml)} \right] \quad (2.2.-64)$$

berechnet.

Für die praktische Anwendung muß noch die mittlere Rippenübertemperatur bestimmt werden. Die Integration der ersten beiden Summanden in Gl. (2.2.-62) ist von Gl. (2.2.-49) übernehmbar, so daß zunächst

nur noch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta^* \frac{\sinh (mx)}{\sinh (ml)} dx \\ &= \frac{\vartheta^*}{l \sinh (ml)} \frac{1}{m} [\cosh (ml) - 1] \\ &= \frac{\vartheta^*}{ml} \tanh \left(m \frac{l}{2}\right) = \frac{\vartheta^*}{2} \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} \end{aligned} \quad (2.2.-65)$$

berechnet werden müßte. Zusammenfassend ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \vartheta_m = t_m - t_1 &= \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta^*}{2} - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta\right) \\ &\times \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \end{aligned} \quad (2.2.-66)$$

Dies ist ein außerordentlich günstiges Ergebnis von großer Tragweite, denn es besagt im Vergleich zu Gl. (2.2.-49), daß zur Berechnung der mittleren Übertemperatur bei ungleichen Rippenfußtemperaturen genauso vorgegangen werden darf wie bei gleichen Fußtemperaturen, wobei lediglich das arithmetische Mittel der unterschiedlichen Rippenfußtemperaturen zu bilden ist. Dies bedeutet, daß bei den praktischen Bemessungen stets mit einer mittleren Heizmediumtemperatur gerechnet werden kann.

2.2.7. Beispiel

Es ist der Temperaturverlauf in der mit Rohren beheizten Rippe einer Deckenkonstruktion zu ermitteln und aufzuzeichnen. Die Rippenfußtemperaturen betragen $t_{0,\text{Rohr1}} = 50^\circ\text{C}$ und $t_{0,\text{Rohr2}} = 40^\circ\text{C}$. Die Umgebungstemperaturen weisen die Werte $t_1 = 20^\circ\text{C}$ und $t_a = 10^\circ\text{C}$ auf. Für die Stahlbetonrippe gelten weiterhin $\delta = 0,04 \text{ m}$, $l = 0,30 \text{ m}$, $\lambda = 1,16 \text{ W/m K}$. Die Teilwärmedurchgangskoeffizienten betragen:

$$\kappa_a = 1,4 \text{ W/m}^2 \text{ K}, \quad \kappa_1 = 6,3 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

• Lösung

Die Übertemperatur am Rippenfuß (Rohr 1) ergibt sich zu

$$\vartheta_0 = t_{0,\text{Rohr1}} - t_1 = 50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 30 \text{ K}$$

und die Differenz der Rippenfußtemperaturen untereinander nach Gl. (2.2.-57) zu

$$\vartheta^* = 50^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C} = 10 \text{ K}.$$

Schließlich müssen für die weitere Auswertung noch der charakteristische Wert m nach Gl. (2.2.-8)

$$m = \sqrt{\frac{1,4 + 6,3}{1,16 \cdot 0,04}} \frac{1}{m} = 12,88 \text{ m}^{-1}$$

und die Temperaturdifferenz

$$\Delta = 10^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = -10\text{ K}$$

bereitgestellt werden. Nunmehr gilt nach Gl. (2.2.-62)

$$\vartheta = \left(30\text{ K} + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K} \right) \frac{\cosh \left[12,88 \left(\frac{0,30}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(12,88 \frac{0,30}{2} \right)} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K} - 10\text{ K} \frac{\sinh (12,88x)}{\sinh (12,88 \cdot 0,3)}$$

mit den Werten

x in m	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15
ϑ in K	30	22,9	17,7	13,7	10,6	8,4	7,0	5,8

x in m	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
ϑ in K	5,8	6,4	7,6	9,4	12,0	15,3	20

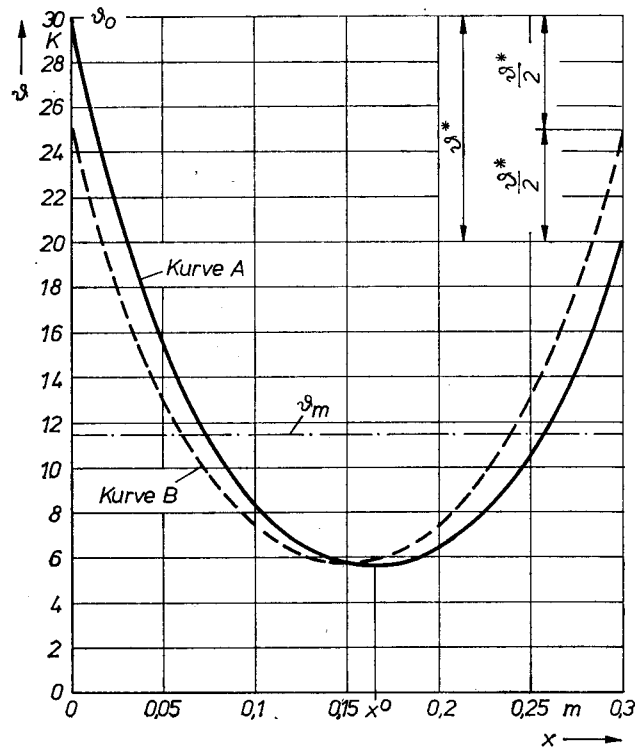


Bild 2.2.-5

Temperaturverlauf in einer massiven Rippe zwischen zwei Heizrohren bei ungleichen Umgebungstemperaturen und ungleichen Rippenfußtemperaturen

Diese Funktion ist im Bild 2.2.-5 aufgezeichnet (Kurve A). Zum Vergleich wird weiterhin die Gl. (2.2.-48) für die gemittelte Rippenfußtemperatur $\vartheta_{0,m} = 25\text{ K}$

$$\vartheta = \left(25\text{ K} + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K} \right) \times \frac{\cosh \left[12,88 \left(\frac{0,30}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(12,88 \frac{0,30}{2} \right)} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K}$$

ausgewertet

x in m	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15
ϑ in K	25	19,1	14,9	11,5	9,1	7,4	6,4	5,8

und als Kurve B in das Bild übertragen.

Die Ortskoordinate, an der die Kurve A ein Minimum hat, bestimmt sich nach Gl. (2.2.-64) zu

$$x^0 = \frac{1}{12,88} \operatorname{artanh} \left[\tanh \left(12,88 \frac{0,30}{2} \right) + \frac{10}{\left(30 + 10 \frac{1,4}{6,3 + 1,4} \right) \sinh (12,88 \cdot 0,30)} \right] \text{ m}$$

$$x^0 = 0,166\text{ m.}$$

Schließlich ergibt sich die mittlere Übertemperatur längs der Rippe nach Gl. (2.2.-66)

$$\vartheta_m = \left(30\text{ K} - \frac{10}{2}\text{ K} + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K} \right) \times \frac{\tanh \left(12,88 \frac{0,30}{2} \right)}{12,88 \frac{0,30}{2}} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10\text{ K}$$

$$\vartheta_m = 11,5\text{ K,}$$

die sowohl für Kurve A als auch für Kurve B gilt.

2.2.8. Ableitung der Temperaturverteilung in Platten bei eingelegten Einzelrohren

Der umfassenderen Darstellung wegen wird gleich von dem allgemeinen Fall der ungleichen Umgebungstemperaturen ausgegangen. Damit ist die Lösung nach Gl. (2.2.-41) verwendbar. Die Randbedingungen lauten

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \vartheta_{x=\infty} = \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \quad (2.2.-67)$$

Die letztere bedarf einer Erklärung. Die Eigenart der eindimensionalen Wärmeleitung in der Rippe führt — wie bereits früher erläutert und im Bild 2.2.-3 auch dargestellt — zu einer konstanten Temperatur über den gesamten Querschnitt senkrecht zur Rippenachse. Damit stellt der Rippenkörper für Wärmeströmungen quer zur Rippe fiktiv keinen Widerstand dar. Somit gilt für die Temperatur in der Rippe bei unendlich großer Entfernung vom Heizrohr infolge des Wärmeflusses durch unterschiedliche Umgebungstemperaturen

$$\vartheta = \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta, \quad (2.2.-68)$$

wobei

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_1}}; \quad \Delta = t_a - t_1; \quad \vartheta = t - t_1$$

und

$$\dot{q} = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \Delta = \kappa_i \cdot \vartheta \quad (2.2.-69)$$

gelten. Setzt man die Randbedingungen Gl. (2.2.-67) in Gl. (2.2.-41) ein, so folgen sofort die Konstanten

$$C_1 = 0 \quad (2.2.-70)$$

und

$$C_2 = \vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta. \quad (2.2.-71)$$

Damit kann die Temperaturkurve

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) e^{-mx} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \quad (2.2.-72)$$

angegeben werden.

2.2.9. Randwärmeabgabe

Für die praktische Bemessung der erforderlichen Heizflächengröße ist es wichtig, die Randwärmeabgabe der Registerbegrenzungen und die Wärmeabgabe von Einzelrohren, die beispielsweise die Rohrregister mit dem Heizmedium versorgen, zu kennen. Sie kann einfach aus dem Verlauf der Temperaturkurve Gl. (2.2.-72) gewonnen werden, indem man

$$\dot{q}_{RW} = -\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} A \quad (2.2.-73)$$

bildet. Die Fläche A wird dabei aus der Rippendicke δ und der betrachteten Rohrlänge b gebildet. Es gilt dann

$$\dot{q}_{RW} = b\delta\lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right). \quad (2.2.-74)$$

Die praktische Berechnung vereinfacht sich, wenn statt der genauen Ermittlung der Randwärmeabgabe eine äquivalente Heizfläche bei der fiktiv gleichen mittleren Übertemperatur ϑ_m , wie sie innerhalb des Registers gilt, zugerechnet wird. Es ist somit die Heizflächenverbreiterung p — vergleiche auch Bild 2.2.-6 — zu bestimmen.

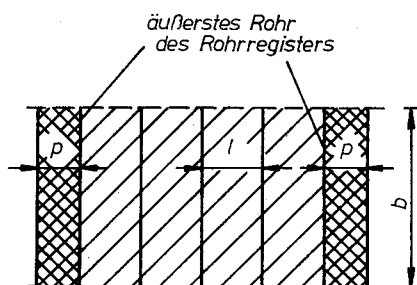


Bild 2.2.-6
Darstellung des Heizflächenzuschlages infolge Randwärmeabgabe

Die Gesamtwärmeabgabe innerhalb des Rohrregisters berechnet sich nach den Gln. (2.2.-52) und (2.2.-53), bezogen auf 1 m², zu

$$\dot{q} = \kappa_a(\vartheta_m - \Delta) + \kappa_i\vartheta_m, \quad (2.2.-75)$$

bzw. ergibt sich durch Substitution von Gl. (2.2.-49)

$$\dot{q} = \left[\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right] \times (\kappa_a + \kappa_i) - \Delta\kappa_a, \quad (2.2.-76)$$

so daß nach weiterer Umrechnung endgültig

$$\dot{q} = [\vartheta_0(\kappa_a + \kappa_i) - \Delta\kappa_a] \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} \quad (2.2.-77)$$

folgt. Diese Normwärmeabgabe wird nun mit der Fläche $b \cdot p$ multipliziert und gleich $\dot{q}_{RW}$ gesetzt, so daß daraus der Zuschlag

$$p = \frac{b\delta\lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right)}{b [\vartheta_0(\kappa_i + \kappa_a) - \Delta\kappa_a] \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}}} \quad (2.2.-78)$$

bzw.

$$p = \frac{\frac{l}{2}}{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)} \quad (2.2.-79)$$

eliminiert werden kann. Bemerkenswerterweise gilt dieses einfache Ergebnis für gleiche und ungleiche Umgebungstemperaturen. Soll die Vergrößerung nur eine Funktion von $\left(m \frac{l}{2}\right)$ sein, so gelingt dies ohne weiteres, wenn man die Heizflächenverbreiterung als Bruchteil p' vom Rohrabstand angibt. Es handelt sich dabei um eine dimensionslose Darstellung, wobei

$$p' = \frac{p}{l} \quad (2.2.-80)$$

und

$$p' = \frac{0,5}{\tanh \frac{ml}{2}} \quad (2.2.-81)$$

gelten. Die Auswertung der letzten Gleichung macht deutlich, daß sich p' nur asymptotisch dem Wert 0,5 nähert. Bei einer rechnerischen Verbreiterung der Heizfläche um $l/2$ liegt man somit stets auf der sicheren Seite. Eine grafische Auswertung der Gl. (2.2.-79) erfolgte im Bild 2.2.-7.

Der Wärmedurchgang infolge des Temperaturunterschiedes ($t_a - t_i$) ist außerhalb der vergrößerten Heizfläche in üblicher Weise zu berechnen [vgl. Gl. (2.2.-90)].

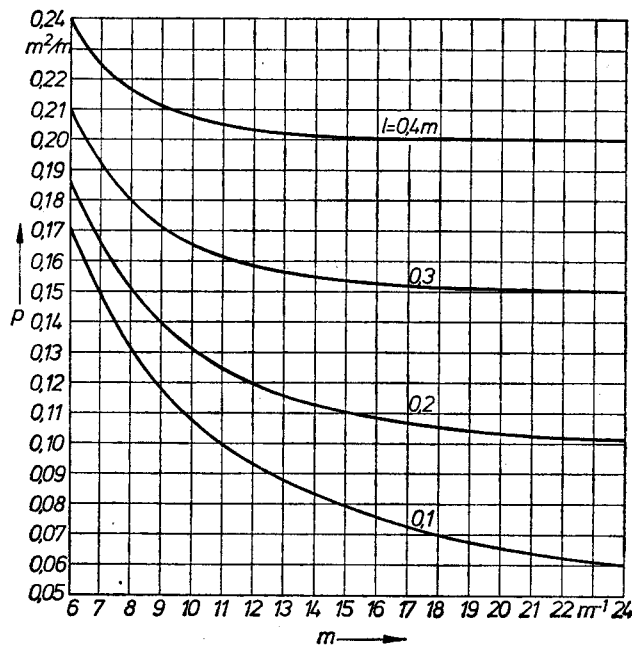


Bild 2.2.-7
Heizflächenzuschlag p infolge Randwärmeabgabe

Die Wärmeabgabe eines Einzelrohres kann aus Gl. (2.2.-74) ermittelt werden. Es gilt

$$\dot{q}_{ER} = 2\dot{q}_{RW} = 2b\delta\lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \quad (2.2.-82)$$

oder

$$\dot{q}_{ER} = \frac{2b}{m} [\vartheta_0(\kappa_i + \kappa_a) - \Delta\kappa_a]. \quad (2.2.-83)$$

Sind die Umgebungstemperaturen gleich ($t_i = t_a$), so teilt sich dieser Wärmestrom im Verhältnis

$$\frac{\dot{q}_{ER,a}}{\dot{q}_{ER,i}} = \frac{\kappa_a}{\kappa_i}, \quad (2.2.-84)$$

woraus die Beziehungen

$$\dot{q}_{ER,i} = \frac{\dot{q}_{ER}}{1 + \frac{\kappa_a}{\kappa_i}} \quad \text{und} \quad \dot{q}_{ER,a} = \frac{\dot{q}_{ER}}{1 + \frac{\kappa_i}{\kappa_a}} \quad (2.2.-85)$$

folgen. Ungleiche Umgebungstemperaturen erfordern weitere Überlegungen, da die Wärmeabgabe des Rohres von einem ständigen Wärmestrom von der Umgebung höherer Temperatur zur Umgebung niedriger Temperatur überlagert wird. Allgemein gilt für die Wärmeabgabe, bezogen auf die Rohrlänge b , an die Umgebung zwischen $x = -x^*$ und $x = x^*$

$$\dot{q}_i = 2b\kappa_i \int_0^{x^*} \vartheta dx \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}_a = 2b\kappa_a \int_0^{x^*} (\vartheta - \Delta) dx. \quad (2.2.-86)$$

Setzt man die Funktion für die Übertemperatur ϑ – Gl. (2.2.-72) – ein, so ergibt sich

$$\dot{q}_i = 2b\kappa_i \int_0^{x^*} \left[\left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) e^{-mx} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right] dx \quad (2.2.-87)$$

bzw. nach Lösen des bestimmten Integrals

$$\begin{aligned} \dot{q}_i = & \frac{2b\kappa_i}{m} \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) (1 - e^{-mx^*}) \\ & + \frac{2b}{\frac{1}{\kappa_i} + \frac{1}{\kappa_a}} \Delta x^*. \end{aligned} \quad (2.2.-88)$$

Da der Gesamtwärmestrom richtungsorientiert (zur Umgebung jeweils positiv) im betrachteten Flächenabschnitt ermittelt werden sollte, durfte über eventuell vorhandene Nullstellen hinweg integriert werden.

In analoger Weise berechnet sich die Wärmeabgabe nach außen

$$\begin{aligned} \dot{q}_a = & \frac{2b\kappa_a}{m} \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) (1 - e^{-mx^*}) \\ & - \frac{2b}{\frac{1}{\kappa_i} + \frac{1}{\kappa_a}} \Delta x^*. \end{aligned} \quad (2.2.-89)$$

Ein Vergleich der beiden letzten Gleichungen miteinander zeigt, daß der jeweils letzte Term zahlenmäßig gleich, jedoch mit unterschiedlichem Vorzeichen vorkommt. Dieser Summand stellt den Wärmestrom im ungestörten Zustand infolge des Potentialunterschiedes $\Delta = t_a - t_i$ dar [vgl. Gl. (2.2.-69)], das heißt, dieser Wärmestrom würde auch vorhanden sein, wenn es kein Heizrohr in der Platte gäbe. Es bietet sich deshalb an, nur die durch das beheizte Rohr hervorgerufene, überlagerte Wärmeströmung zu betrachten. Der Vergleich der jeweils ersten Summanden ergibt

$$\frac{\dot{q}_{ER,a}}{\dot{q}_{ER,i}} = \frac{\kappa_a}{\kappa_i}.$$

Er bestätigt damit die Feststellung der Gln. (2.2.-84) und (2.2.-85) auch für den Fall der ungleichen Umgebungstemperaturen. Praktisch wird man folgendermaßen vorgehen:

Der Wärmedurchgang durch die Platte ist unabhängig von der Lage und der Übertemperatur des Heizrohres konventionell zu berechnen. Die Gl. (2.2.-69) wird jedoch korrekterweise

$$\dot{q} = \Delta \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i} + \frac{\delta}{\lambda}} \quad (2.2.-90)$$

geschrieben.

Die Wärmeabgabe des Einzelrohres nach Gl. (2.2.-83) wird entsprechend der Teilwärmedurchgangskoeffizienten gemäß Gln. (2.2.-84) und (2.2.-85) aufgeteilt.

Abrundend sei darauf hingewiesen, daß selbstverständlich die Summe der Wärmeströme nach den Gln. (2.2.-88) und (2.2.-89) für $x \rightarrow \infty$ der Rohrwärmeabgabe entspricht.

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (q_1 + q_a) = 2b \frac{\kappa_1 + \kappa_a}{m} \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \\ = \frac{2b}{m} [\vartheta_0(\kappa_1 + \kappa_a) - \kappa_a \Delta] = \dot{q}_{ER} \quad (2.2.-91)$$

Außerdem ist es möglich, für die Wärmeabgabe eines Einzelrohres die doppelte Randwärmeabgabe in modifizierter Form anzusetzen. Praktisch würde man auf einer Breite von $2p$ — berechnet nach Gl. (2.2.-79) — die Wärmestromdichten nach den Gln. (2.2.-52) und (2.2.-53) zugrunde legen. Bei dieser Betrachtungsweise ist innerhalb dieses Streifens der Wärmedurchgang nach Gl. (2.2.-69) bereits enthalten.

Welches Berechnungsverfahren gewählt wird, ist prinzipiell gleichgültig. Der erstgenannte Vorschlag ist anzuwenden, wenn tatsächlich nur ein einzelnes Rohr ohne Beziehung zu einem Register verlegt wurde. Die letztere Methode ist günstiger, wenn man im gleichen Deckenaufbau ohnehin die Wärmeabgabe eines Rohrregisters berechnet hat, da dann nur noch eine entsprechende Heizflächenvergrößerung vorgenommen werden muß.

2.2.10. Beispiel

Es ist die Temperaturverteilung eines Einzelrohres in einer Deckenkonstruktion gemäß Abschnitt 2.2.3. zu bestimmen und die Wärmeabgabe je 1 m Rohr zu berechnen. Die Rippenfußtemperatur betrage $t_o = 50^\circ\text{C}$. Die Umgebungstemperaturen sind mit $t_i = 20^\circ\text{C}$ und $t_a = 10^\circ\text{C}$ anzunehmen.

Lösung

Gemäß Definition gelten

$$\vartheta_0 = t_o - t_i = 50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 30\text{ K}$$

und

$$\Delta = t_o - t_i = 10^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = -10\text{ K},$$

so daß in Verbindung mit den Werten aus Abschnitt 2.2.3. die Gl. (2.2.-72) die Form

$$\vartheta = \left(30\text{ K} + \frac{1,74}{6,27 + 1,74} 10\text{ K} \right) e^{-13,14x} \\ - \frac{1,74}{6,27 + 1,74} 10\text{ K}$$

annimmt. Die schrittweise Ermittlung der Über-temperatur liefert die folgenden Werte:

x in m	0	0,02	0,04	0,06	0,1	0,15	0,2	0,5	1
ϑ in K	30	22,6	16,8	12,5	6,5	2,3	0,15	-2,1	-2,17

Der asymptotisch erreichbare Endwert, der nach Gl. (2.2.-68) $\vartheta = -2,17\text{ K}$ beträgt, tritt praktisch schon bei $x = 1\text{ m}$ auf. Die Ergebnisse sind im Bild 2.2.-8 aufgezeichnet.

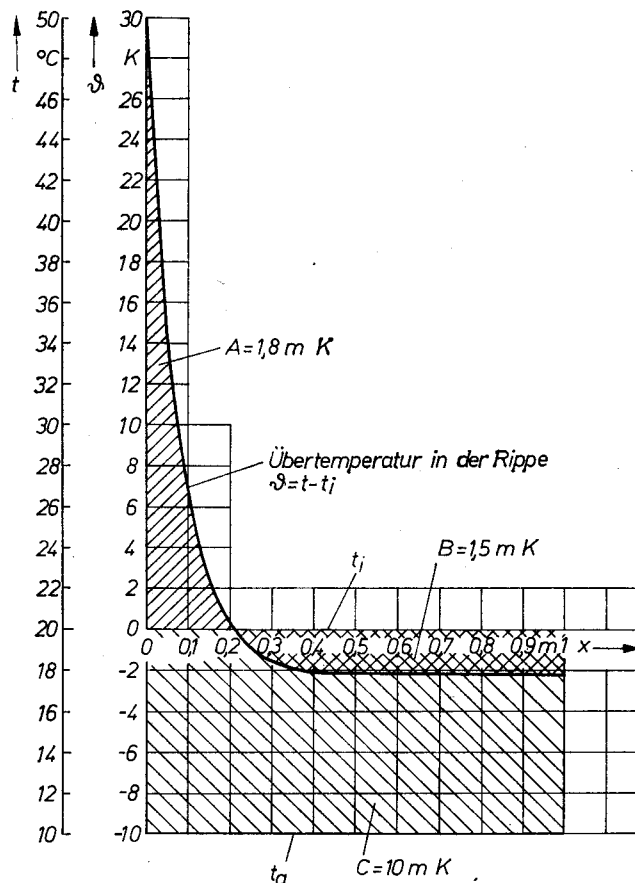


Bild 2.2.-8

Temperaturverlauf in einer Massivdecke infolge eines beheizten Einzelrohres

Die Gesamtwärmeabgabe des Rohres errechnet sich nach Gl. (2.2.-83) zu

$$\dot{q}_{ER} = \frac{2 \cdot 1}{13,14} [30(6,27 + 1,74) + 10 \cdot 1,74] \text{ W/m} \\ = 39,2 \text{ W/m},$$

wovon in die Umgebung

$$\dot{q}_{ER,i} = \frac{39,2}{1 + \frac{1,74}{6,27}} \frac{\text{W}}{\text{m}} = 30,7 \text{ W/m}$$

und

$$\dot{q}_{ER,a} = \frac{39,2}{1 + \frac{6,27}{1,74}} \frac{\text{W}}{\text{m}} = 8,5 \text{ W/m}$$

abfließen. Unabhängig davon werden nach Gl. (2.2.-90)

$$\dot{q} = \left| -10 \frac{1}{\frac{1}{6,27} + \frac{1}{1,74} + \frac{0,04}{1,16}} \right| \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 13 \text{ W/m}^2$$

von innen nach außen die Deckenkonstruktion durchsetzen. Bei Vernachlässigung des Wärmeleitwiderstandes in der Rippe erhält man

$$\dot{q} = \left| -10 \frac{1}{\frac{1}{6,27} + \frac{1}{1,74}} \right| \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 13,6 \text{ W/m}^2.$$

2.3. Eindimensionale Wärmeleitung in gekrümmter Richtung

Der Betrachtung wird eine dünne Zylinderschale zugrunde gelegt, in der die Wärmeleitung gegenüber den anderen Schichten bevorzugt erfolgt. In Bild 2.3.-1 sind ein Querschnitt durch die Schale und der qualitative Temperaturverlauf dargestellt.

In Analogie zum Abschnitt 2.2.1. treten folgende Wärmeströme auf:

eintretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_\varphi = -\lambda A \frac{d\vartheta}{r d\varphi} \quad (2.3.-1)$$

austretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{\varphi+d\varphi} = -\lambda A \frac{d}{r d\varphi} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{r d\varphi} r d\varphi \right) \quad (2.3.-2)$$

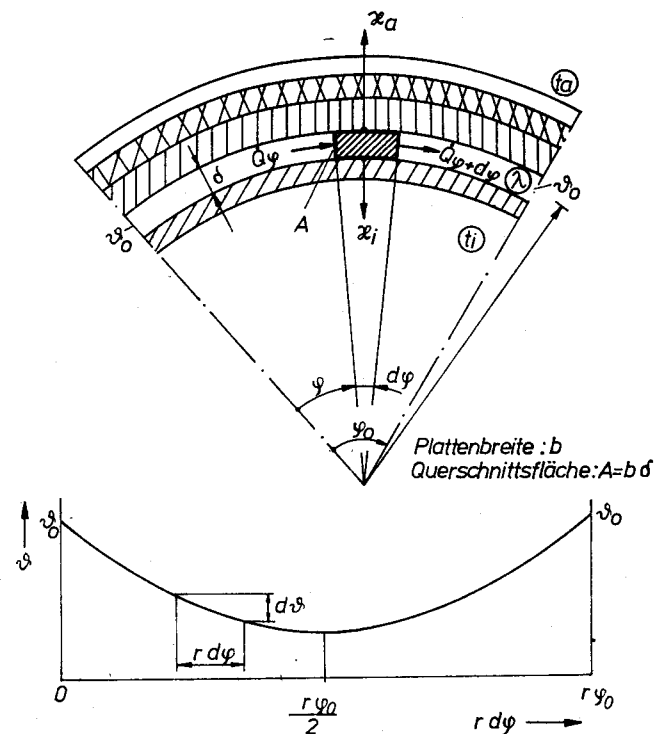
Wärmestrom an die Umgebung

$$d\dot{Q} = [\kappa_1 \vartheta + \kappa_a (\vartheta - \Delta)] b r d\varphi. \quad (2.3.-3)$$

Die Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ_1 und κ_a sind infolge des segmentartigen Aufbaus der Schichten abweichend von der ebenen Deckenkonstruktion definiert (vgl. Abschnitt 1.4.).

Zusammenfassend ergibt die Wärmebilanz

$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= \dot{Q}_\varphi - \dot{Q}_{\varphi+d\varphi} = [\kappa_1 \vartheta + \kappa_a (\vartheta - \Delta)] b r d\varphi \\ &= b \delta \lambda \frac{d^2 \vartheta}{r^2 d\varphi^2} r d\varphi, \end{aligned} \quad (2.3.-4)$$



Übertemperatur: $\vartheta = t - t_i$
Übertemperatur am Rippenfuß: ϑ_0
Differenz der Umgebungstemperatur: $\Delta = t_a - t_i$

Bild 2.3.-1

Schematische Darstellung der thermodynamischen Verhältnisse in einer Zylinderschale mit gleichen Übertemperaturen am Rippenfuß und ungleichen Umgebungstemperaturen

woraus die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{r^2 d\varphi^2} - \vartheta \frac{\kappa_1 + \kappa_a}{\delta \lambda} = -\Delta \frac{\kappa_a}{\lambda \delta} \quad (2.3.-5)$$

folgt. Der weitere Lösungsweg verläuft analog zu dem in Abschnitt 2.2.4. beschriebenen Verfahren. Es sind lediglich für die laufende Koordinate

$$x = r\varphi, \quad (2.3.-6)$$

für die Begrenzung

$$l = r\varphi_0 \quad (2.3.-7)$$

und das Differential

$$dx = r d\varphi \quad (2.3.-8)$$

zu substituieren. Damit lauten dann die Gleichungen für den Verlauf der Übertemperatur

$$\begin{aligned} \vartheta = & \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[mr \left(\frac{\varphi_0}{2} - \varphi \right) \right]}{\cosh \left(mr \frac{\varphi_0}{2} \right)} \\ & + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \end{aligned} \quad (2.3.-9)$$

und für den Mittelwert

$$\begin{aligned} \vartheta_m = & \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh \left(mr \frac{\varphi_0}{2} \right)}{mr \frac{\varphi_0}{2}} \\ & + \Delta \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a}. \end{aligned} \quad (2.3.-10)$$

Die praktische Approximation auf die realen Verhältnisse erfolgt in gleicher Weise wie im Abschnitt 2.2.5., so daß die Gln. (2.2.-51) bis (2.2.-55) in vollem Umfang gelten. Bei der Bemessung der Heizfläche ist auf den Teilkreis, auf dem die Rohrachsen liegen, zu beziehen

$$A = r\varphi b. \quad (2.3.-11)$$

Bezüglich der Randwärmeabgabe und der eines Einzelrohres kann gleichfalls auf das ebene Analogon zurückgegriffen werden. Somit gilt für die Heizflächenvergrößerung in Form

der gestreckten Bogenlängen

$$p = \frac{\frac{r\varphi_0}{2}}{\tanh \left(mr \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \quad (2.3.-12)$$

des zusätzlichen Winkels im Bogenmaß

$$p^* = \frac{p}{r} = \frac{0,5\varphi_0}{\tanh \left(mr \frac{\varphi_0}{2} \right)} \quad (2.3.-13)$$

und als Bruchteil von $r\varphi_0$

$$p' = \frac{p}{r\varphi_0} = \frac{0,5}{\tanh \left(mr \frac{\varphi_0}{2} \right)}. \quad (2.3.-14)$$

Die Darstellung erfolgt im Bild 2.3.-2.

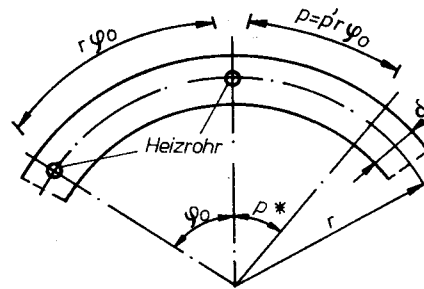


Bild 2.3.-2

Bezeichnungsweise zur Randwärmeabgabe in einer Zylinderschale

Unter Beachtung der Teilwärmedurchgangskoeffizienten sind die Gln. (2.2.-83) bis (2.2.-85) für die Berechnung der Wärmeabgabe eines Einzelrohres zu verwenden.

Die in Abschnitt 2.2.11. aufgeführten Diagramme können unter Beachtung von Gln. (2.3.-6) und (2.3.-7) ebenfalls zur Rechenerleichterung herangezogen werden.

2.4. Eindimensionale, radiale Wärmeleitung in Kreisingen

Praktisch liegen diese Verhältnisse bei spiralförmig verlegten Heizflächen oder Heizrohren in Decken oder Fußböden vor. Sie werden als konzentrische Kreise approximiert. Da weiterhin die eindimensionale Wärmeleitung angesetzt wird, ist die Lösung nur für Platten mit dünner, bevorzugter Wärmeleitschicht anwendbar.

2.4.1. Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleicher Umgebungstemperatur

Ausgehend von Bild 2.4.-1, wird die Ableitung der Differentialgleichung an einem Ringelement vorgenommen. Es gelten für den eintretenden Wärmestrom

$$\dot{Q}_r = -\lambda 2\pi \delta r \frac{d\vartheta}{dr} \quad (2.4.-1)$$

austretenden Wärmestrom

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{r+dr} = & \dot{Q}_r + \frac{d\dot{Q}_r}{dr} dr = -\lambda 2\pi \delta r \frac{d\vartheta}{dr} \\ & - \lambda 2\pi \delta \frac{d}{dr} \left(\frac{d\vartheta}{dr} r \right) dr \end{aligned} \quad (2.4.-2)$$

$$\dot{Q}_{r+dr} = -\lambda 2\pi \delta \left[r \frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d^2\vartheta}{dr^2} r dr + \frac{d\vartheta}{dr} dr \right]$$

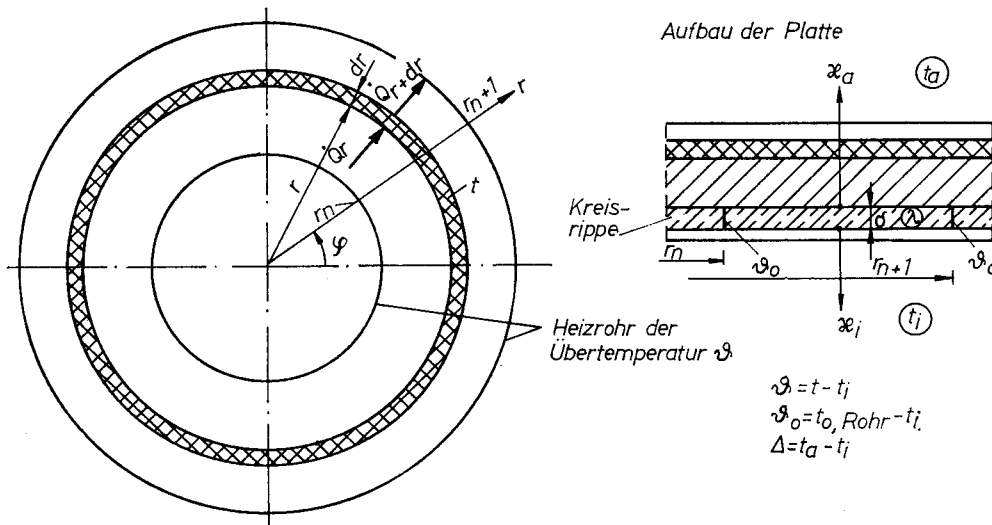


Bild 2.4.-1

Wärmetechnische und geometrische Verhältnisse an einer mit kreisförmig gebogenen Rohren beheizten Platte bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Wärmestrom an die Umgebung

$$d\dot{Q} = [\kappa_i \vartheta + \kappa_a (\vartheta - \Delta)] 2\pi r dr. \quad (2.4.-3)$$

Die Teilwärmegedurchgangskoeffizienten sind unter den vorliegenden Bedingungen wie bei ebenen Decken (vgl. Abschnitt 1.4.) zu berechnen. Die Wärmebilanz ergibt schließlich

$$d\dot{Q} = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} \quad (2.4.-4)$$

$$[\kappa_i \vartheta + \kappa_a (\vartheta - \Delta)] 2\pi r dr = \lambda 2\pi \delta \left(\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} r dr + \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) \quad (2.4.-5)$$

Nach einigen Umrechnungen erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\kappa_i + \kappa_a}{\lambda \delta} \vartheta = -\frac{\kappa_a}{\lambda \delta} \Delta. \quad (2.4.-6)$$

Der Vergleich mit der FOURIERSchen Differentialgleichung zeigt, daß die vorgenannte Form einen Sonderfall darstellt. Es wird ein stationäres eindimensionales Wärmeleitproblem in radialer Richtung mit einer Wärmesenke unter Verwendung von Zylinderkoordinaten beschrieben.

Lösung der Differentialgleichung

Zur Abkürzung wird wiederum

$$m^2 = \frac{\kappa_i + \kappa_a}{\lambda \delta} \quad (2.4.-7)$$

gesetzt und weiterhin

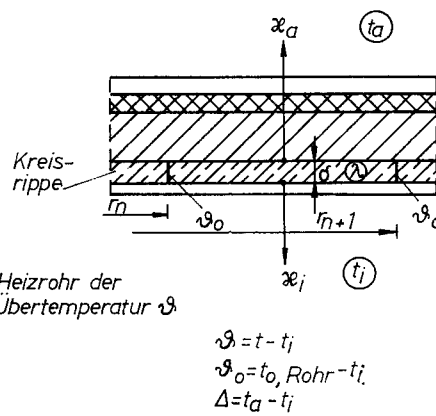
$$u = mr \quad (2.4.-8)$$

eingeführt. Damit berechnen sich die Differentialquotienten zu

$$\frac{d\vartheta}{dr} = m \frac{d\vartheta}{du} \quad (2.4.-9)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} = m^2 \frac{d^2 \vartheta}{du^2}. \quad (2.4.-10)$$

Aufbau der Platte



Die Substitution in Gl. (2.4.-6) führt dann zu der Form

$$\frac{d^2 \vartheta}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{d\vartheta}{du} - \vartheta = -\frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta. \quad (2.4.-11)$$

Diese inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist schrittweise zu lösen. Die homogene Gleichung ist ein Sonderfall der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (2.4.-12)$$

für die Zylinderfunktionen des rein imaginären Arguments Lösungen darstellen.

Nach [4] wurden deshalb die Modifikationen der BESSELSchen Funktion J_n

$$I_n(u) = i^{-n} J_n(iu) \quad (2.4.-13)$$

und die MACDONALDSche Funktion

$$K_n(u) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(u) - I_n(u)}{\sin n\pi} \quad (2.4.-14)$$

als Lösungen gewählt. Letztere unterscheidet sich von der HANKELschen Funktion lediglich durch den Faktor $\pi/2$. Mit den vorgestellten Ansätzen lautet die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\vartheta = C_1 I_0(u) + C_2 K_0(u). \quad (2.4.-15)$$

Der Beweis, daß es sich tatsächlich um eine Lösung handelt, sei kurz ausgeführt. Es gelten die Ableitungen

$$\frac{d\vartheta}{du} = C_1 I_{-1} - C_2 K_{-1} \quad (2.4.-16)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{du^2} = C_1 \left(I_{-2} + \frac{1}{u} I_{-1} \right) + C_2 \left(K_{-2} - \frac{1}{u} K_{-1} \right), \quad (2.4.-17)$$

die in Gl. (2.4.-11) substituiert schließlich

$$C_1 \left(I_{-2} + \frac{1}{u} I_{-1} + \frac{1}{u} I_{-1} - I_0 \right) + C_2 \left(K_{-2} - \frac{1}{u} K_{-1} - \frac{1}{u} K_{-1} - K_0 \right) = A \quad (2.4.-18)$$

ergeben. Mit den Beziehungen

$$I_{n-1} = I_{n+1} + \frac{2nI_n}{u} \quad (2.4.-19)$$

und

$$K_{n-1} = K_{n+1} - \frac{2nK_n}{u} \quad (2.4.-20)$$

können die einzelnen Summanden in Gl. (2.4.-18) zusammengefaßt werden, so daß

$$\begin{aligned} C_1 \left(I_0 - \frac{2I_{-1}}{u} + \frac{I_{-1}}{u} + \frac{I_{-1}}{u} - I_0 \right) \\ + C_2 \left(K_0 + \frac{2K_{-1}}{u} - \frac{K_{-1}}{u} - \frac{K_{-1}}{u} - K_0 \right) \\ = A = 0 \end{aligned} \quad (2.4.-21)$$

gilt.

Im weiteren ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (2.4.-11) zu suchen. Sie kann einfach analog zu Abschnitt 2.2.4. als

$$\vartheta = \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-22)$$

gefunden werden. Damit nimmt die allgemeine Lösung die endgültige Form

$$\vartheta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-23)$$

an, wobei gleichzeitig die Abkürzung für u nach Gl. (2.4.-8) eingesetzt wurde. Für die Bestimmung der Konstanten gelten für einen Kreisring, der durch die Radien r_n und r_{n+1} begrenzt ist, die Randbedingungen

$$\vartheta_{r=r_n} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \vartheta_{r=r_{n+1}} = \vartheta_0. \quad (2.4.-24)$$

Diese Werte, in Gl. (2.4.-23) eingesetzt, führen zu den Bestimmungsgleichungen

$$\vartheta_0 = C_1 I_0(mr_n) + C_2 K_0(mr_n) + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-25)$$

$$\vartheta_0 = C_1 I_0(mr_{n+1}) + C_2 K_0(mr_{n+1}) + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \quad (2.4.-26)$$

Die Auflösung ergibt die Werte

$$\begin{aligned} C_1 = - \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \\ \times \frac{K_0(mr_{n+1}) - K_0(mr_n)}{(I_0(mr_{n+1}) K_0(mr_n) - I_0(mr_n) K_0(mr_{n+1}))} \end{aligned} \quad (2.4.-27)$$

und

$$\begin{aligned} C_2 = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \\ \times \frac{I_0(mr_{n+1}) - I_0(mr_n)}{(I_0(mr_{n+1}) K_0(mr_n) - I_0(mr_n) K_0(mr_{n+1}))}. \end{aligned} \quad (2.4.-28)$$

Damit kann man die Gleichung für den Temperaturverlauf in Funktion der Ortskoordinate r angeben

$$\begin{aligned} \vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \\ \times \frac{[-K_0(mr_{n+1}) + K_0(mr_n)] I_0(mr) \rightarrow}{I_0(mr_{n+1}) K_0(mr_n) \rightarrow} \\ \rightarrow + [I_0(mr_{n+1}) - I_0(mr_n)] K_0(mr) \\ \rightarrow - I_0(mr_n) K_0(mr_{n+1}) \\ + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \end{aligned} \quad (2.4.-29)$$

Die Funktionswerte der, entsprechenden Zylinderfunktionen finden sich im Anhang.

2.2.4. Praktische Anwendung auf Platten bei ungleicher Umgebungstemperatur

Die Approximation der Rippenfußtemperatur kann in gleicher Weise wie bei parallelen Rohrregistern nach Gl. (2.2.-51) vorgenommen werden.

Die Wärmeabgaben des Rohres n mit dem Radius r_n und des Rohres $(n+1)$ mit dem Radius r_{n+1} jeweils in Richtung des betrachteten Kreisringes berechnen sich nach

$$\dot{Q} = -2\pi\lambda\delta \left[\frac{d\vartheta_{r=r_n}}{dr} r_n - \frac{d\vartheta_{r=r_{n+1}}}{dr} r_{n+1} \right]. \quad (2.4.-30)$$

Im ersten Fall ist die Wärmeströmung vom Ursprungspunkt weg, im zweiten Fall zum Ursprungspunkt hin gerichtet. Da das Ergebnis positiv sein soll, erfolgte der Vorzeichenunterschied. Für die Ableitungen gelten

$$\frac{dI_0(mr)}{dr} = mI_{-1} = mI_1 \quad (2.4.-31)$$

$$\frac{dK_0(mr)}{dr} = -mK_{-1} = -mK_1, \quad (2.4.-32)$$

so daß Gl. (2.4.-30) die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} \dot{Q} = -2\pi\lambda\delta m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \\ \times \left\{ \frac{[-K_0(mr_{n+1}) + K_0(mr_n)] \rightarrow}{I_0(mr_{n+1}) K_0(mr_n) \rightarrow} \right. \\ \rightarrow \times \frac{[I_1(mr_n) r_n - I_1(mr_{n+1}) r_{n+1}]}{\rightarrow - I_0(mr_n) K_0(mr_{n+1})} \\ + \frac{[I_0(mr_{n+1}) - I_0(mr_n)] \rightarrow}{I_0(mr_{n+1}) K_0(mr_n) \rightarrow} \\ \rightarrow \times \frac{[-K_1(mr_n) r_n + K_1(mr_{n+1}) r_{n+1}]}{\rightarrow - I_0(mr_n) K_0(mr_{n+1})} \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.4.-33)$$

Die Anteile an die Umgebung berechnen sich entsprechend den Teilwärmedurchgangskoeffizienten

$$\dot{Q}_a = \frac{\dot{Q}}{1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_a}} \quad \text{und} \quad \dot{Q}_i = \frac{\dot{Q}}{1 + \frac{\kappa_a}{\kappa_1}}. \quad (2.4.-34)$$

Weiterhin ist der überlagerte Wärmestrom infolge ungleicher Umgebungstemperaturen zu beachten. Der auf die Fläche bezogene Wärmestrom kann nach Gl. (2.2.-90) ermittelt werden.

Die mittleren Übertemperaturen an den Oberflächen betragen somit

$$t_{ma} = \left[\frac{\dot{Q}_a}{\pi(r_{n+1}^2 - r_n^2)} - \Delta \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i} + \frac{\delta}{\lambda}} \right] \frac{1}{\alpha_a} + t_a \quad (2.4.-35)$$

und

$$t_{mi} = \left[\frac{\dot{Q}_i}{\pi(r_{n+1}^2 - r_n^2)} + \Delta \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i} + \frac{\delta}{\lambda}} \right] \frac{1}{\alpha_i} + t_i. \quad (2.4.-36)$$

Mit diesen Werten sind die getroffenen Annahmen bezüglich der Wärmeübergangskoeffizienten nachprüfbar.

2.4.3. Randwärmeabgabe

Nachdem die Wärmeabgabe in einem Kreisring, der von zwei Rohren begrenzt wird, berechnet werden kann, steht abschließend die Frage, wie groß die Wärmeabgabe der innersten Kreisfläche und die des äußersten Rohres nach außen ist. Dies sind zwei vollkommen unterschiedliche Probleme, deren Lösung jedoch bezüglich ihrer Gegensätzlichkeit vergleichbar werden. In beiden Fällen kann man von der Differentialgleichung (2.4.-11) ausgehen. Um die unterschiedlichen Randbedingungen zu erfüllen, sind jedoch nur Teile der gefundenen Wurzeln verwendbar.

Innere Kreisfläche

Aus der Lösung muß die Funktion K_0 herausfallen, da diese an der Stelle Null eine Unendlichkeitsstelle aufweist. Physikalisch käme dies einer „Wärmeexplosion“ im Ursprung gleich. Somit bleibt die zum Ursprung symmetrische Funktion I_0 der Form

$$\vartheta = C_1 I_0(mr) + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-37)$$

als Lösung übrig. Die Randbedingung

$$\vartheta_{r=r_1} = \vartheta_0 \quad (2.4.-38)$$

ergibt die Konstante

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta}{I_0(mr_1)}. \quad (2.4.-39)$$

Damit lautet die Gleichung der Temperaturverteilung

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{I_0(mr)}{I_0(mr_1)} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta. \quad (2.4.-40)$$

Die Wärmeabgabe des innersten Rohres stellt sich dann als

$$\dot{Q}_{r_1} = -2\pi r_1 \delta \lambda \frac{d\vartheta}{dr} \quad (2.4.-41)$$

dar. Das Minuszeichen deutet auf den Wärmestrom nach innen hin und wird im weiteren unterdrückt, so daß

$$\dot{Q}_{r_1} = 2\pi r_1 \delta \lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{I_1(mr_1)}{I_0(mr_1)} \quad (2.4.-42)$$

gilt.

Äußerstes Rohr

In diesem Fall ist die Funktion I_0 zur Beschreibung des Temperaturverlaufs ungeeignet, da sie mit wachsendem Argument ebenfalls zunimmt. Somit wird der Ansatz

$$\vartheta = C_1 K_0(mr) + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-43)$$

verwendet, der die Randbedingung

$$\vartheta_{r=r_a} = \vartheta_0 \quad (2.4.-44)$$

zu erfüllen hat. Die Konstante ermittelt sich zu

$$C_1 = \frac{\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta}{K_0(mr_a)}, \quad (2.4.-45)$$

womit der Temperaturverlauf durch die Gleichung

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{K_0(mr)}{K_0(mr_a)} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \quad (2.4.-46)$$

beschrieben werden kann. Die Wärmeabgabe des äußersten Rohres ergibt sich zu

$$\dot{Q}_{r_a} = -2\pi r_a \delta \lambda \frac{d\vartheta}{dr}, \quad (2.4.-47)$$

wobei der Temperaturgradient negativ ist, so daß der in r -Richtung orientierte Wärmestrom sich letztlich größer als Null darstellt. Es gilt

$$\dot{Q}_{r_a} = 2\pi r_a \delta \lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{K_1(mr_a)}{K_0(mr_a)}. \quad (2.4.-48)$$

Die Gln. (2.4.-42) und (2.4.-48) geben die Wärmeabgabe der Heizrohre an, die entsprechend den Teilwärmedurchgangskoeffizienten aufzuteilen sind [vgl. Gl. (2.4.-34)]. Weiterhin ist bei einem Potentialunterschied $\Delta \neq 0$ der Wärmestrom — wie bereits hinreichend beschrieben — nach Gl. (2.2.-90) zu berücksichtigen. Die Rippenfußtemperaturen sind nach Gl. (2.2.-51) zu bestimmen.

Zusammenfassend stellt die Randwärmeabgabe gekrümmter Rohre eine praktische Ergänzung des Abschnittes 2.2.9. (Randwärmeabgabe gerader Rohre) dar. Betrachtet man beispielsweise eine Registerecke, kann man nach Bild 2.4.-2 die geraden Rohrenden 1 losgelöst vom Rohrbogen 2 betrachten. In Wirklich-

keit strömt natürlich Wärme aus dem Gebiet (1) in das Gebiet (2), wodurch sich letztlich die Wärmeabgabe vom Rohr 1 erhöht und die Wärmeabgabe des Rohres (2) gegenüber separater Betrachtung sinkt. In erster Näherung sei deshalb angenommen, daß sich die Fehler aufheben. Interessant ist es, eine äquivalente Heizfläche — analog zu Gl. (2.2.-79) — zu bestimmen, deren Wärmeabgabe dem Wärmestrom aus dem Viertelkreisbogen entspricht. Zu diesem Zweck wird der Vergleich zur Normwärmeabgabe innerhalb des Registers hergestellt, die durch Gl. (2.2.-77) definiert wurde. Somit gilt

$$\frac{\pi r_o}{2m} [\vartheta_o(\kappa_1 + \kappa_a) - \Delta\kappa_a] \frac{K_1(mr_o)}{K_0(mr_o)} = A [\vartheta_o(\kappa_1 + \kappa_a) - \Delta\kappa_a] \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} \quad (2.4.-49)$$

und unter Einführung von p nach Gl. (2.2.-79)

$$A = p \cdot \frac{\pi r_o}{2} \frac{K_1(mr_o)}{K_0(mr_o)}. \quad (2.4.-50)$$

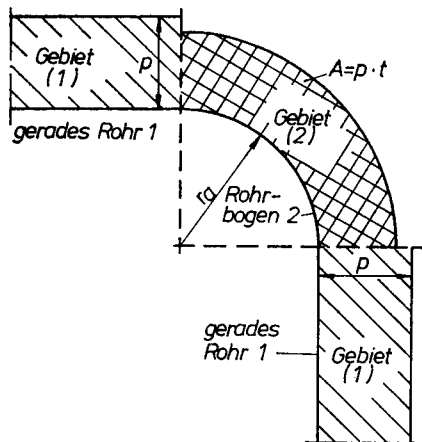


Bild 2.4.-2

Approximation der Randwärmeabgabe beim Übergang vom geraden Rohr zum Viertelkreisbogen am Beispiel einer Register-ecke mit Hilfe äquivalenter Heizflächen

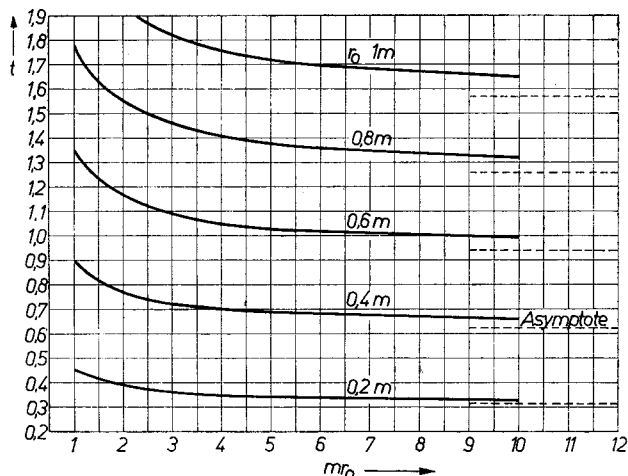


Bild 2.4.-3

Koeffizient t zur Berücksichtigung der Randwärmeabgabe einer Register-ecke

Zur weiteren Vereinfachung wird

$$t = \frac{\pi r_o}{2} \frac{K_1(mr_o)}{K_0(mr_o)} \quad (2.4.-51)$$

gesetzt und im Bild 2.4.-3 diagrammatisch wieder-gegeben. Außerdem sei daran erinnert, daß p im Bild 2.2.-7 aufgetragen ist. Zusammenfassend kann man

$$A = pt \quad (2.4.-52)$$

schreiben.

2.4.4. Beispiel

Zur Beheizung eines Fußbodens sind Polyäthylen-rohre spiralförmig im Duo-System (Vor- und Rücklauf nebeneinander) angeordnet. Der Verlegeplan ist im Bild 2.4.-4 wiedergegeben. Für die Berechnung wird eine Approximation auf konzentrische Kreisanordnung vorgenommen. Diese idealisierte Verlegung ist ebenfalls im Bild eingetragen.

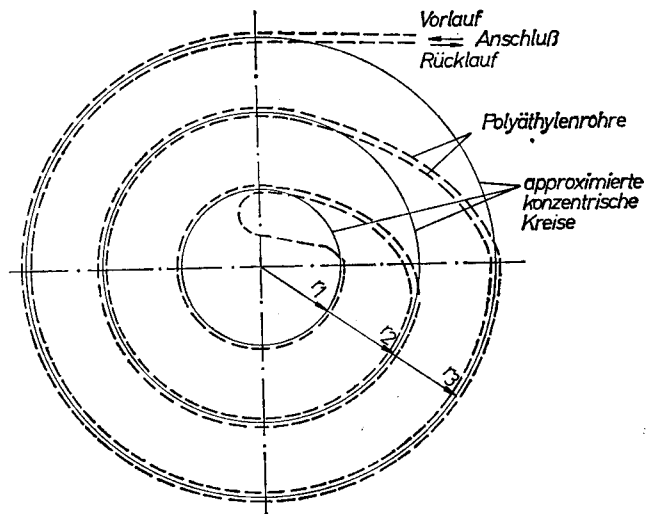


Bild 2.4.-4

Spiralförmig verlegte Polyäthylenrohre in einer Platte und die theoretische Überführung des Verlegeplanes in konzentrische Kreise

Die mittlere Fußtemperatur der Kreisrippen betrage $\vartheta_o = 25^\circ\text{K}$. Die weiteren Werte sind:

$$t_1 = 15^\circ\text{C}; t_a = 25^\circ\text{C}; \delta = 0,04\text{ m}; \lambda = 1,16\text{ W/m K};$$

$$\kappa_a = 1,4\text{ W/m}^2\text{ K}; \kappa_1 = 6,3\text{ W/m}^2\text{ K}.$$

Die Temperaturverläufe in der innersten Kreisfläche, innerhalb der beiden Kreisringe sowie außerhalb des äußersten Rohres sollen berechnet und aufgezeichnet werden. Weiterhin sind die Wärmeabgaben zu ermitteln. Für den Temperaturverlauf ist eine Analogie-betrachtung zu einem Rohrregister mit geraden Rohren durchzuführen.

Abschließend soll die Randwärmeabgabe des äußersten Rohres mit dem eines geraden Rohres allgemeingültig verglichen werden.

• Lösung

Die Fundamentalwerte berechnen sich zu

$$m = \sqrt{\frac{6,3 + 1,4}{1,16 \cdot 0,04}} \frac{1}{\text{m}} = 12,88 \text{ m}^{-1}$$

und

$$\Delta = 25^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C} = 10 \text{ K}.$$

Zur Berechnung des Temperaturverlaufes nach den Gln. (2.4.-29), (2.4.-40) und (2.4.-46) werden die Zylinderfunktionen I_0 und K_0 benötigt. Sie sind tabellarisch zusammengestellt. Damit können die Übertemperaturkurven in der genannten Reihenfolge als Zahlenwertgleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \vartheta_{1K} &= \left(25 \text{ K} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \right) \\ &\quad \times \frac{(-0,003132 + 0,0567) I_0(mr) \rightarrow}{31,15 \cdot 0,0567 \rightarrow} \\ &\quad \rightarrow + (31,15 - 3,499) K_0(mr) \\ &\quad \rightarrow - 3,499 \cdot 0,003132 \\ &\quad + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\vartheta_{1K} = [0,70748 I_0(mr) + 365,19 K_0(mr) + 1,818] \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{2K} &= \left(25 \text{ K} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \right) \\ &\quad \times \frac{(-0,0001951 + 0,003132) I_0(mr) \rightarrow}{332,3 \cdot 0,003132 \rightarrow} \\ &\quad \rightarrow + (332,3 - 31,15) K_0(mr) \\ &\quad \rightarrow - 31,15 \cdot 0,0001951 \\ &\quad + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\vartheta_{2K} = [0,0658 I_0(mr) + 6747,22 K_0(mr) + 1,818] \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{1K} &= \left(25 \text{ K} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \right) \frac{I_0(mr)}{3,499} \\ &\quad + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\vartheta_{1K} = [6,625 I_0(mr) + 1,818] \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{2K} &= \left(25 \text{ K} - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \right) \frac{K_0(mr)}{0,0001951} \\ &\quad + \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\vartheta_{2K} = [118821,11 \cdot K_0(mr) + 1,818] \text{ K}.$$

Die Ergebnisse dieser Gleichungen sind ebenfalls in der folgenden Tabelle enthalten und im Bild 2.4.-5 aufgezeichnet.

r m	mr	I_0	K_0	ϑ K	I_1	K_1
0	0	1		8,4		
0,02	0,26	1,017		8,6		
0,04	0,52	1,0688		8,9		
0,06	0,77	1,1538		9,5		
0,08	1,03	1,2833		10,3		
0,1	1,29	1,4613		11,5		
0,12	1,55	1,6971		13,1		
0,14	1,80	1,990		15,0		
0,16	2,06	2,378		17,6		
0,18	2,32	2,872		20,8		
0,2	2,58	3,499	0,0567	25	2,706	0,06692
0,22	2,83	4,258	0,0423	20,3		
0,24	3,09	5,251	0,0313	17,0		
0,26	3,35	6,508	0,02325	14,9		
0,28	3,61	8,096	0,01730	13,9		
0,3	3,86	10,019	0,01305	13,7		
0,32	4,12	12,539	0,00976	14,3		
0,34	4,38	15,732	0,00731	15,6		
0,36	4,64	19,78	0,00548	17,8		
0,38	4,89	24,69	0,004164	20,8		
0,4	5,15	31,15	0,003132	25	27,94	0,0034243
0,42	5,41	39,36	0,002359	20,3		
0,44	5,67	49,80	0,001778	17,1		
0,46	5,92	62,50	0,001356	15,1		
0,48	6,18	79,25	0,001024	13,9		
0,5	6,44	100,59	0,000774	13,7		
0,52	6,70	127,79	0,0005857	14,2		
0,54	6,96	162,47	0,0004434	15,5		
0,56	7,21	204,8	0,0003394	17,6		
0,58	7,47	260,8	0,0002571	20,7		
0,6	7,73	332,3	0,0001951	25	310,0	0,00020734
0,62	7,99		0,00014796	19,4		
0,64	8,24		0,00011356	15,3		
0,66	8,50		0,00008623	12,1		
0,68	8,76		0,00006550	9,6		
0,7	9,02		0,00004979	7,7		
0,72	9,27		0,00003817	6,4		
0,74	9,53		0,00002906	5,3		
0,76	9,79		0,00002215	4,4		
0,8	10,3		0,00001298	3,4		
0,9	11,59		0,00000337	2,2		
1	12,88		0,00000088	1,9		

Zum Vergleich mit parallel verlegten Heizrohren sind einige Werte nach den Gln. (2.2.-48) und (2.2.-72) berechnet worden. Es ergaben sich die mit + im Bild 2.4.-5 gekennzeichneten Punkte, woraus man folgende Schlußfolgerungen ziehen kann:

Die Minima der Temperaturverläufe innerhalb der Kreisinge liegen außermittig, jeweils zum kleineren Radius hin verschoben. Dies ist erklärbar, wenn man näherungsweise je Meter Rohr die gleiche Wärmeabgabe ansetzt und gleichzeitig die unterschiedlichen Kreisringflächen — jeweils bis zum mittleren Radius gebildet — betrachtet. Die Außermittigkeit verringert sich, je mehr sich der Quotient r_n/r_{n+1} dem Wert Eins nähert. So liegen beispielsweise auch die Punkte A' und B' bereits näher an der Kurve ϑ_{2K} als die Punkte A und B an der Kurve ϑ_{1K} .

Wegen der Flächenzunahme in radialer Richtung sinkt die Übertemperatur anschließend an das äußere Begrenzungsrohr rascher als beim geraden Rohr ab.

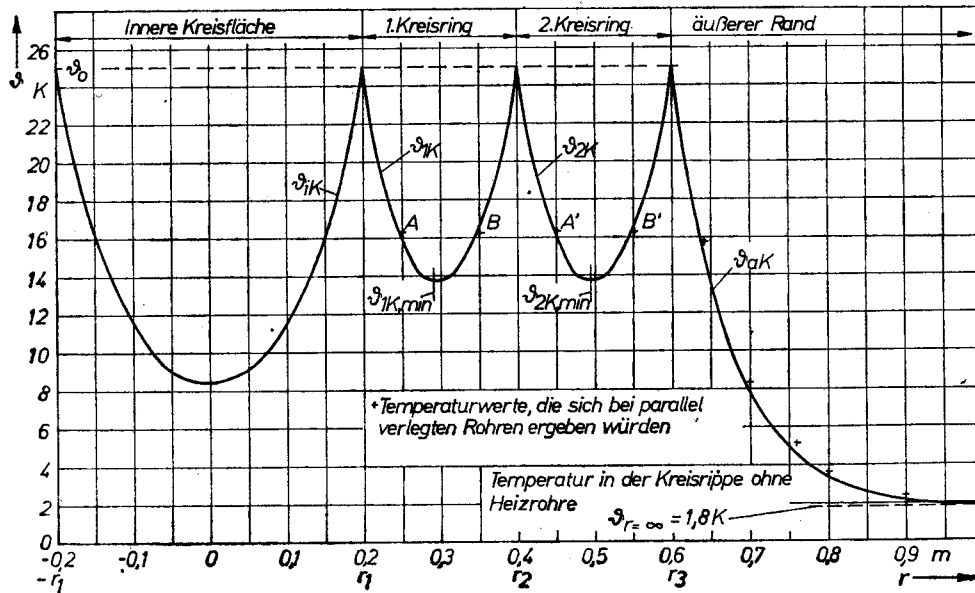


Bild 2.4.-5

Temperaturverlauf in einer massiven Platte zwischen konzentrisch angeordneten Heizrohren nach Bild 2.4.-4 bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Im weiteren sind die Wärmeabgaben zu berechnen. Sie ergeben sich für den ersten und den zweiten Kreisring nach Gl. (2.4.-33) — Werte der Funktion I_1 und K_1 sind ebenfalls in der Tabelle zusammengestellt — zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1K} &= -2\pi \cdot 1,16 \cdot 0,04 \cdot 12,88 \left(25 - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \right) \\ &\times \left\{ \frac{[-0,003132 + 0,0567] [2,706 \cdot 0,2 - 27,94 \cdot 0,4]}{31,15 \cdot 0,0567 - 3,499 \cdot 0,003132} \right. \\ &+ \left. \frac{[31,15 - 3,499] [-0,06692 \cdot 0,2 + 0,0034243 \cdot 0,4]}{31,15 \cdot 0,0567 - 3,499 \cdot 0,003132} \right\} \\ &\times W \end{aligned}$$

$$\dot{Q}_{1K} = 44,7 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{2K} &= -2\pi \cdot 1,16 \cdot 0,04 \cdot 12,88 \left(25 - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \right) \\ &\times \left\{ \frac{[-0,0001951 + 0,003132] [27,94 \cdot 0,4 - 310,0 \cdot 0,6]}{332,3 \cdot 0,003132 - 31,15 \cdot 0,0001951} \right. \\ &+ \left. \frac{[332,3 - 31,15] [-0,0034243 \cdot 0,4 + 0,00020734 \cdot 0,6]}{332,3 \cdot 0,003132 - 31,15 \cdot 0,0001951} \right\} \\ &\times W \end{aligned}$$

$$\dot{Q}_{2K} = 74,7 \text{ W.}$$

Die Wärmeabgabe für den innersten Kreisring berechnet sich nach Gl. (2.4.-42)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{iK} &= 2\pi \cdot 0,2 \cdot 0,04 \cdot 1,16 \cdot 12,88 \left(25 - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \right) \\ &\times \frac{2,706}{3,499} \text{ W} = 13,5 \text{ W} \end{aligned}$$

und die des äußeren Rohres nach Gl. (2.4.-48)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{aK} &= 2\pi \cdot 0,6 \cdot 0,04 \cdot 1,16 \cdot 12,88 \left(25 - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \right) \\ &\times \frac{0,00020734}{0,0001951} \text{ W} = 55,5 \text{ W.} \end{aligned}$$

Die Aufteilung der abgegebenen Wärme an die Umgebung erfolgt nach Gl. (2.4.-34), so daß

$$\dot{Q}_1 = \frac{44,7 + 74,7 + 13,5 + 55,5}{1 + \frac{1,4}{6,3}} \text{ W} = 154,2 \text{ W}$$

und

$$\dot{Q}_a = \frac{44,7 + 74,7 + 13,5 + 55,5}{1 + \frac{6,3}{1,4}} \text{ W} = 34,2 \text{ W}$$

gelten. Der Wärmedurchgang infolge ungleicher Umgebungstemperaturen ist darin nicht enthalten.

Interessant erscheint ein Vergleich zur Berechnungsmethode für parallele Rohre. Zu diesem Zweck wird die Wärmeabgabe innerhalb eines Rohrregisters nach den Gln. (2.2.-49), (2.2.-52) und (2.2.-53) ermittelt. Zusammenfassend ergeben sich

$$\dot{q} = \frac{2m\delta\lambda}{l} \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \tanh \left(m \frac{l}{2} \right)$$

und mit den vorliegenden Zahlenwerten unter Beachtung von $r_{n+1} - r_n = l$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{2 \cdot 12,88 \cdot 0,04 \cdot 1,16}{0,2} \left(25 - \frac{1,4}{6,3 + 1,4} 10 \right) \\ &\times \tanh \left(12,88 \frac{0,20}{2} \right) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 119 \text{ W/m}^2. \end{aligned}$$

Berechnet man die auf die Flächeneinheit von 1 m^2 bezogene Wärmeabgabe innerhalb der ersten und zweiten Kreisringfläche, so folgen

$$\dot{q}_{1K} = \frac{\dot{Q}_{1K}}{(r_2^2 - r_1^2) \pi} = \frac{44,7}{(0,4^2 - 0,2^2) \pi \text{ m}^2} = 118,6 \text{ W/m}^2$$

und

$$\dot{q}_{2K} = \frac{\dot{Q}_{2K}}{(r_3^2 - r_2^2) \pi} = \frac{74,7}{(0,6^2 - 0,4^2) \pi \text{ m}^2} = 118,9 \text{ W/m}^2,$$

das heißt, die Ergebnisse sind in diesem Falle praktisch gleich $\dot{q}$.

Abschließend seien die Randwärmeabgabe eines geraden und eines kreisförmig gebogenen Rohres gegenübergestellt. Im ersten Fall wird die interessierende Größe durch Gl. (2.2.-74) und für ein gekrümmtes Rohr durch die Gl. (2.4.-48) beschrieben. Für die Rohrlänge gilt

$$2\pi r = b, \quad (2.4.-53)$$

so daß der prozentuale, relative Fehler die Form

$$\begin{aligned} \delta_{\dot{q}} &= \frac{2\pi r \delta \lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) - 2\pi r \delta \lambda m \rightarrow}{2\pi r \delta \lambda m \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \rightarrow} \rightarrow \times \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{K_1(mr)}{K_0(mr)} 100\% \\ &\rightarrow \times \frac{K_1(mr)}{K_0(mr)} \end{aligned} \quad (2.4.-54)$$

$$\delta_{\dot{q}} = \frac{1 - \frac{K_1(mr)}{K_0(mr)}}{\frac{K_1(mr)}{K_0(mr)}} \cdot 100\% = \left(\frac{K_0(mr)}{K_1(mr)} - 1 \right) 100\% \quad (2.4.-55)$$

annimmt.

Die Auswertung dieser Gleichung erfolgte im Bild 2.4.-6. Es wird deutlich, daß sich für gerade Rohre — wie physikalisch logisch — geringere Werte ergeben.

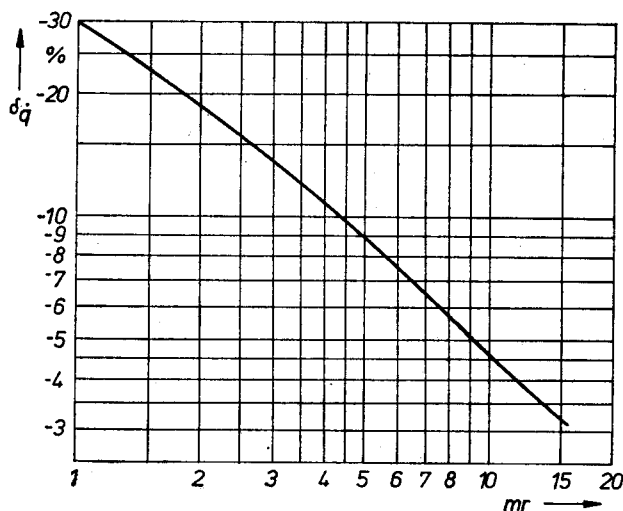


Bild 2.4.-6
Relativer Fehler der Randwärmeabgabe eines kreisförmig verlegten Randrohres gegenüber einem geraden Rohr

2.5. Zweidimensionale Wärmeleitung in parallel berandeten Platten

2.5.1. Ableitung der Temperaturverteilung in einschichtigen Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen

Das Bild 2.5.-1 zeigt einen Querschnitt durch eine homogene, isotrope Massivdecke, in die Heizrohre eingelegt sind. Die Dicke der Decke ist dabei groß gegenüber dem Rohraußendurchmesser. Es leuchtet ein, daß sich ein zweidimensionales Temperaturfeld ausbildet, wobei, ausgehend von den beheizten Rohren, zu den wärmeabgebenden Begrenzungen hin die Wärme strömt. Als Teilwärmedurchgangskoeffizienten werden — wie bei der eindimensionalen Betrachtung — von den Rändern der Massivplatte nach außen gerichtet κ_i und κ_a definiert und, bezogen auf die Ebene der Rohrachsen,

$$\bar{\kappa}_i = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_i} + \frac{\Delta_i}{\lambda}} \quad (2.5.-1)$$

$$\bar{\kappa}_a = \frac{1}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{\Delta_a}{\lambda}} \quad (2.5.-2)$$

geschrieben. Die grundsätzliche Definition der Teilwärmedurchgangskoeffizienten erfolgte im Abschnitt 1.4.

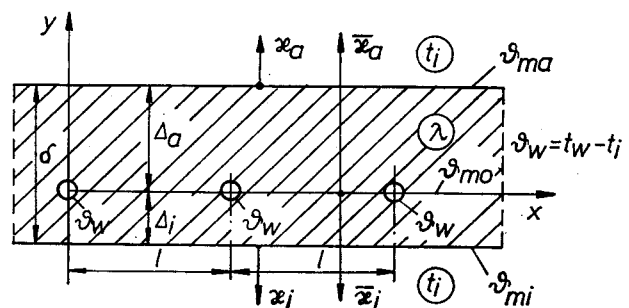


Bild 2.5.-1
Schematische Darstellung der durch Rohre beheizten Massivplatte als Grundlage für die Ableitung der zweidimensionalen Temperaturverteilung

Das zweidimensionale, stationäre Temperaturfeld wird durch eine spezielle Form der FOURIERSchen Differentialgleichung wiedergegeben. Es handelt sich dabei um die LAPLACESche Differentialgleichung für den ebenen Fall

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0. \quad (2.5.-3)$$

Gleichungen dieser Form sind in der Physik außerordentlich bedeutungsvoll, so z. B. bei der Beschreibung von Schwingungen und Wellen. Als allgemeine Lösung kann man nach [5]

$$\vartheta = f(x + iy) + g(x - iy) \quad (2.5.-4)$$

angeben, wobei f und g willkürlich Funktionen ihrer Argumente sind. Praktisch wird so vorgegangen, daß Partikulärlösungen gesucht und durch lineare Verknüpfung nach dem Prinzip der Superposition überlagert werden. Damit ist die Differentialgleichung exakt gelöst, und die unterschiedlichen Randbedingungen werden genau oder mit guter Näherung angepaßt. Im letzteren Fall verwendet man konvergente Reihenentwicklungen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Randbedingung erster Art am Rohrumfang und um Randbedingungen dritter Art an den Begrenzungsflächen der Innen- und Außenseite. Diese räumlichen Grenzbedingungen sind im Abschnitt 1.3. erläutert. Es gelten:

$$\text{am Rohrumfang} \quad \vartheta = \vartheta_w \quad (2.5.-5)$$

$$\text{am äußeren Rand} \quad -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=\Delta_a} = \kappa_a \vartheta$$

$$\text{bzw. mit} \quad h_a = \frac{\kappa_a}{\lambda} \rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=\Delta_a} = -h_a \vartheta \quad (2.5.-6)$$

$$\text{am inneren Rand} \quad \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=-\Delta_i} = \kappa_i \vartheta$$

$$\text{bzw. mit} \quad h_i = \frac{\kappa_i}{\lambda} \rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=-\Delta_i} = h_i \vartheta. \quad (2.5.-7)$$

Eigentlich beschreiben die Randbedingungen dritter Art den Wärmeaustausch zwischen einem Temperaturfeld am Rand eines festen Körpers und dem Übergang zu dem angrenzenden fluiden Medium. Damit müßten eigentlich die Wärmeübergangskoeffizienten α_a und α_i in den Gln. (2.5.-6) und (2.5.-7) statt κ_a und κ_i stehen. Praktisch ist es möglich, daß auf der Massivplatte weitere planparallele Schichten mit relativ schlechter Wärmeleitung in x -Richtung, wie beispielsweise Wärmedämmungen, schwimmender Estrich, Fußbodenbelag, Putz u. a. m., aufgebracht sind. In diesen Schichten wird lediglich eine Wärmeströmung zu den Begrenzungen hin — d. h. in y -Richtung — angenommen. Die dabei vorhandenen Wärmeleitwiderstände werden zur Vereinfachung mit dem eigentlichen Wärmeübergangskoeffizienten zum Teilwärmedurchgangskoeffizienten zusammengefaßt und wie der Übergangskoeffizient behandelt. Physikalisch wird dabei an der zweidimensionalen Wärmeleitung in der Platte festgehalten, lediglich der Wärmeübergang zur Luft — entsprechend der Äquivalenzbetrachtung — verschlechtert.

Die unterschiedlichen Vorzeichen in den Gln. (2.5.-6) und (2.5.-7) erklären sich durch die entgegengesetzten Betrachtungsrichtungen $y = \Delta_a$ und $y = -\Delta_i$, wodurch sich die Differentialquotienten im Vorzeichen unterscheiden.

Lösung der Differentialgleichung

Nach [6] wird die Lösung schrittweise erarbeitet, wobei zunächst nur auf die konstante Temperatur am Rohrumfang bezogen und die Platte als unendlich

dick angenommen wird. Eine partikuläre Lösung stellt

$$\vartheta = A \ln [(x - nl)^2 + y^2] \quad (2.5.-8)$$

dar, wobei n die laufende Zahl des jeweiligen Rohres angibt. Daß es sich bei Gl. (2.5.-8) tatsächlich um eine Lösung der Differentialgleichung handelt, zeigen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = A \frac{2(x - nl)}{(x - nl)^2 + y^2} \quad (2.5.-9)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 2A \frac{(x - nl)^2 + y^2 - (x - nl) 2(x - nl)}{[(x - nl)^2 + y^2]^2} \quad (2.5.-10)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = A \frac{2y}{(x - nl)^2 + y^2} \quad (2.5.-11)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 2A \frac{(x - nl)^2 + y^2 - 2y^2}{[(x - nl)^2 + y^2]^2} \quad (2.5.-12)$$

und Substitution in Gl. (2.5.-3)

$$2A \frac{(x - nl)^2 + y^2 - 2(x - nl)^2 + (x - nl)^2 + y^2 - 2y^2}{[(x - nl)^2 + y^2]^2} = 0. \quad (2.5.-13)$$

Der Ausdruck $[(x - nl)^2 + y^2]$ stellt die auf der x -Achse verschobene Kreisgleichung dar und nimmt auf dem Rohrumfang den Wert r^2 an. Dieser konstante Wert führt in Gl. (2.5.-8) schließlich zu $\vartheta = \text{konst.}$, so daß die Randbedingung erster Art — Gl. (2.5.-5) — erfüllt wird. Im Rohrmittelpunkt ergibt sich eine Unendlichkeitsstelle. Wie schon angedeutet, muß für jedes Rohr n die Gl. (2.5.-8) angeschrieben werden. Die Summe der unendlich vielen Ausdrücke hat ebenfalls unendliche Größe. Physikalisch ist dies durch die alleinige Wärmezufuhr zu begründen, ohne daß eine dem Betrag nach gleich große Wärmeabgabe erfolgt. Es werden deshalb spiegelbildlich zu den Heizrohren gedanklich nach Bild 2.5.-2 Kühlrohre angeordnet.

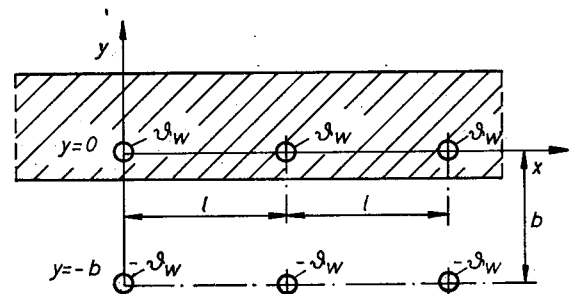


Bild 2.5.-2
Anordnung der vorübergehend eingeführten Kühlrohre mit der Temperatur $-\vartheta_w$

Während den Rohraußenwänden in der Rohrreihe $y = 0$ die Temperatur ϑ_w aufgeprägt ist, haben die Rohre in der Reihe $y = -b$ an der Oberfläche den Wert $(-\vartheta_w)$. Durch Addition und Subtraktion der Gl. (2.5.-8) findet man eine Temperaturfunktion

$$F = F(x, y) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \ln \frac{(x - nl)^2 + (y + b)^2}{(x - nl)^2 + y^2}, \quad (2.5.-14)$$

die die Differentialgleichung erfüllt und näherungsweise den Randbedingungen Rechnung trägt. Für die weitere Anpassung an die ebene Begrenzungsfläche ist es vorteilhaft, die Funktion $F = F(x, y)$ so zu formulieren, daß jeder Ausdruck aus 2 Faktoren, die jeweils nur von x oder von y abhängig sind, besteht. Da die Funktion bezüglich x periodisch ist, wird eine Darstellung als trigonometrische Reihe der Form

$$F = F(x, y) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots \\ \dots + a_s \cos \frac{2\pi s x}{l} + \dots \quad (2.5.-15)$$

gewählt. Im weiteren sind die Koeffizienten zu bestimmen. Der mittlere quadratische Fehler ist dann am kleinsten, wenn die Koeffizienten a_s die sogenannten FOURIER-Koeffizienten der gegebenen Funktionen sind. Für sie gilt

$$a_s = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} F(x, y) \cos \frac{2\pi s x}{l} dx. \quad (2.5.-16)$$

Substituiert man die Gl. (2.5.-14) unter Berücksichtigung, daß die Periodizität (nl) bereits in der Eigenschaft der Reihe enthalten ist und die Grenzen verändert werden, so ergibt sich

$$a_s = \frac{A}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + y^2} \cos \frac{2\pi s x}{l} dx. \quad (2.5.-17)$$

Jetzt wird deutlich, warum in Gl. (2.5.-14) $A/2$ statt A für die Konstante gesetzt wurde, es hatte lediglich den Zweck der Rechenerleichterung. Das Integral in Gl. (2.5.-17) wird nach dem Prinzip der partiellen Integration gelöst

$$a_s = \frac{A}{l} \left[\frac{l}{2\pi s} \ln \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + y^2} \sin \frac{2\pi s x}{l} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ - \frac{A}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l}{2\pi s} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y+b)^2} \\ \times \frac{(x^2 + y^2) 2x - [x^2 + (y+b)^2] \cdot 2x}{[x^2 + y^2]^2} \\ \times \sin \frac{2\pi s x}{l} dx. \quad (2.5.-18)$$

Der erste Summand wird Null, da für die negativen x -Werte infolge von x^2 -Gliedern die Absolutbeträge der Ordinaten gleich denen auf der positiven Seite sind, jedoch wegen $\sin(-x) = -\sin x$ umgekehrtes Vorzeichen haben. Der zweite Term läßt sich vereinfachen, und es gilt

$$a_s = \frac{A}{\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + (y+b)^2} \right] \sin \frac{2\pi s x}{l} dx. \quad (2.5.-19)$$

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \pm \frac{\pi}{2} e^{-|ab|} \quad (2.5.-20)$$

ermöglicht die Auswertung von Gl. (2.5.-19), wobei das Vorzeichen der Ergebnisse mit dem Vorzeichen von b identisch ist. Zusammenfassend erhält man den Koeffizienten

$$a_s = \frac{A}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} - e^{-\frac{2\pi s}{l}|y+b|} \right], \quad (2.5.-21)$$

so daß alle Glieder der FOURIER-Reihe mit $s > 0$ bestimmbar sind. Verbleibt lediglich noch die Berechnung des Anfangsgliedes a_0 . Dieses kann nach der L'HOSPITALSchen Regel aus der Gl. (2.5.-21) zu

$$a_0 = \frac{2\pi A}{l} [|y+b| - |y|] \quad (2.5.-22)$$

ermittelt werden. Damit nimmt Gl. (2.5.-15) die Form

$$F = F(x, y) = \frac{\pi A}{l} [|y+b| - |y|] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A}{s} \\ \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} - e^{-\frac{2\pi s}{l}|y+b|} \right] \cos \frac{2\pi s x}{l} \quad (2.5.-15a)$$

an. Diese Gleichung genügt den Randbedingungen aber noch nicht. Die Voraussetzung zur Anpassung ist jedoch dadurch geschaffen, daß jedes Glied der Summe aus zwei Faktoren besteht, wobei der eine nur von x und der andere nur von y abhängt (Sinn der Reihenentwicklung). Es werden nun noch Zusätze angebracht und Konstanten eingeführt. Lassen sich diese Konstanten so bestimmen, daß sie wirkliche Konstanten sind, d. h. keine Funktionen von x und y darstellen, ist das Problem gelöst. Die Gleichung, die die geforderten Eigenschaften hat, lautet:

$$\vartheta = F(x, y) - \frac{\pi A}{l} [G_a y + G_1] - \frac{\pi A}{l} |y-b| \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y+b|} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \\ \times \cos \left(\frac{2\pi s}{l} x \right). \quad (2.5.-23)$$

Daß g_a und g_1 Funktionen von s sind, widerspricht dem oben Gesagten durchaus nicht, denn s ist nur die laufende Nummer der Glieder der trigonometrischen Reihe. Die Größen G_a , G_1 , $g_a(s)$ und $g_1(s)$ sind so zu bestimmen, daß die Randbedingungen an den Begrenzungsflächen erfüllt werden. Zunächst wird jedoch die Funktion $F(x, y)$ substituiert, so daß die endgültige Temperaturfunktion

$$\vartheta = \frac{\pi A}{l} [|y+b| - |y|] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A}{s} \\ \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} - e^{-\frac{2\pi s}{l}|y+b|} \right] \cos \frac{2\pi s x}{l} - \frac{\pi A}{l}$$

$$\begin{aligned} & \times [G_a y + G_1] - \frac{\pi A}{l} |y + b| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A}{s} \\ & \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l} |y+b|} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} y} + g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l} y} \right] \\ & \times \cos \left(\frac{2\pi s}{l} x \right) \end{aligned} \quad (2.5.-24)$$

bzw. zusammengefaßt

$$\begin{aligned} \vartheta = -A \left\{ \frac{\pi}{l} [G_a y + G_1 + |y|] - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \right. \\ \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l} |y|} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} y} + g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l} y} \right] \\ \times \cos \left(\frac{2\pi s}{l} x \right) \Big\} \end{aligned} \quad (2.5.-25)$$

lautet. Wie sich sofort überblicken läßt, erfüllt jeder Summand dieser Gleichung die LAPLACESche Differentialgleichung der ebenen Form. Gleichfalls sind die Kühlrohre wieder weggelassen, und die Wärmeabfuhr erfolgt nunmehr über die Plattenbegrenzungen. Die Konstanten werden so bestimmt, daß sowohl der Grundaussdruck als auch jedes Glied der unendlichen Reihe der Gl. (2.5.-25) die Randbedingung erfüllt. Die erste Ableitung von ϑ nach der Variablen y liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -A \frac{\pi}{l} \left[G_a + \frac{y}{|y|} \right] - A \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\pi}{l} \\ \times \left[\frac{y}{|y|} e^{-\frac{2\pi s}{l} |y|} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} y} - g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l} y} \right] \\ \times \cos \left(\frac{2\pi s}{l} x \right). \end{aligned} \quad (2.5.-26)$$

Unter Beachtung, daß für die Begrenzungen

$$\text{außen } y = \Delta_a \quad (2.5.-27)$$

und

$$\text{innen } y = -\Delta_1 \quad (2.5.-28)$$

gelten und die Betrachtung des Summenausdruckes der Einfachheit halber an der Stelle $x = 0$ erfolgt, können die Bestimmungsgleichungen nach Gln. (2.5.-6) und (2.5.-7) für die Grundfunktion

$$G_a + 1 = -h_a [G_a \Delta_a + G_1 + \Delta_a] \quad (2.5.-29)$$

$$G_a - 1 = h_1 [-G_a \Delta_1 + G_1 + \Delta_1] \quad (2.5.-30)$$

und für jeden Summanden der Reihe

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{l} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} - g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} \right] \\ = \frac{h_a}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} + g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l} \Delta_a} \right] \end{aligned} \quad (2.5.-31)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{l} \left[-e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} + g_a(s) e^{\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} - g_1(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} \right] \\ = -\frac{h_1}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} + g_a(s) e^{\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} + g_1(s) e^{-\frac{2\pi s}{l} \Delta_1} \right] \end{aligned} \quad (2.5.-32)$$

angeschrieben werden. Das weitere Umformen führt zu den meist angegebenen Formen

$$G_a = \frac{h_a(1 + h_1 \Delta_1) - h_1(1 + h_a \Delta_a)}{h_a(1 + h_1 \Delta_1) + h_1(1 + h_a \Delta_a)} \quad (2.5.-33)$$

$$G_1 = -\frac{2(1 + h_a \Delta_a)(1 + h_1 \Delta_1)}{h_a(1 + h_1 \Delta_1) + h_1(1 + h_a \Delta_a)} \quad (2.5.-34)$$

$$\left(h_a - \frac{2\pi s}{l} \right) (1 + g_a(s)) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_a} + \left(h_a + \frac{2\pi s}{l} \right) g_1(s) = 0 \quad (2.4.-35)$$

$$\left(h_1 - \frac{2\pi s}{l} \right) (1 + g_1(s)) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_1} + \left(h_1 + \frac{2\pi s}{l} \right) g_a(s) = 0. \quad (2.5.-36)$$

Unter Bezugnahme auf die Definitionsgleichungen (2.5.-1) und (2.5.-2) der Teilwärmedurchgangskoeffizienten $\bar{\alpha}_1$ und $\bar{\alpha}_a$ kann man auch angeben:

$$G_a = \frac{\bar{\alpha}_a - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_a + \bar{\alpha}_1} \quad (2.5.-37)$$

$$G_1 = \frac{-2\lambda}{\bar{\alpha}_a + \bar{\alpha}_1}. \quad (2.5.-38)$$

Anmerkung:

Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man auch, wenn die Randbedingungen der Grundfunktion auf die Rohrebene bezogen werden. Dies ist möglich, da es sich um Ausdrücke handelt, die konstant oder linear von y abhängig sind. Damit gelten die Zusammenhänge der eindimensionalen Wärmeleitung im homogenen Körper. Die Randbedingungen Gln. (2.5.-6) und (2.5.-7) erhalten die modifizierten Formen

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0+0} = \bar{\alpha}_a \vartheta \Big|_{y=0+0} \quad (2.5.-39)$$

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{y=0-0} = \bar{\alpha}_1 \vartheta \Big|_{y=0-0}, \quad (2.5.-40)$$

wobei bei den Termen $y/|y|$ die rechts- oder linksseitige Annäherung besonders zu beachten ist. Die analog zu Gln. (2.5.-29) und (2.5.-30) gebildeten Bestimmungsgleichungen nehmen die vereinfachte Gestalt

$$-\lambda(G_a + 1) = \bar{\alpha}_a G_1 \quad \text{und} \quad (2.5.-41)$$

$$\lambda(G_a - 1) = \bar{\alpha}_1 G_1 \quad (2.5.-42)$$

an, woraus sofort die Gln. (2.5.-37) und (2.5.-38) folgen.

Die explizite Darstellung der Konstanten g_1 und g_a ergibt, aus dem Gleichungssystem (2.5.-35) und (2.5.-36) folgend,

$$g_a(s) = \frac{\frac{h_a l + 2\pi s}{h_a l - 2\pi s} e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_1} - e^{-\frac{4\pi s}{l} (\Delta_1 + \Delta_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{l} (\Delta_1 + \Delta_a)} - \frac{h_a l + 2\pi s}{h_a l - 2\pi s} \frac{h_1 l + 2\pi s}{h_1 l - 2\pi s}} \quad (2.5.-43)$$

und

$$g_1(s) = \frac{\frac{h_1 l + 2\pi s}{h_1 l - 2\pi s} e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_a} - e^{-\frac{4\pi s}{l} (\Delta_1 + \Delta_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{l} (\Delta_1 + \Delta_a)} - \frac{h_a l + 2\pi s}{h_a l - 2\pi s} \frac{h_1 l + 2\pi s}{h_1 l - 2\pi s}}. \quad (2.5.-44)$$

Abschließend ist noch die Konstante A zu bestimmen. Hierzu wird die Randbedingung erster Art nach Gl. (2.5.-5) herangezogen. Da die Funktion in x periodisch ist, genügt es, die Randbedingung für das Rohr mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und $y = 0$ zu untersuchen. Zunächst ist es interessant, zu wissen, wie sich die Reihe in Gl. (2.5.-25) in der Nähe des Ursprungs verhält. Im folgenden werden drei Fälle untersucht.

1. $x = 0; y = 0$

Die Reihe erhält die Form

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} + \frac{g_a(s)}{s} + \frac{g_i(s)}{s} \right), \quad (2.5.-45)$$

wobei für $s \rightarrow \infty$ die Ausdrücke $g_a(s)/s$ und $g_i(s)/s \rightarrow 0$ gehen. Die verbleibende Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s} + \dots \quad (2.5.-46)$$

ist divergent, da die Summe der Reihe gegen Unendlich wächst, obwohl das laufende Glied gegen Null geht.

2. $x = 0; y \neq 0$

Die Summanden, die die Terme $g_a(s)$ und $g_i(s)$ enthalten, bleiben unberücksichtigt, da das unter Punkt 1 Gesagte weiterhin gilt. Somit ist nur die Reihe

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|}}{s} \quad (2.5.-47)$$

zu untersuchen. Das D'ALEMBERTSche Kriterium (Quotientenkriterium) ergibt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{s+1}}{a_s} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+1} \frac{e^{-\frac{2\pi(s+1)}{l}|y|}}{e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+1} e^{-\frac{2\pi}{l}|y|} = e^{-\frac{2\pi}{l}|y|} < 1, \end{aligned} \quad (2.5.-48)$$

das heißt, die Reihe konvergiert.

3. $x \neq 0; y \neq 0$

Es kann wiederum auf die Punkte 1 und 2 bezogen werden, so daß nur noch

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|}}{s} \cos\left(\frac{2\pi s}{l} x\right) \quad (2.5.-49)$$

zu betrachten ist. Das Majorantenkriterium besagt, daß die Reihe $\sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos(sx)$ konvergiert, falls $\sum_{s=1}^{\infty} a_s$ absolut konvergent ist. Letzteres wurde jedoch gerade mit Gl. (2.5.-48) bewiesen.

Nachteilig ist allerdings die schwache Konvergenz der Reihe in der Nähe des Ursprungs, also bei kleinen x - und y -Werten. Nach [6] wird deshalb auf die Gleichungsform (2.5.-14) zurückgegriffen. Damit ergibt sich die modifizierte Temperatur zu

chungsform (2.5.-14) zurückgegriffen. Damit ergibt sich die modifizierte Temperatur zu

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_w}{A} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x - nl)^2 + (y + b)^2}{(x - nl)^2 + y^2} \\ &\quad - \frac{\pi}{l} (G_a y + G_i + |y + b|) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y+b|} + g_a e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_i e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l} x\right). \end{aligned} \quad (2.5.-50)$$

Außer dem Ausdruck $\ln(x^2 + y^2)$, für den entlang des Rohrumfanges $\ln r^2$ gilt, ändern sich die übrigen Terme in Ursprungsnähe wenig. Als Näherung werden diese deshalb für $x = y = 0$ berechnet. Damit ergeben sich für den ersten Summenausdruck Rohr bei $n = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2 + 2by + b^2}{x^2 + y^2} &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \ln b \end{aligned}$$

Rohr bei $n = 1, 2, 3, \dots$ und $-1, -2, -3, \dots$ zusammengefaßt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 l^2 + b^2}{n^2 l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{b}{nl} \right)^2 \right].$$

Die Gl. (2.5.-50) nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_w}{A} &= -\ln r + \ln b + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{b}{nl} \right)^2 \right] - \frac{\pi}{l} (G_i + b) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}b} + g_a + g_i \right] \end{aligned} \quad (2.5.-51)$$

an. Letztere kann mit der mathematischen Beziehung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 + \left(\frac{x}{2\pi n} \right)^2 \right] &= \ln(1 - e^{-x}) - \ln x + \frac{x}{2} \\ &= -\ln x + \frac{x}{2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-sx} \end{aligned}$$

über die Analogie $x = \frac{2\pi b}{l}$ zu

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_w}{A} &= -\ln r + \ln b - \ln \frac{2\pi b}{l} + \frac{\pi b}{l} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} e^{-\frac{2\pi s}{l}b} \\ &\quad - \frac{\pi}{l} (G_i + b) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}b} + g_a + g_i \right] \end{aligned} \quad (2.5.-52)$$

bzw.

$$\frac{\vartheta_w}{A} = \ln \frac{l}{2\pi r} - \frac{\pi}{l} G_i + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{g_a(s) + g_i(s)}{s} \quad (2.5.-53)$$

vereinfacht werden. Die mit der Anpassung der Temperatur am Rohrumfang durchgeführte näherungsweise Berechnung führt natürlich zu Fehlern. Nach in [7] wiedergegebenen Untersuchungen sind diese

dann unbedeutend, wenn die Betonüberdeckung größer als der 1,5fache Rohraußenradius r ist (vgl. auch Beispiel 2.5.2.).

Mittlere Übertemperatur

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann die mittlere Übertemperatur

$$\vartheta_m = \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta \, dx \quad (2.5.-54)$$

berechnet werden. Dies auf die nach Gl. (2.5.-25) definierte Temperatur angewandt, ergibt

$$\begin{aligned} \vartheta_m = \frac{A\pi}{l^2} \int_0^l \left\{ -G_a y - G_i - |y| + \frac{l}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \right. \\ \left. \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} + g_a e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_i e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.5.-55)$$

woraus

$$\vartheta_m = \frac{A\pi}{l} [-G_a y - G_i - |y|] \quad (2.5.-56)$$

folgt. Dieses einfache Ergebnis resultiert daraus, daß der gesamte Summenausdruck verschwindet, weil im Intervall $0 \leq x \leq l$ stets Vielfache von 2π als Argument der trigonometrischen Funktion durchlaufen werden.

An der inneren Oberfläche $y = -\Delta_i$ gilt dann

$$\vartheta_{mi} = \frac{A\pi}{l} [G_a \Delta_i - G_i - \Delta_i]. \quad (2.5.-57)$$

Durch Substitution von Gl. (2.5.-30) kann man auch die praktikablere Form schreiben:

$$\vartheta_{mi} = \frac{A\pi}{lh_i} [1 - G_a]. \quad (2.5.-58)$$

An der äußeren Oberfläche $y = \Delta_a$ folgt analog

$$\vartheta_{ma} = \frac{A\pi}{l} [-G_a \Delta_a - G_i - \Delta_a] \quad (2.5.-59)$$

und durch Substitution von Gl. (2.5.-29) schließlich

$$\vartheta_{ma} = \frac{A\pi}{lh_a} [G_a + 1]. \quad (2.5.-60)$$

Bemerkenswert ist, daß man zu den gleichen Ergebnissen gelangt, wenn die mittlere Übertemperatur in der Ebene der Rohrachsen gebildet und nach den Gesetzmäßigkeiten der eindimensionalen Wärmeleitung auf die Oberflächen umgerechnet wird. Es ergeben sich dann die folgenden Schritte:

$$\vartheta_{mo} = -\frac{A\pi}{l} G_i \quad (2.5.-61)$$

Umrechnen entsprechend den Teilwärmedurchgangskoeffizienten

$$\vartheta_{mi} = -\frac{A\pi}{l} G_i \frac{\bar{\kappa}_i}{\kappa_i} \quad (2.5.-62)$$

Substitution der Gl. (2.5.-38) und Erweiterung des Zählers mit $\bar{\kappa}_a$

$$\vartheta_{mi} = \frac{A\pi}{l} \frac{2\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \frac{\bar{\kappa}_i}{\kappa_i} = \frac{A\pi}{l} \frac{\lambda}{\kappa_i} \frac{2\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a - \bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad (2.5.-63)$$

Substitution der Gln. (2.5.-7) und (2.5.-37)

$$\vartheta_{mi} = \frac{A\pi}{lh_i} [1 - G_a], \text{ was zu beweisen war; } \quad (2.5.-58)$$

Umrechnen der Gl. (2.5.-61) entsprechend den Teilwärmedurchgangskoeffizienten

$$\vartheta_{ma} = -\frac{A\pi}{l} G_i \frac{\bar{\kappa}_a}{\kappa_a} \quad (2.5.-64)$$

Substitution der Gl. (2.5.-38) und Erweiterung des Zählers mit $\bar{\kappa}_i$

$$\vartheta_{ma} = \frac{A\pi}{l} \frac{2\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \frac{\bar{\kappa}_a}{\kappa_a} = \frac{A\pi}{l} \frac{\lambda}{\kappa_a} \frac{2\bar{\kappa}_a - \bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_i}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad (2.5.-65)$$

Substitution der Gln. (2.5.-6) und (2.5.-37)

$$\vartheta_{ma} = \frac{A\pi}{lh_a} [G_a + 1], \text{ was zu beweisen war. } \quad (2.5.-60)$$

Diese Ergebnisse sind sehr vorteilhaft, weil sie die Berechnung im weiteren vereinfachen. Dies wird auch bei der Ableitung ungleicher Umgebungstemperaturen deutlich werden. Ursächlich ist dafür die stationäre Wärmeleitung im homogenen, isotropen Körper verantwortlich.

Wärmeabgabe

Die Wärmeabgaben an die Umgebung sind in einfacher Weise berechenbar. So gelten an der Innenseite

$$\dot{q}_i = \bar{\kappa}_i \vartheta_{mo} = \kappa_i \vartheta_{mi} \quad (2.5.-66)$$

$$\dot{q}_i = \frac{2\vartheta_W \pi \lambda \bar{\kappa}_i}{l \left(\ln \frac{l}{2\pi r} + \frac{2\pi \lambda}{l(\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{g_a + g_i}{s} \right) (\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i)} \quad (2.5.-67)$$

Außenseite

$$\dot{q}_a = \bar{\kappa}_a \vartheta_{mo} = \kappa_a \vartheta_{ma} \quad (2.5.-68)$$

$$\dot{q}_a = \frac{2\vartheta_W \pi \lambda \bar{\kappa}_a}{l \left(\ln \frac{l}{2\pi r} + \frac{2\pi \lambda}{l(\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{g_a + g_i}{s} \right) (\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i)} \quad (2.5.-69)$$

Abschließend sei nochmals hervorgehoben, daß sich die Wärmeabgaben nach dem Verhältnis

$$\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_a} = \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_a} \quad (2.5.-70)$$

aufteilen. Damit gelten die analogen Beziehungen wie bei der eindimensionalen Wärmeleitung — „Rippen-theorie“ — nach Abschnitt 2.2.; zum Unterschied sind jetzt lediglich die Teilwärmedurchgangskoeffizienten auf die Rohrebene bezogen worden. Dies war bei der eindimensionalen Betrachtung nicht möglich, da die Rippe in y -Richtung bei konstantem x -Wert überall die gleiche Temperatur aufwies, was theoretisch eine unendlich große Wärmeleitung in y -Richtung bedeutete.

2.5.2. Beispiel

Es ist die Temperaturverteilung in einer Betonplatte, die von wasserdurchströmten 1/2''-Rohren beheizt wird, zu berechnen und zeichnerisch darzustellen. Die Betonplatte ist beiderseits von Luft gleicher Temperatur umgeben. Die Übertemperatur an der Rohraußenwand betrage $\vartheta_w = 100$ K, der Rohrabstand ist mit $l = 0,3$ m festgelegt, und die Lage der Rohre wird durch $\Delta_1 = 0,03$ m sowie $\Delta_a = 0,07$ m fixiert. Die Teilwärmeübergangskoeffizienten sind infolge aufgebrachtener Dämmschichten unterschiedlich. Sie betragen $\kappa_1 = 8$ W/m² K und $\kappa_a = 0,38$ W/m² K. Die Wärmeleitfähigkeit des Betons ist mit $\lambda = 1,4$ W/m K anzunehmen. Abschließend soll die Wärmeabgabe der Platte bestimmt werden.

Lösung

Zur Bestimmung der Konstanten G_a und G_1 sind zunächst die Teilwärmedurchgangskoeffizienten, bezogen auf die Rohrebene, zu bilden. Es gelten nach Gl. (2.5.-1) und Gl. (2.5.-2)

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{0,03}{1,4}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 6,83 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

$$\bar{\kappa}_a = \frac{1}{\frac{1}{0,38} + \frac{0,07}{1,4}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 0,373 \text{ W/m}^2 \text{K},$$

so daß nach Gl. (2.5.-37) und Gl. (2.5.-38)

$$G_a = \frac{0,373 - 6,83}{0,373 + 6,83} = -0,896$$

$$G_1 = \frac{-2 \cdot 1,4}{0,373 + 6,83} = -0,389 \text{ m}$$

folgen. Die Berechnung der Konstanten $g_a(s)$ und $g_1(s)$ ist bedeutend aufwendiger. Als Grundlage dienen die folgenden Werte

$$h_1 l = \frac{8}{1,4} 0,3 = 1,714$$

$$h_a l = \frac{0,38}{1,4} 0,3 = 0,0814$$

$$2\pi = 6,28$$

$$-\frac{4\pi}{l} \Delta_1 = -\frac{4\pi}{0,3} 0,03 = -1,256$$

$$-\frac{4\pi}{l} \Delta_a = -\frac{4\pi}{0,3} 0,07 = -2,931$$

$$-\frac{4\pi}{l} (\Delta_1 + \Delta_a) = -\frac{4\pi}{0,3} 0,1 = -4,187.$$

Damit können die Gln. (2.5.-43) und (2.5.-44) für die laufenden s ausgewertet werden. Es gelten:

$$g_a(1) = \frac{\frac{0,0814 + 6,28}{0,0814 - 6,28} e^{-1,256} - e^{-4,187}}{e^{-4,187} - \frac{0,0814 + 6,28}{0,0814 - 6,28} \frac{1,714 + 6,28}{1,714 - 6,28}} = 0,1726$$

$$g_1(1) = \frac{\frac{1,714 + 6,28}{1,714 - 6,28} e^{-2,931} - e^{-4,187}}{e^{-4,187} - \frac{0,0814 + 6,28}{0,0814 - 6,28} \frac{1,714 + 6,28}{1,714 - 6,28}} = 0,0610.$$

Die weiteren Ergebnisse seien ohne Zwischenrechnung mitgeteilt.

$$g_a(2) = 0,06181 \quad g_1(2) = 0,00298$$

$$g_a(3) = 0,01925 \quad g_1(3) = 0,00015$$

$$g_a(4) = 0,00574 \quad g_1(4) = 0,00001$$

$$g_a(5) = 0,00168 \quad g_1(5) = 0,00000$$

$$g_a(6) = 0,00049 \quad g_1(6) = 0,00000$$

$$g_a(7) = 0,00014 \quad g_1(7) = 0,00000$$

$$g_a(8) = 0,00004 \quad g_1(8) = 0,00000$$

$$g_a(9) = 0,00001 \quad g_1(9) = 0,00000$$

$$g_a(10) = 0,00000 \quad g_1(10) = 0,00000$$

Deutlich wird die gute Konvergenz der Reihe. Die Bestimmung der Konstanten A erfolgt nach Gl. (2.5.-53). Dazu ist die Summe

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{g_a(s) + g_1(s)}{s} = \frac{0,1726 + 0,0610}{1} + \frac{0,06181 + 0,00298}{2} + \frac{0,01925 + 0,00015}{3} + \dots = 0,2743$$

zu bilden, die dann zu folgendem Ergebnis führt:

$$A = \frac{100 \text{ K}}{\ln \frac{0,3}{2\pi \cdot 0,0106} + \frac{\pi}{0,3} 0,389 + 0,2743} = 17,085 \text{ K}.$$

In der weiteren recht umfangreichen Auswertung der Gl. (2.5.-25) wird die Temperatur an der Stelle $x = 0,045$ m, $y = -0,03$ m berechnet. Hierbei ist es wiederum sinnvoll, zuerst den Summenausdruck zu

betrachten. Mit den bekannten Zahlenwerten ergeben sich

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} [e^{-0,6283s} + g_a(s) e^{0,6283s} + g_i(s) e^{-0,6283s}] \times \cos(0,9425s)$$

$$s = 1$$

$$\frac{1}{1} [e^{-0,6283} + 0,1726 e^{0,6283} + 0,0610 e^{-0,6283}] \times \cos 0,9425 = 0,52285$$

$$s = 2$$

$$\frac{1}{2} [e^{-1,2566} + 0,06181 e^{1,2566} + 0,00298 e^{-1,2566}] \times \cos 1,885 = -0,07767$$

$$s = 3$$

$$\frac{1}{3} [e^{-1,8849} + 0,01925 e^{1,8849} + 0,00015 e^{-1,8849}] \times \cos 2,8275 = -0,08834$$

$$s = 4$$

$$\frac{1}{4} [e^{-2,5132} + 0,00574 e^{2,5132} + 0,00001 e^{-2,5132}] \times \cos 3,770 = -0,03071.$$

Die Weiterführung der Berechnungen bis $s = 40$ und die Summe der Ergebnisse liefert

$$\sum_{s=1}^{40} \frac{1}{s} [e^{-0,6283s} + g_a(s) e^{0,6283s} + g_i(s) e^{-0,6283s}] \times \cos(0,9425s) = 0,335.$$

Eine Betrachtung bis $s = 10$ hätte bereits eine ausreichende Genauigkeit ergeben. Endgültig kann Gl. (2.5.-25) ausgewertet werden. Die Übertemperatur an der untersuchten Stelle beträgt

$$\vartheta = -17,085 \text{ K}$$

$$\times \left\{ \frac{\pi}{0,3} [+0,896 \cdot 0,03 - 0,389 + 0,03] - 0,335 \right\}$$

$$= 65,1 \text{ K}.$$

Weitere Ergebnisse wurden maschinell berechnet. Sie sind in Abhängigkeit von den Koordinaten x und y in der nachfolgenden Tabelle wiedergegeben.

Der eingerahmte Wert entspricht dem manuell vorgeführten Beispiel. Die Ermittlung von Übertemperaturen bei größeren x -Werten kann aus Symmetriegründen entfallen. Deutlich werden die Abweichungen an der Rohrwand $x = 0 \text{ m}$, $y = \pm 0,01 \text{ m}$, die durch

y m	$\vartheta(x, y)$ bei x in m										
	0	0,015	0,03	0,045	0,06	0,075	0,09	0,105	0,12	0,135	0,15
0,07	78,6	77,8	75,9	73,2	70,2	67,4	64,8	62,7	61,2	60,3	60,0
0,05	80,3	79,4	77,0	73,8	70,5	67,4	64,7	62,6	61,0	60,1	59,8
0,03	85,9	83,8	79,3	74,6	70,3	66,7	63,7	61,4	59,7	58,7	58,4
0,01	102,0	91,7	81,5	74,4	68,9	64,7	61,4	59,0	57,3	56,2	55,9
-0,01	100,3	89,7	79,0	71,3	65,5	61,1	57,7	55,3	53,6	52,6	52,2
-0,03	81,7	78,4	71,6	65,1	59,8	55,7	52,5	50,2	48,6	47,7	47,4

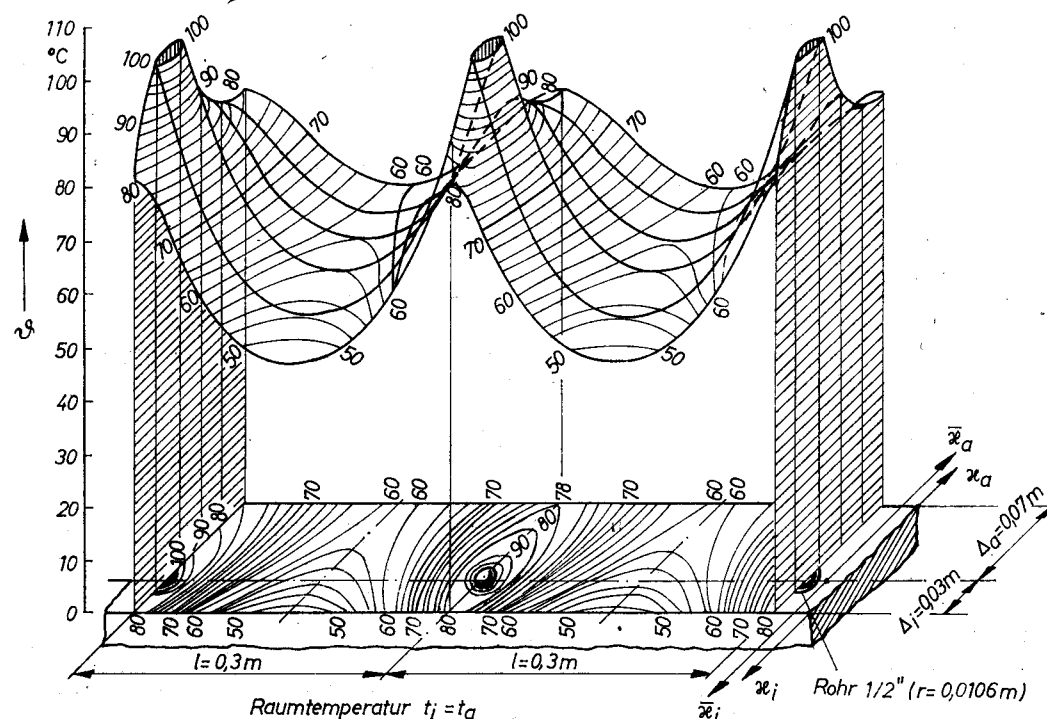


Bild 2.5.-3
Querschnitt einer beheizten Decke und Darstellung des zugehörigen Temperaturverlaufs unter Annahme zweidimensionaler Wärmeleitung

die bei der Ableitung der Konstanten A eingeführten Näherungen hervorgerufen werden. Die Ergebnisse sind im Bild 2.5.-3 anschaulich dargestellt. Bedeutend einfacher verläuft die Berechnung der Wärmeabgabe. Dies ist natürlich von großem Vorteil, da die üblichen technischen Berechnungen in erster Linie Kenntnisse über den Wärmestrom zum Ziel haben. So beträgt die mittlere Übertemperatur in der Rohrebene ($y = 0$ m) nach Gl. (2.5.-61)

$$\vartheta_{mo} = 17,085 \frac{\pi}{0,3} 0,389 \text{ K} = 69,6 \text{ K},$$

woraus mit Gl. (2.5.-66) und Gl. (2.5.-68) sofort die Wärmeströme folgen:

$$q_1 = 6,83 \cdot 69,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 475,4 \text{ W/m}^2$$

$$q_a = 0,373 \cdot 69,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 26,0 \text{ W/m}^2.$$

2.5.3. Ableitung der Temperaturverteilung in mehrschichtigen Platten bei gleichen Umgebungstemperaturen

Die weiteren Betrachtungen sollten nur dort erfolgen, wo das Wärmeleitvermögen der einzelnen Schichten nicht zu große Unterschiede aufweist. Dies bedeutet, daß die betrachteten Schichten in merklicher Größe an einem Wärmetransport in x -Richtung teilhaben. Handelt es sich dagegen um aufgebrauchte Schichten kleiner Dicke bzw. niedriger Wärmeleitkoeffizienten, so sollte der Einfachheit halber die Berechnung nach Abschnitt 2.5.1. erfolgen, und die genannten Schichten in dem Teilwärmedurchgangskoeffizient κ erfaßt werden.

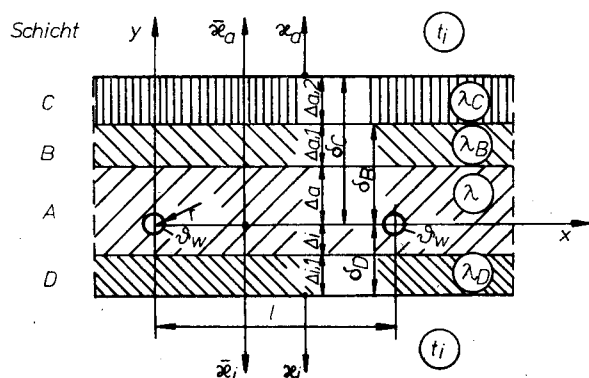


Bild 2.5.-4
Schematische Darstellung der durch Rohre beheizten mehrschichtigen Massivplatte als Grundlage für die Ableitung der zweidimensionalen Temperaturverteilung

Als Grundlage für die Ableitung dient der im Bild 2.5.-4 gezeigte Schichtenaufbau. Selbstverständlich können sich entsprechend dem oben Gesagten weitere parallele Schichten mit kleinem Wärmeleitvermögen anschließen. Diese werden dann nur in y -Richtung als wärmeleitfähig betrachtet und wiederum durch den Koeffizienten κ erfaßt.

An den Schichtengrenzen gelten folgende thermodynamische Bedingungen:

1. die Temperaturen beider Schichten an der Berührungsstelle sind gleich, z. B.

$$\vartheta_B(x, y = \delta_B) = \vartheta_C(x, y = \delta_B) \quad (2.5.-71)$$

2. der aus einer Schicht austretende Wärmestrom ist gleich dem in die angrenzende Schicht eintretenden Wärmestrom (Randbedingung zweiter Art), z. B.

$$\lambda_B \frac{\partial \vartheta_B}{\partial y} \Big|_{x, y = \delta_B} = \lambda_C \frac{\partial \vartheta_C}{\partial y} \Big|_{x, y = \delta_B} \quad (2.5.-72)$$

Ebenfalls in [6] wurde die Lösung der Einzelplatte auf den vorliegenden Fall weiterentwickelt. Während die Temperaturverteilung in der Schicht A selbstverständlich der Gl. (2.5.-25) entspricht, weisen die Temperaturverteilungen in den Schichten B, C und D Modifizierungen auf. So werden der Ausdruck $\exp\left(-\frac{2\pi s}{l}|y|\right)$, der der Beschreibung der Wärmequelle diente, in den rohrfreien Schichten unterdrückt, der Wert $|y|$ entsprechend dem Vorzeichen eingesetzt und zur Verringerung der Konstanten G_a für alle Schichten beibehalten, jedoch entsprechend Gl. (2.5.-72) mit den in Frage kommenden Wärmeleitkoeffizienten umgerechnet. Zusammenfassend gilt:

Schicht A

$$\begin{aligned} \frac{\partial_A l}{A\pi} = & -G_a y - G_1 - |y| + \frac{l}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \\ & \times \left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} + g_a(s) e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_1(s) e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right) \end{aligned} \quad (2.5.-73)$$

Schicht B

$$\begin{aligned} \frac{\partial_B l}{A\pi} = & -\frac{\lambda}{\lambda_B} (G_a + 1) y - G_{B1} + \frac{l}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \\ & \times \left[g_{Ba}(s) e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_{B1}(s) e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right) \end{aligned} \quad (2.5.-74)$$

Schicht C

$$\begin{aligned} \frac{\partial_C l}{A\pi} = & -\frac{\lambda}{\lambda_C} (G_a + 1) y - G_{C1} + \frac{l}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \\ & \times \left[g_{Ca}(s) e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_{C1}(s) e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right) \end{aligned} \quad (2.5.-75)$$

Schicht D

$$\begin{aligned} \frac{\partial_D l}{A\pi} = & -\frac{\lambda}{\lambda_D} (G_a - 1) y - G_{D1} + \frac{l}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \\ & \times \left[g_{Da}(s) e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_{D1}(s) e^{\frac{2\pi s}{l}y} \right] \cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right). \end{aligned} \quad (2.5.-76)$$

An den Angrenzungsflächen kann man analog den Gln. (2.5.-6) und (2.5.-7)

$$\frac{\partial \vartheta_C}{\partial y} \Big|_{y=\delta_C} = -h_C \vartheta_C \quad \text{mit} \quad h_C = \frac{\kappa_a}{\lambda_C} \quad (2.5.-77)$$

bzw.

$$\left. \frac{\partial \vartheta_D}{\partial y} \right|_{y=-\delta_D} = h_D \vartheta_D \quad \text{mit} \quad h_D = \frac{\kappa_1}{\lambda_D} \quad (2.5.-78)$$

schreiben. Außerdem gelten natürlich die durch die Gln. (2.5.-71) und (2.5.-72) beschriebenen Randbedingungen. Aus dem Gleichungssystem sind unendlich viele Bestimmungsgleichungen zu gewinnen, denn die von x unabhängigen Ausdrücke müssen den Randbedingungen ebenso genügen wie die Reihenausdrücke für jede Laufvariable s . In der Grundfunktion wurde die Randbedingung nach Gl. (2.5.-72) bereits eingearbeitet, so daß schließlich das Gleichungssystem

$$-\frac{\lambda}{\lambda_C} (G_a + 1) = h_C \left[\frac{\lambda}{\lambda_C} (G_a + 1) \delta_C + G_{Ci} \right] \quad (2.5.-79)$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_D} (G_a - 1) = h_D \left[\frac{\lambda}{\lambda_D} (G_a - 1) \delta_D - G_{Di} \right] \quad (2.5.-80)$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_C} (G_a + 1) \delta_B - G_{Ci} = -\frac{\lambda}{\lambda_B} (G_a + 1) \delta_B - G_{Bi} \quad (2.5.-81)$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_B} (G_a + 1) \Delta_a - G_{Bi} = -(G_a + 1) \Delta_a - G_i \quad (2.5.-82)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_D} (G_a - 1) \Delta_i - G_{Di} = -(1 - G_a) \Delta_i - G_i \quad (2.5.-83)$$

aus den Gln. (2.5.-77), (2.5.-78) und (2.5.-71) entsteht. Da in der Praxis hauptsächlich die Wärmeabgabe, kaum jedoch die genaue Temperaturverteilung interessiert, brauchen nicht alle Konstanten explizit dargestellt zu werden, das heißt, im vorliegenden Falle benötigt man lediglich Kenntnisse über G_a und G_i . Die rechentechnisch aufwendige Lösung des Gleichungssystems ergibt interessanterweise die gleichen Werte wie bei der einschichtigen Platte

$$G_a = \frac{\bar{\kappa}_a - \bar{\kappa}_i}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad \text{und} \quad G_i = \frac{-2\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad (2.5.-84)$$

und
(2.5.-85)

Analog sind die Konstanten g_a , g_{Ba} , g_{Ca} , g_{Da} , g_i , g_{Bi} , g_C und g_{Di} bestimmbar. Als Bestimmungsgleichungen müssen allerdings die Randbedingungen nach Gl. (2.5.-72) mit aufgenommen werden. Zweckmäßigerweise wird man stets die Stelle x wählen, für die $\cos\left(\frac{2\pi s}{l} x\right) = 1$ gilt.

Das Gleichungssystem lautet für jedes s :

$$\left(h_C - \frac{2\pi s}{l} \right) g_{Ca}(s) e^{-\frac{4\pi s}{l} \delta_C} + \left(h_C + \frac{2\pi s}{l} \right) g_{Ci}(s) = 0 \quad (2.5.-86)$$

$$\lambda_C g_{Ci}(s) - \lambda_B g_{Bi}(s) - (\lambda_C g_{Ca}(s) - \lambda_B g_{Ba}(s)) e^{-\frac{4\pi s}{l} \delta_B} = 0 \quad (2.5.-87)$$

$$g_{Ci}(s) - g_{Bi}(s) + (g_{Ca}(s) - g_{Ba}(s)) e^{-\frac{4\pi s}{l} \delta_B} = 0 \quad (2.5.-88)$$

$$\lambda_B g_{Bi}(s) - \lambda g_i(s) - (\lambda_B g_{Ba}(s) - \lambda g_a(s) - \lambda) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_a} = 0 \quad (2.5.-89)$$

$$g_{Bi}(s) - g_i(s) + (g_{Ba}(s) - g_a(s) - 1) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_a} = 0 \quad (2.5.-90)$$

$$\lambda g_a(s) - \lambda_D g_{Da}(s) + (\lambda_D g_{Di}(s) - \lambda g_i(s) - \lambda) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_i} = 0 \quad (2.5.-91)$$

$$g_{Da}(s) - g_a(s) + (g_{Di} - g_i - 1) e^{-\frac{4\pi s}{l} \Delta_i} = 0 \quad (2.5.-92)$$

$$\left(h_D - \frac{2\pi s}{l} \right) g_{Di}(s) e^{-\frac{4\pi s}{l} \delta_D} + \left(h_D + \frac{2\pi s}{l} \right) g_{Da}(s) = 0. \quad (2.5.-93)$$

Bezüglich der Lösung des Systems von Bestimmungsgleichungen beachte man auch den Abschnitt 2.8.

Zur Berechnung der Konstanten A gilt selbstverständlich weiterhin die Gl. (2.5.-53), da die Heizrohre in der Schicht A liegen und dort der Temperaturverlauf durch dieselbe Gleichung wie bei der einschichtigen Platte beschrieben wird (Identität der Gln. (2.5.-25) und (2.5.-73)).

Mittlere Übertemperatur

Die mittleren Übertemperaturen ergeben sich an den Oberflächen über dem Integralmittelwert analog der Gl. (2.5.-54), wobei für die Temperaturfunktion ϑ die Gl. (2.5.-75) mit $\vartheta_C(x, y = \delta_C)$ bzw. die Gl. (2.5.-76) mit $\vartheta_D(x, y = -\delta_D)$ einzusetzen sind. Der einfacheren Rechnung wegen wird jedoch der Mittelwert für $\vartheta_A(x, y = 0)$ — d. h. bezogen auf die Rohrebene — gebildet. Ganz analog der Ableitung von Gl. (2.5.-61) bis Gl. (2.5.-65) ergeben sich für

$$y = 0$$

$$\vartheta_{mo} = -\frac{A \pi}{l} G_i = \frac{A \pi}{l} \frac{2\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad (2.5.-94)$$

$$y = -\delta_D$$

$$\vartheta_{mi} = \frac{\bar{\kappa}_i}{\kappa_i} \vartheta_{mo} = \frac{A \pi \lambda}{l \kappa_i} [1 - G_a] \quad (2.5.-95)$$

$$y = \delta_C$$

$$\vartheta_{ma} = \frac{\bar{\kappa}_a}{\kappa_a} \vartheta_{mo} = \frac{A \pi \lambda}{l \kappa_a} [1 + G_a]. \quad (2.5.-96)$$

Die Wärmeströme an die Umgebung können weiterhin nach den Gln. (2.5.-66) bis (2.5.-70) berechnet werden.

2.5.4. Ableitung der Temperaturverteilung bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Liegt der Fall ungleicher Temperaturen auf beiden Seiten der Massivplatte vor, so wird ein scheinbarer Wärmestrom von der Umgebung höherer Temperatur

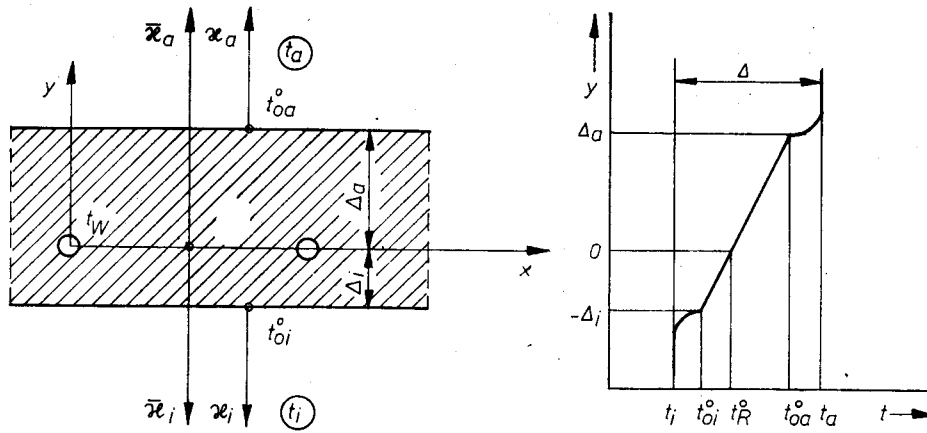


Bild 2.5.-5

Temperaturverlauf durch eine unbeheizte Massivdecke infolge des Temperaturunterschiedes $\Delta = t_a - t_i$

zur Umgebung niedriger Temperatur quer durch die Massivplatte zu den für gleiche Umgebungstemperaturen errechneten Wärmeströmen hinzukommen. Scheinbar deshalb, weil sich ein solcher Wärmestrom in Wirklichkeit nicht ausbildet, sondern ursächlich die Temperaturverteilung in der Platte wegen des äußeren Potentials verändert wird. Theoretisch einwandfrei läßt sich dies, ausgehend von Gl. (2.5.-25), ableiten, wobei allerdings die Randbedingungen auf die veränderten Temperaturwerte zu bringen sind. Einfacher ist jedoch die eingangs erwähnte Superposition der Wärmeströme [6]. Da die Lufttemperaturen an den Außenseiten keine Funktionen der x -Koordinate sind, ergibt sich eine besonders einfache Berechnung. Zunächst werden auf der Grundlage des Bildes 2.5.-5 die Temperaturen an den Plattenoberflächen und in der Rohrebene bei unbeheizten Rohren berechnet. Es gelten

$$t_{oi}^{\circ} = t_i + (t_a - t_i) \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} = t_i + \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-97)$$

$$t_R^{\circ} = t_i + (t_a - t_i) \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} = t_i + \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} = t_a - \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-98)$$

$$t_{oa}^{\circ} = t_a - (t_a - t_i) \frac{\frac{1}{\kappa_a}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} = t_a - \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_a}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-99)$$

Damit stellt sich die Übertemperatur an der Rohrwand nach Gl. (2.5.-53) als

$$\vartheta_w = t_w - t_R^{\circ} \quad (2.5.-100)$$

dar. Die mittleren Übertemperaturen an den Oberflächen folgen dann mit den Gln. (2.5.-58) und

(2.5.-60), bezogen zur jeweiligen Umgebung, zu

$$\vartheta_{mi} = t_{oi}^{\circ} + \frac{A\pi}{lh_i} (1 - G_a) - t_i \quad (2.5.-101)$$

$$\vartheta_{ma} = t_{oa}^{\circ} + \frac{A\pi}{lh_a} (1 + G_a) - t_a. \quad (2.5.-102)$$

Weiterhin kann die mittlere Übertemperatur in der Rohrebene von Interesse sein, wobei zu unterscheiden ist, auf welche Umgebung Bezug genommen wird. Es gelten mit der grundlegenden Gleichung (2.5.-61)

$$\vartheta_{mo,i} = t_R^{\circ} - \frac{A\pi}{l} G_i - t_i \quad (2.5.-103)$$

bzw.

$$\vartheta_{mo,a} = t_R^{\circ} - \frac{A\pi}{l} G_i - t_a. \quad (2.5.-104)$$

Substituiert man die Gln. (2.5.-97) bis (2.5.-99), so ergeben sich abschließend

$$\vartheta_{mi} = \frac{A\pi}{lh_i} (1 - G_a) + \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-105)$$

$$\vartheta_{ma} = \frac{A\pi}{lh_a} (G_a + 1) - \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_a}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-106)$$

$$\vartheta_{mo,i} = -\frac{A\pi}{l} G_i + \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-107)$$

$$\vartheta_{mo,a} = -\frac{A\pi}{l} G_i - \Delta \frac{\frac{1}{\kappa_i}}{\frac{1}{\kappa_a} + \frac{1}{\kappa_i}} \quad (2.5.-108)$$

Die Wärmeströme errechnen sich schließlich analog zu den Gln. (2.5.-66) und (2.5.-68)

$$\dot{q}_i = \kappa_i \vartheta_{mi} = \kappa_i \vartheta_{mo,i} \quad (2.5.-109)$$

$$\dot{q}_a = \kappa_a \vartheta_{ma} = \kappa_a \vartheta_{mo,a} \quad (2.5.-110)$$

Bestehen die Platten aus mehreren Schichten, so sind für $h_i = \kappa_i/\lambda$ und für $h_a = \kappa_a/\lambda$ zu setzen, wobei die Bezeichnungen im Bild 2.5.-4 definiert werden.

2.5.5. Beispiel

Ausgehend vom Beispiel 2.5.2., sind die Oberflächen-temperaturen und die Wärmeströme zu berechnen, wenn die Rohrtemperatur $t_w = 110^\circ\text{C}$ sowie die Umgebungstemperaturen $t_a = -10^\circ\text{C}$ und $t_l = 20^\circ\text{C}$ betragen.

• Lösung

Mit der Temperaturdifferenz

$$\Delta = t_a - t_l = (-10 - 20) \text{ K} = -30 \text{ K}$$

und den Teilwärmedurchgangskoeffizienten

$$\kappa_l = 8 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_a = 0,38 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\bar{\kappa}_l = 6,83 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\kappa}_a = 0,373 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

können die mittleren Temperaturen bei unbeheizten Rohren nach den Gln. (2.5.-97) bis (2.5.-99) in den charakteristischen Ebenen berechnet werden. Es gelten

$$t_{ol}^\circ = 20^\circ\text{C} - 30 \text{ K} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{0,373} + \frac{1}{6,83}} = 18,67^\circ\text{C}$$

$$t_R^\circ = 20^\circ\text{C} - 30 \text{ K} \frac{0,373}{6,83 + 0,373} \\ = -10^\circ\text{C} + 30 \text{ K} \frac{6,83}{6,83 + 0,373} = 18,45^\circ\text{C}$$

$$t_{oa}^\circ = -10^\circ\text{C} + 30 \text{ K} \frac{\frac{1}{0,38}}{\frac{1}{0,373} + \frac{1}{6,83}} = 17,92^\circ\text{C}$$

Die Übertemperatur der Rohrwand ergibt sich nach Gl. (2.5.-100)

$$\vartheta_w = 110^\circ\text{C} - 18,45^\circ\text{C} = 91,55 \text{ K},$$

womit in Anlehnung an Beispiel 2.5.2. die Konstante A durch Umrechnung des dortigen Ergebnisses

$$A = 17,085 \text{ K} \frac{91,55 \text{ K}}{100 \text{ K}} = 15,64 \text{ K}$$

gewonnen werden kann. Die weiteren Werte

$$G_a = -0,896$$

$$G_l = -0,389 \text{ m}$$

$$h_a l = 0,0814$$

$$h_l l = 1,714$$

sind dem genannten Beispiel direkt entnehmbar. Somit lassen sich die Gln. (2.5.-101) bis (2.5.-104) aus-

werten. Es gelten

$$\vartheta_{ml} = 18,67^\circ\text{C} + \frac{15,64 \pi}{1,714} (1 + 0,896) \text{ K} \\ - 20^\circ\text{C} = 53,02 \text{ K}$$

$$\vartheta_{ma} = 17,92^\circ\text{C} + \frac{15,64 \pi}{0,0814} (1 - 0,896) \text{ K} \\ + 10^\circ\text{C} = 90,70 \text{ K}$$

$$\vartheta_{mo,l} = 18,45^\circ\text{C} + \frac{15,64 \pi}{0,3} 0,389 \text{ K} \\ - 20^\circ\text{C} = 62,16 \text{ K}$$

$$\vartheta_{mo,a} = 18,45^\circ\text{C} + \frac{15,64 \pi}{0,3} 0,389 \text{ K} \\ + 10^\circ\text{C} = 92,16 \text{ K},$$

womit sich die Wärmeströme nach den Gln. (2.5.-109) und (2.5.-110)

$$\dot{q}_l = 8 \cdot 53,02 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 424,2 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_l = 6,83 \cdot 62,16 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 424,6 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_a = 0,38 \cdot 90,70 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 34,5 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_a = 0,373 \cdot 92,16 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 34,4 \text{ W/m}^2$$

ergeben. Die gleichen Ergebnisse erhält man auch bei folgender Betrachtung:

Die Wärmeabgabe der Heizrohre ist bei gleicher Übertemperatur ϑ_w in der Rohrebene gleich. Bei $t_l = t_a$ muß demzufolge auch $t_R = t_l = t_a$ gelten, wenn die Rohre nicht beheizt werden. Damit ergeben sich die rechnerischen Wärmeströme zu

$$\dot{q}_l^* = - \frac{A\pi}{l} G_l \bar{\kappa}_l = 15,64 \pi \frac{0,389}{0,3} 6,83 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ = 435,2 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_a^* = - \frac{A\pi}{l} G_a \bar{\kappa}_a = 15,64 \pi \frac{0,389}{0,3} 0,373 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ = 23,8 \text{ W/m}^2.$$

In Wirklichkeit tritt wegen der ungleichen Umgebungstemperatur noch ein Wärmestrom der Größe

$$\dot{q}^0 = \frac{1}{\frac{1}{0,373} + \frac{1}{6,83}} 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10,6 \text{ W/m}^2$$

von innen nach außen auf. Überlagerungen dieser Wärmeströme liefern schließlich die tatsächlich der Umgebung zufließenden Wärmemengen

$$\dot{q}_l = \dot{q}_l^* - \dot{q}^0 = (435,2 - 10,6) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 424,6 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_a = \dot{q}_a^* + \dot{q}^0 = (23,8 + 10,6) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 34,4 \text{ W/m}^2.$$

3. Wärmeabgabe von Lamellenelementen und Strahlplatten

3.1. Allgemeines

Die bekannt gewordenen Berechnungsmethoden gehen stets von der eindimensionalen Wärmeleitung in einer Rippe aus. Dies ist zweifellos richtig. Problematisch und umstritten sind jedoch die Annahmen, die als Grundlage der wärmetechnischen Berechnung getroffen wurden. Sie beziehen sich auf folgende Details:

Die Rippenfußtemperatur bei Lamellenelementen und Strahlplatten liegt niedriger als die Heizmedientemperatur. Sie ist abhängig von der Intensität des Kontaktes zwischen Rohr und Metalllamelle. In [3] wird vorgeschlagen, im Falle einer Schweißverbindung die rechnerische Rippenfußtemperatur gleich der Heizmedientemperatur zu setzen und bei einer form- und kraftschlüssigen Verbindung zwischen Lamelle und Rohr den Wert herabzusetzen, wobei quantitativ nichts angegeben wird. In [20] finden sich Meßwerte für spezielle Konstruktionen (1/2"-Stahlrohre und Aluminiumlamelle). MACSKÁSY [21] gab für kraft- und formschlüssige Verbindungen ein Berechnungsverfahren an, das jedoch für die praktische Durchführung Meßwerte über äquivalente Wärmeleitwiderstände des Spaltes zwischen Rohr und übergestülpter Lamelle voraussetzt. WINDISCH [18] arbeitete ein Berechnungsmodell für die Wärmeleitung in einem Heizrohr mit angeschweißter Blechlamelle aus. Die Lösung stimmt exakt, wenn die Heizrohre auf der Plattenoberseite liegen, von der Wärmedämmschicht vollkommen eingehüllt sind und die stoffschlüssige Verbindung durch eine Rollnaht hergestellt wurde. Leider liegen diese Bedingungen nur in Sonderfällen vor, so daß in der Regel weitere Approximationen zu treffen sind.

Bei Lamellenelementen gibt es Ausführungsformen, bei denen die Lamellen gestützt sind und die Zwischenräume durch Baustoffe, wie bewehrten Putz oder Formteile aus Gips, verschlossen werden. In anderen Fällen gehen die Lamellen zwar durch, sind jedoch mit anderen Baumaterialien beschichtet. Die bisher üblichen Näherungen, diese Materialien für die Wärmeleitung in Lamellenrichtung nicht mit zu berücksichtigen bzw. bei gestützten Lamellen die Wärmeleitung nur in den verbleibenden Zwischenräumen anzusetzen und als Wärmeübertragungsfläche an die Baustoffelemente nur die Stirnfläche der Metallrippe anzusetzen [20], entsprechen nicht ganz den Realitäten.

Mit Hilfe der Darstellungen des Abschnittes 8.2., der den konstruktiven Aufbau typischer Lamellenelemente zeigt, kann eine gruppenweise Zusammenfassung spezieller Approximationen erfolgen.

Bevor Berechnungsmodelle vorgestellt werden, ist jedoch unbedingt darauf zu verweisen, daß zahlreiche Annahmen getroffen und mitunter Versuchsergebnisse eingearbeitet werden müssen. Letztere beziehen sich vor allem auf die Wärmeübertragung vom Rohr an die Lamelle bei form- und kraftschlüssiger Verbin-

dung oder von der Lamelle an die Putzschicht, das heißt überall dort, wo kleine, meist fertigungsbedingte Luftspalte vorhanden sind. Sie betragen als Mittelwert mindestens 0,5 mm. Man sollte deshalb in jedem Fall Wärmeleistungstabellen für die vorgefertigten Lamellenelemente — genauso wie beispielsweise bei konventionellen Plattenheizkörpern — auf der Grundlage von Meßergebnissen aufstellen.

Die zu entwickelnden Berechnungsverfahren haben ihre Existenzberechtigung für Neuentwicklungen sowie für Umrechnungen, Interpolationen und Extrapolationen von Meßergebnissen für den jeweiligen projektspezifischen Anwendungsfall und nicht zuletzt für Optimierungsuntersuchungen bezüglich des Materialeinsatzes.

Anmerkung

Ein besonders diffiziles Problem stellen die Wärmeübergangskoeffizienten dar. Die allgemeingültige diagrammatische Zusammenfassung von α_K und α_S ist leider nicht möglich, da Lufttemperaturen und mittlere Strahlungstemperaturen der Umfassungskonstruktionen speziell in Großräumen von Fall zu Fall verschieden große Unterschiede aufweisen. Des weiteren bestehen bezüglich der Angaben über den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten große Differenzen. Es sei an die hier zutreffenden Gln. (1.2.–26), (1.2.–31) und (1.2.–34) erinnert. Letztere wird in [20] für freihängende, waagerechte Strahlplatten nochmals unterstrichen. In [22] gegebene neue Meßwerte bedürfen der weiteren Untermuerung. Schließlich sei noch auf die Abhängigkeit von der Luftbewegung, die in großen Hallen nicht nur von der Heizfläche verursacht wird, verwiesen. Bis zum Abschluß der notwendigen weiteren Untersuchungen wird empfohlen, die Gl. (1.2.–33) zu verwenden.

3.2. Ableitung der Rippenfußtemperatur

Ausgehend von den praktischen Ausführungsformen entsprechend den Bildern 8.2.–1 und 8.3.–1, sind form- und kraftschlüssige Verbindungen sowie stoffschlüssige Verbindungen zu unterscheiden.

3.2.1. Rippenfußtemperatur bei form- und kraftschlüssiger Verbindung

Im Bild 3.2.–1 ist ein Heizrohr mit einer Blechlamelle, die das Rohr mit einem Winkel von $2\varphi_0$ symmetrisch umschließt, dargestellt. Das Heizmedium im Rohrinneren hat die Temperatur t_f . An der äußeren ummantelten Rohroberfläche liege die Temperatur t_w vor. Sie wird näherungsweise auf der Grundlage der rein radialen Wärmeleitung in der Rohrwand definiert. In Wirklichkeit tritt in der Rohrwand ein kombinierter radialer und tangentialer Wärmestrom auf. Die Approximation scheint jedoch berechtigt, da im Gegensatz zu einer engbegrenzten Schweißverbindung hier eine große Berührungsfläche vorliegt, an der weiterhin ein relativ großer Wärmeübergangswiderstand infolge des geringen Luftspaltes vorhanden ist. Dadurch sind die Wärmestromdichten im Übergabebereich verhältnismäßig klein, so daß die tangentielle Komponente des Wärmeflusses in der Rohrwand — im

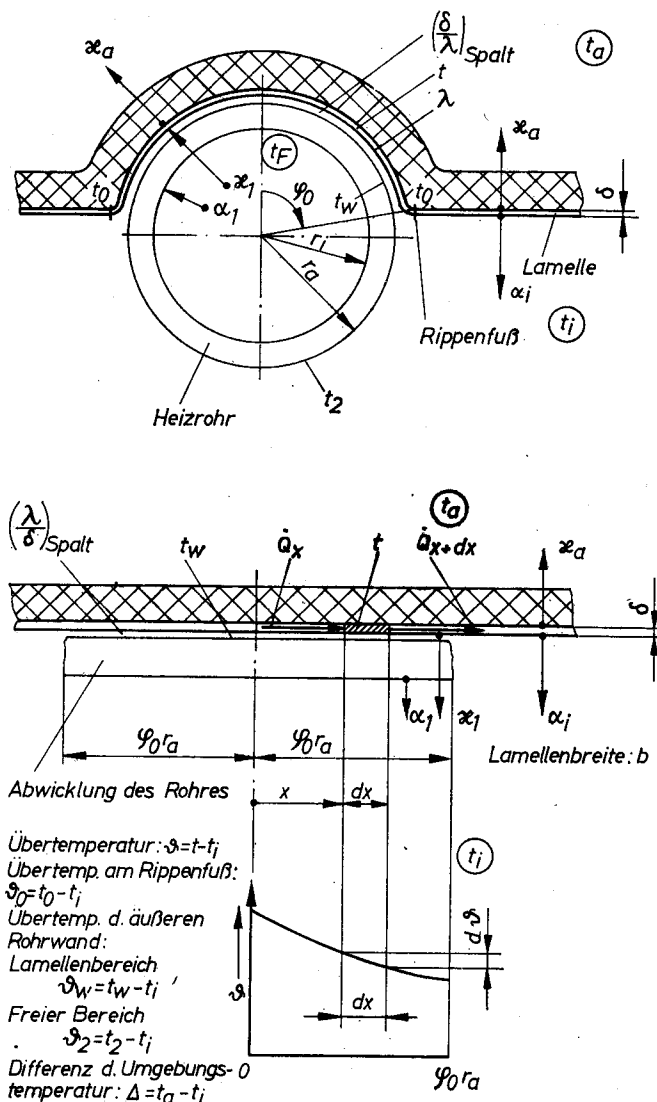


Bild 3.2.-1
Schematische Darstellung der thermodynamischen Verhältnisse beim Wärmeübergang von einem Heizrohr an eine umhüllende Blechlamelle

Gegensatz zur stoffschlüssigen Verbindung — ebenfalls klein sein wird. Daß sie existiert, liegt vor allem darin begründet, daß die Wärmestromdichte des nicht von der Lamelle umhüllten Rohrabschnittes in radialer Richtung geringer ist als entlang der Blechberührungsfläche. Eine weitere Verfeinerung des Modells erscheint jedoch wenig sinnvoll, da fertigungstechnische Ungleichmäßigkeiten — so beispielsweise bezüglich des Spaltes zwischen Rohr und Lamelle — größeren Einfluß haben dürften. Außerdem werden verbliebene Fehler infolge vereinfachter Näherungen durch die experimentelle Bestimmung des äquivalenten Wärmeleitwiderstandes durch die Rückrechnung nach dem gleichen Berechnungsmodell notwendigerweise kompensiert. Eine quantitative Übersicht über die Verhältnisse liefert das Beispiel 3.2.2. — Der Wärmeübergang nach außen (Bild 3.2.-1) ist durch den Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ_a (Definition im Abschnitt 1.4.) gekennzeichnet. Er besteht bei einer Strahlplatte aus dem Wärmeleitwiderstand der aufgetragenen Wärmedämmmatte und dem äußeren Wärmeübergangswiderstand. Handelt es sich beispielsweise um eine Lamellenkonstruktion, die einer Roh-

decke untergehängt ist (vgl. Bild 8.2.-1, Variante A, C, E), so sind die entsprechenden Teilwiderstände mit zu summieren.

Der Wärmeübergang nach innen wurde als einfacher Wärmeübergangskoeffizient α_i angesetzt. Bei der nachfolgenden Ermittlung der Rippenfußtemperatur t_0 ist diese Größe allerdings bedeutungslos. Benötigt wird der Teilwärmedurchgangskoeffizient κ_i , der vom Heizmedium zur Lamelle definiert ist. Er besteht somit aus dem Wärmeübergang von der Flüssigkeit zur Rohrwand α_1 [Gl. (1.2.-45)], dem Wärmeleitwiderstand der Rohrwand und dem Widerstand des Spaltes. Für Letzteren liegen experimentelle Ergebnisse vor. Nach [21] und [17] wurden für Strahlplatten aus Stahl Wärmeleitwiderstände $(\delta/\lambda)_{\text{Spalt}} = 0,0017$ bis $0,0026 \text{ m}^2 \text{ K/W}$ gemessen. Aus Sicherheitsgründen wird der Wert $0,0025 \text{ m}^2 \text{ K/W}$ empfohlen. Als optimale Umschlingungslängen werden in [21] für $1/2''$ - und $3/4''$ -Heizrohre 28 mm und für $1''$ -Rohre 34 mm angegeben. In [20] teilt man Meßergebnisse einer Stramaxdecke (Variante E, Bild 8.2.-1) mit. Die Umschlingungslänge der Aluminiumlamelle am $1/2''$ -Heizrohr betrug 45 bis 50 mm. Es ergab sich $(\delta/\lambda)_{\text{Spalt}} = 0,0035 \text{ m}^2 \text{ K/W}$. Die Ergebnisse sind erklärbar, da bei größerer Umschlingung die fertigungstechnische Genauigkeit zurückgeht und die Verbindung im letzteren Fall auch nur formschlüssig erfolgte. Bei den gemessenen Strahlplatten war außerdem noch ein Kraftschluß vorhanden. Der besseren Anschaulichkeit halber wurde im Bild 3.2.-1 weiterhin die Abwicklung der Rohroberfläche aufgezeichnet. Damit kann die Laufvariable x von 0 bis $\varphi_0 r_a$ eingeführt werden. Zur einfacheren mathematischen Darstellung ist es weiterhin zweckmäßig, Übertemperaturen einzuführen. Die Definitionen sind im Bild 3.2.-1 vermerkt. Schließlich treten folgende Wärmeströme am bezeichneten infinitesimal kleinen Element auf, wenn für die Lamellenquerschnittsfläche $A = b \cdot \delta$ gilt:

eintretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{d\vartheta}{dx} \quad (3.2.-1)$$

austretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) \quad (3.2.-2)$$

Wärmestrom nach außen

$$d\dot{Q}_a = \kappa_a (t - t_a) b \cdot dx = \kappa_a (\vartheta - \Delta) b \cdot dx \quad (3.2.-3)$$

mit

$$t - t_a = t - t_i - (t_a - t_i) = \vartheta - \Delta \quad (3.2.-4)$$

Wärmestrom vom Heizmedium

$$\begin{aligned} d\dot{Q}_H &= \frac{1}{\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Spalt R/BL}} + \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Rohr}} + \frac{1}{\alpha_1}} (t - t_F) b dx \\ &= \kappa_i (\vartheta - \vartheta_F) b dx \end{aligned} \quad (3.2.-5)$$

mit

$$t - t_F = t - t_i - (t_F - t_i) = \vartheta - \vartheta_F \quad (3.2.-6)$$

und

$$\kappa_1 = \frac{1}{\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{SpaltR/BL}} + \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Rohr}} + \frac{1}{\alpha_1}} \quad (3.2.-7)$$

Weiterhin gilt die Bilanz

$$d\dot{Q}_a + d\dot{Q}_H = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}, \quad (3.2.-8)$$

die nach Einsetzen der entsprechenden Summanden die Form

$$[\kappa_a(\vartheta - \Delta) + \kappa_1(\vartheta - \vartheta_F)] b = \lambda A \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \quad (3.2.-9)$$

sowie

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \vartheta \frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda\delta} = -\Delta \frac{\kappa_a}{\lambda\delta} - \vartheta_F \frac{\kappa_1}{\lambda\delta} \quad (3.2.-10)$$

annimmt.

Lösung der Differentialgleichung

Die inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist schrittweise zu bearbeiten. Als Lösung der homogenen Differentialgleichung kann Gl. (2.2.-13)

$$\vartheta = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} \quad (3.2.-11)$$

analog übernommen werden, wobei jetzt

$$n^2 = \frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda\delta} \quad (3.2.-12)$$

gilt. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\vartheta = \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-13)$$

Damit kann man die allgemeine Lösung von Gl. (3.2.-10) anschreiben

$$\vartheta = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-14)$$

Definitionsgemäß gilt die Randbedingung

$$\vartheta_{x=\varphi_0 r_a} = \vartheta_0. \quad (3.2.-15)$$

Weiterhin kann vereinfachend die Symmetriebedingung

$$\left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.2.-16)$$

zur Bestimmung der Konstanten herangezogen werden. In die Gl. (3.2.-14) eingesetzt, ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$\vartheta_0 = C_1 e^{n\varphi_0 r_a} + C_2 e^{-n\varphi_0 r_a} + \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-17)$$

$$0 = C_1 - C_2, \quad (3.2.-18)$$

woraus sich

$$C_1 = C_2 = \frac{\vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1}}{e^{n\varphi_0 r_a} + e^{-n\varphi_0 r_a}} \quad (3.2.-18a)$$

ableitet. Die Substitution in Gl. (3.2.-14) ergibt dann stufenweise

$$\vartheta = \left\{ \vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right\} \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{e^{n\varphi_0 r_a} + e^{-n\varphi_0 r_a}} + \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-19)$$

und

$$\vartheta = \left\{ \vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right\} \frac{\cosh(nx)}{\cosh(n\varphi_0 r_a)} + \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-20)$$

Interessanter als der Temperaturverlauf ist der Wärmestrom, der am sogenannten Rippenfuß an die Lamelle übergeben wird. Er ist nach zwei verschiedenen Methoden ermittelbar.

Wärmestrom im Lamellenquerschnitt am Rippenfuß

Es gilt der Ansatz:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0 &= -\lambda b \delta \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=\varphi_0 r_a} \\ &= -\lambda b \delta \left[\vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right] \tanh(n\varphi_0 r_a) n \end{aligned} \quad (3.2.-21)$$

$$\dot{Q}_0 = -\lambda b \delta \left[\vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right] \tanh(n\varphi_0 r_a) \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda\delta}} \quad (3.2.-22)$$

$$\dot{Q}_0 = -\sqrt{(\kappa_a + \kappa_1)\lambda\delta} b \left[\vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right] \tanh(n\varphi_0 r_a). \quad (3.2.-23)$$

Wärmestrom an die Lamelle im Rohrbereich

Zunächst muß der integrale Mittelwert der Lamellentemperatur berechnet werden:

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\varphi_0 r_a} \int_0^{\varphi_0 r_a} \vartheta dx \quad (3.2.-24)$$

$$\bar{\vartheta} = \left\{ \vartheta_0 - \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right\} \frac{\tanh(n\varphi_0 r_a)}{n\varphi_0 r_a} + \frac{\Delta\kappa_a + \vartheta_F\kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \quad (3.2.-25)$$

Entlang der Berührungsfläche strömt vom Rohrinneren zur Blechlamelle Wärme. Gleichzeitig fließt von der Lamelle nach außen Wärme. Der Differenzbetrag stellt den Wärmestrom dar, der am Fußpunkt

durch lineare Wärmeleitung weitergegeben wird. Es gilt:

$$\dot{Q}_0 = \{(\vartheta_F - \bar{\vartheta}) \kappa_1 - (\bar{\vartheta} - \Delta) \kappa_a\} b \varphi_0 r_a \quad (3.2.-26)$$

$$\dot{Q}_0 = -(\kappa_a + \kappa_1) \left[\vartheta_0 - \frac{\Delta \kappa_a + \vartheta_F \kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right] \frac{\tanh(n \varphi_0 r_a)}{n \varphi_0 r_a} b \varphi_0 r_a \quad (3.2.-27)$$

$$\dot{Q}_0 = -\sqrt{(\kappa_a + \kappa_1) \lambda \delta} b \left[\vartheta_0 - \frac{\Delta \kappa_a + \vartheta_F \kappa_1}{\kappa_a + \kappa_1} \right] \tanh(n \varphi_0 r_a) \quad (3.2.-28)$$

Wie zu erwarten, besteht Identität zwischen den Gln. (3.2.-23) und (3.2.-28).

Heizmedientemperatur

Bei der praktischen Bemessung ist die Wärmeabgabe der Lamelle, die sich zwischen zwei Rohren erstreckt, durch die wärmetechnische Berechnung bekannt. Zugehörig muß dabei auch die Rippenfußtemperatur vorausgesetzt werden. Das bedeutet, daß $\dot{Q}_0 = f(\vartheta_0)$ gilt und daß, ausgehend von diesen Größen, die eigentlich interessierende Heizmedientemperatur zu ermitteln ist. Aus Gl. (3.2.-28) läßt sich

$$\vartheta_F = \left\{ \frac{\dot{Q}_0}{b \sqrt{(\kappa_a + \kappa_1) \lambda \delta} \tanh(n \varphi_0 r_a)} + \vartheta_0 \right\} \times \frac{(\kappa_a + \kappa_1) - \Delta \frac{\kappa_a}{\kappa_1}}{\kappa_1} \quad (3.2.-29)$$

eliminieren.

Anmerkung

Es sind auch Konstruktionen möglich, bei denen die Blechlamelle das Heizrohr nicht auf der äußeren, sondern auf der inneren Seite teilweise umhüllt. Die Lösungen sind dann natürlich den abgeleiteten Gleichungen sehr ähnlich. Es müssen lediglich folgende Veränderungen erfolgen:

$$\kappa_a \rightarrow \bar{\kappa}_1 \quad \text{und} \quad \Delta = 0$$

Dabei stellt $\bar{\kappa}_1$ den Teilwärmedurchgangskoeffizienten dar, der von der im Rohrbereich liegenden Blechlamelle zur inneren Umgebung gebildet wird.

3.2.2. Beispiel

Die Wärmeabgabe einer halben Lamelle (Skizze im Bild 3.2.-2) beträgt auf $b = 1$ m bei einer Rippenfußtemperatur von $t_0 = 150^\circ\text{C}$ und einer Raumtemperatur $t_1 = t_a = 20^\circ\text{C}$ $\dot{Q}_0 = 90$ W. Der äußere Teilwärmedurchgangskoeffizient ist mit $\kappa_a = 1,35$ W/m² K anzunehmen. Die Stahlblechlamelle hat eine Dicke von $\delta = 0,001$ m. Das verwendete Rohr weist die Durchmesser $d_a = 0,0213$ m und $d_i = 0,0157$ m auf. Der Wärmeleitkoeffizient beträgt $\lambda = 50$ W/m K. Die Strömungsgeschwindigkeit liegt mit $w = 0,06$ m/s fest. Der Umschlingungswinkel, gerechnet im Bogenmaß,

ist mit $\varphi_0 = 0,7$ anzunehmen. Es sind die Heizmedientemperatur, die mittlere Übertemperatur und der Temperaturverlauf im Stahlblech im Bereich von $x = 0$ bis $x = \varphi_0 r_a$ zu berechnen.

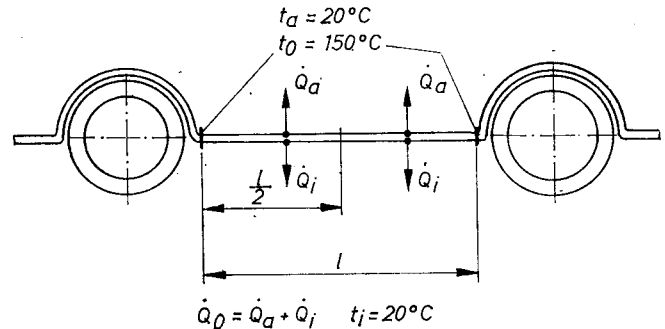


Bild 3.2.-2
Prinzipische Skizze zu Beispiel 3.2.2.

Lösung

Zunächst muß der Teilwärmedurchgangskoeffizient κ_1 nach Gl. (3.2.-7) bestimmt werden. Dazu ist α_1 nötig. Um diese Ermittlung nach Gl. (1.2.-45) vorzunehmen, muß die Wassertemperatur t_F vorab geschätzt werden.

1. Schätzung: $t_F = 180^\circ\text{C}$

$$\alpha_1 = 3364 \cdot 0,06^{0,85} (1 + 0,014 \cdot 180) \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 1084 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{0,0025 + \frac{0,0213 - 0,0157}{2 \cdot 50} + \frac{1}{1084}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 287 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

Nach Gl. (3.2.-12) folgt

$$n = \sqrt{\frac{1,35 + 287}{50 \cdot 0,001}} \frac{1}{\text{m}} = 75,9 \text{ m}^{-1},$$

womit Gl. (3.2.-29) auswertbar ist.

$$\vartheta_F = \left\{ \frac{90}{1 \sqrt{(1,35 + 287) 50 \cdot 0,001} \tanh(75,9 \cdot 0,7 \cdot 0,0107)} + 130 \right\} \cdot \frac{1,35 + 287}{287} \text{ K}$$

$$\vartheta_F = 177 \text{ K} \rightarrow t_F = 197^\circ\text{C}$$

2. Schätzung: $t_F = 197^\circ\text{C}$

$$\alpha_1 = 3364 \cdot 0,06^{0,85} (1 + 0,014 \cdot 197) \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 1157 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{0,0025 + \frac{0,0213 - 0,0157}{2 \cdot 50} - \frac{1}{1157}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 292 \text{ W/m}^2 \text{K}$$

$$n = \sqrt{\frac{1,35 + 292}{50 \cdot 0,001} \frac{1}{m}} = 76,6 \text{ m}^{-1}$$

$$\vartheta_F = \left\{ \frac{90}{1 \sqrt{(1,35 + 292) 50 \cdot 0,001} \tanh(76,6 \cdot 0,7 \cdot 0,0107)} + 130 \right\} \frac{1,35 + 292}{292} \text{ K}$$

$$\vartheta_F = 176 \text{ K} \rightarrow t_F = 196^\circ \text{C}.$$

Damit stimmen Schätzung und Ergebnis überein. Die mittlere Übertemperatur berechnet sich nach Gl. (3.2.-25)

$$\bar{\vartheta} = \left\{ 130 \text{ K} - \frac{176 \cdot 292}{1,35 + 292} \text{ K} \right\} \frac{\tanh(76,6 \cdot 0,7 \cdot 0,0107)}{(76,6 \cdot 0,7 \cdot 0,0107)} + \frac{176 \cdot 292}{1,35 + 292} \text{ K}$$

$$\bar{\vartheta} = 134,4 \text{ K}.$$

Der gesuchte Temperaturverlauf $t = t(x)$ ist nach Gl. (3.2.-20) zu ermitteln. Die laufende Koordinate bewegt sich in den Grenzen von $x = 0 \text{ m}$ bis $x = 0,7 \cdot 0,0107 \text{ m} = 0,0075 \text{ m}$. Es wird in Schritten von $0,001 \text{ m}$ vorgegangen, so daß gelten:

x in m	0	0,001	0,002	0,003	0,004
$n \cdot x$	0	0,766	1,532	2,298	3,064
ϑ in K	136,6	136,4	136,1	135,5	134,7
t in $^\circ\text{C}$	156,6	156,4	156,1	155,5	154,7

x in m	0,005	0,006	0,007	0,0075
$n \cdot x$	0,3830	0,4596	0,5362	0,5745
ϑ in K	133,7	132,4	130,9	130,0
t in $^\circ\text{C}$	153,7	152,4	150,9	150,0

Die Ergebnisse sind im Bild 3.2.-3 aufgezeichnet. Die Berechnung der äußeren Rohrwandtemperatur im Lamellenbereich kann entsprechend der Bilanzgleichung

$$\alpha_1(\vartheta_F - \vartheta) = \frac{1}{\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Spalt}}} (\vartheta_W - \vartheta) \quad (3.2.-30)$$

nach

$$\vartheta_W = \alpha_1 \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Spalt}} \cdot (\vartheta_F - \vartheta) + \vartheta \quad (3.2.-31)$$

ermittelt werden. Mit den vorher errechneten Werten ergeben sich:

x in m	0	0,001	0,002	0,003	0,004
ϑ_W in K	165,4	165,3	165,2	165,1	164,8

x in m	0,005	0,006	0,007	0,0075
ϑ_W in K	164,6	164,2	163,8	163,6

Der Übertemperaturverlauf ist ebenfalls im Bild 3.2.-3 grafisch dargestellt.

Die relative Schwankung der Übertemperatur entlang des umhüllten Rohrumfangs beträgt nur

$$\delta_{\vartheta_W} = \frac{165,4 - 163,6}{163,6} 100\% = 1,1\%.$$

Am freiliegenden Rohrteil wird die Übertemperatur ϑ_2 allerdings einen höheren Wert aufweisen. Nimmt man den Wärmeübergangskoeffizienten mit $\alpha_1 = 13 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ an, so folgt aus der Wärmestrombilanz

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Rohr}} + \frac{1}{\alpha_1}} \vartheta_F \quad (3.2.-32)$$

der Wert

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\frac{1}{13} + \frac{0,0213 - 0,0157}{2 \cdot 50} + \frac{1}{1157}} \frac{176}{13} \text{ K} = 173,9 \text{ K}.$$

Der größte Unterschied beträgt somit

$$\delta_{\vartheta_2} = \frac{173,9 - 163,6}{163,6} 100\% = 6,3\%.$$

Diese Unterschiede bewirken, wie eingangs bereits bemerkt, natürlich eine Abweichung vom rein radialen Wärmestrom im Rohr. Die Folge wäre eine geringfügig höhere Rippenfußtemperatur. Da man sich auf der „sicheren Seite“ befindet und die Abweichungen

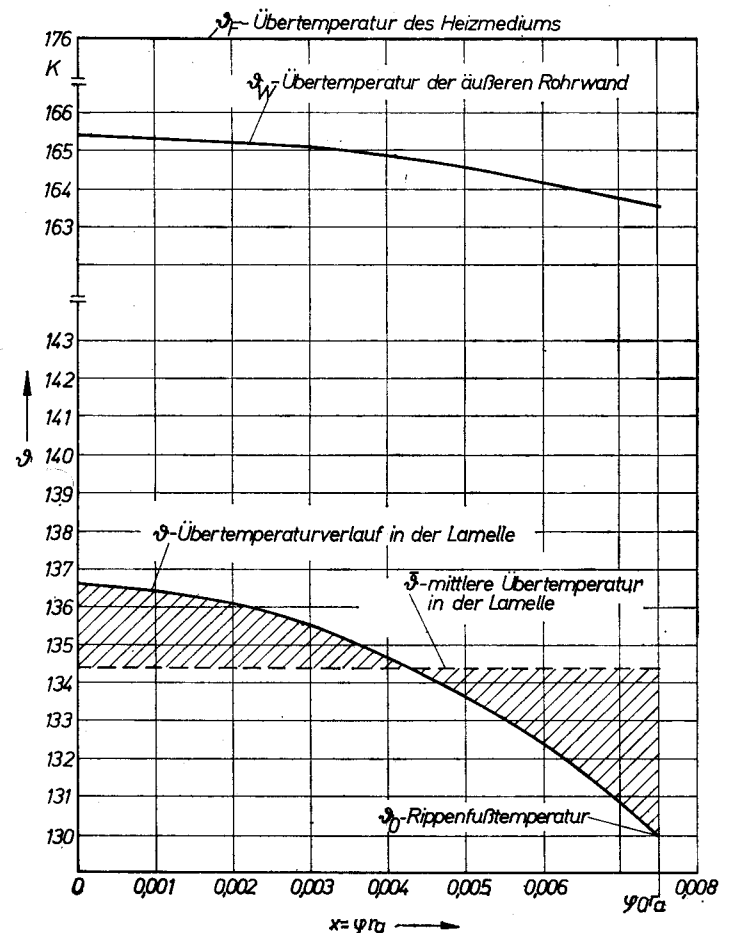


Bild 3.2.-3
Temperaturverläufe als Ergebnisse des Beispiels 3.2.2.

gegenüber den praktisch bedingten Unregelmäßigkeiten klein sind, kann das zugrunde gelegte Modell bedenkenlos beibehalten werden.

3.2.3. Rippenfußtemperatur bei stoffschlüssiger Verbindung

Die geometrischen Verhältnisse bei einer zwischen Lamelle und Heizrohr hergestellten Schweißverbindung sind im Bild 3.2.-4 dargestellt. Die Schweißnahtbreite wird durch den Winkel $2 \cdot \varphi_0$ charakterisiert. Ihre wahre Länge ist damit $2\varphi_0 r_a$. Das Heizmedium hat wiederum die Temperatur t_F . Die Rohrwandtemperaturen seien mit t_1 und t_2 bezeichnet.

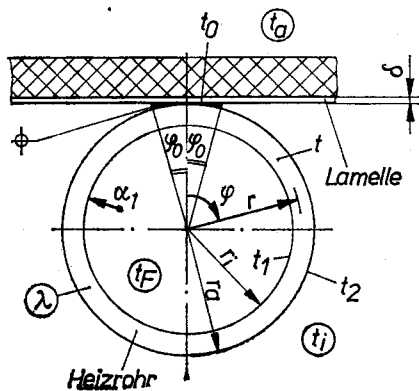


Bild 3.2.-4
Schematische Darstellung eines Heizrohres mit angeschweißter Blechlamelle

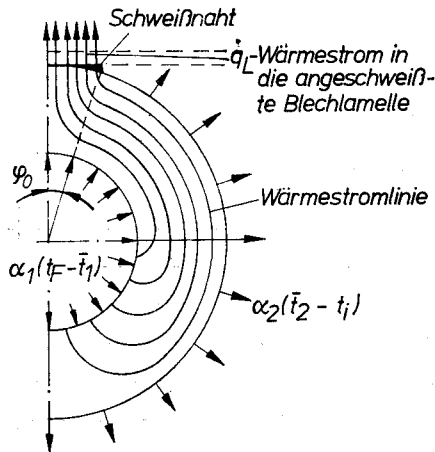


Bild 3.2.-5
Qualitative thermodynamische Verhältnisse in einem Heizrohr mit angeschweißter Blechlamelle

Da sich die Wärmeübertragungsfläche nur auf die Schweißnahtfläche konzentriert, wird ein Wärmestrom in der Rohrwand mit einer dominierenden tangentialen Komponente auftreten. Einen qualitativen Einblick in die zu erwartenden thermodynamischen Verhältnisse gibt Bild 3.2.-5. In [18] wird für diese Verhältnisse eine Lösung ausgearbeitet. Sie ist in groben Schritten nachfolgend wiedergegeben. Das Temperaturfeld in der Heizrohrwandung ist

quellenfrei und stationär. Weiterhin wird vereinfachend die Temperaturänderung in Richtung der Rohrachse unberücksichtigt gelassen, so daß die Differentialgleichung (1.3.-7) reduziert die Form

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.2.-33)$$

erhält.

Es gelten weiterhin folgende Symmetrie- und Randbedingungen:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } \varphi = 0 \text{ und } r_1 < r < r_a \quad (3.2.-34)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \text{ für } \varphi = \pi \text{ und } r_1 < r < r_a \quad (3.2.-35)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\alpha_1}{\lambda} (t_F - t) = 0 \text{ für } r = r_1 \text{ und } 0 < \varphi < \pi \quad (3.2.-36)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda} (t - t_1) = 0 \text{ für } r = r_a \text{ und } \varphi_0 < \varphi < \pi \quad (3.2.-37)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = f(\varphi) \text{ für } r = r_a \text{ und } 0 < \varphi < \varphi_0. \quad (3.2.-38)$$

Zur Vereinfachung wurden außerdem dimensionslose Darstellungen für die Temperatur

$$\vartheta = \frac{t - \bar{t}_2}{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}, \quad (3.2.-39)$$

mit $\bar{t}_2$ der integralen Mitteltemperatur am äußeren und $\bar{t}_1$ der integralen Mitteltemperatur am inneren Rohrand, sowie für den Radius

$$r' = \frac{r}{r_1} \quad (3.2.-40)$$

gewählt. Die Gl. (3.2.-33) erhält dann die Form

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial \vartheta}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.2.-41)$$

Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung der LAPLACESchen Differentialgleichung in Zylinderkoordinaten kann über einen Produktansatz zur Trennung der beiden unabhängigen Variablen erfolgen:

$$\vartheta(r', \varphi) = \vartheta_r(r') \vartheta_\varphi(\varphi). \quad (3.2.-42)$$

Setzt man diesen Ansatz in Gl. (3.2.-41) ein, so ergibt sich

$$\vartheta_\varphi \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial r'^2} + \frac{\vartheta_\varphi}{r'} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r'} + \frac{\vartheta_r}{r'^2} \frac{\partial^2 \vartheta_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.2.-43)$$

bzw.

$$\frac{r'^2}{\vartheta_r} \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial r'^2} + \frac{r'}{\vartheta_r} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r'} = - \frac{1}{\vartheta_\varphi} \frac{\partial^2 \vartheta_\varphi}{\partial \varphi^2} = \omega^2. \quad (3.2.-44)$$

Die partielle homogene Differentialgleichung wird im weiteren schrittweise über die gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen erarbeitet:

$$r'^2 \frac{\partial^2 \vartheta_r}{\partial r'^2} + r' \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r'} - \omega^2 \vartheta_r = 0 \quad (3.2.-45)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\varphi}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \vartheta_\varphi = 0. \quad (3.2.-46)$$

Wählt man die Ansätze

$$\vartheta_r = r'^{\lambda_r} \text{ und } \vartheta_\varphi = e^{i\varphi}, \quad (3.2.-47)$$

so ergeben sich die Gln. (3.2.-45) und (3.2.-46) zu

$$\lambda_r(\lambda_r - 1) r'^2 r'^{\lambda_r-2} + \lambda_r r' r'^{\lambda_r-1} - \omega^2 r'^{\lambda_r} = 0 \quad (3.2.-48)$$

$$\lambda_\varphi^2 e^{i\varphi} + \omega^2 e^{i\varphi} = 0. \quad (3.2.-49)$$

Daraus folgen sofort die charakteristischen Gleichungen

$$\lambda_r(\lambda_r - 1) + \lambda_r - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_r = \pm \omega \quad (3.2.-50)$$

$$\lambda_\varphi^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_\varphi = \pm i\omega. \quad (3.2.-51)$$

Die Lösungen der beiden Differentialgleichungen lassen sich somit anschreiben:

$$\vartheta_r = C_1^* r'^{\omega} + C_2^* r'^{-\omega} \quad (3.2.-52)$$

$$\vartheta_\varphi = C_3^* e^{i\omega\varphi} + C_4^* e^{-i\omega\varphi}. \quad (3.2.-53)$$

Unter Verwendung der mathematischen Beziehungen

$$r'^\omega = e^{\omega \ln r'} \text{ bzw. } r'^{-\omega} = e^{-\omega \ln r'} \quad (3.2.-54)$$

und der EULERSchen Relation folgen

$$\begin{aligned} \vartheta_r &= C_1^* e^{\omega \ln r'} + C_2^* e^{-\omega \ln r'} \\ &= (C_I + C_{II}) e^{\omega \ln r'} + (C_I - C_{II}) e^{-\omega \ln r'} \end{aligned}$$

$$\vartheta_r = C_I (e^{\omega \ln r'} + e^{-\omega \ln r'}) + C_{II} (e^{\omega \ln r'} - e^{-\omega \ln r'}) \quad (3.2.-55)$$

$$\vartheta_r = C_I \cosh(\omega \ln r') + C_2 \sinh(\omega \ln r') \quad (3.2.-56)$$

und

$$\vartheta_\varphi = (C_{III} + C_{IV}) e^{i\omega\varphi} + (C_{III} - C_{IV}) e^{-i\omega\varphi} \quad (3.2.-57)$$

$$\vartheta_\varphi = C_3 \cos(\omega\varphi) + \underbrace{C_4^* \sin(\omega\varphi)}_{\text{entfällt im Reellen}}. \quad (3.2.-58)$$

Zur Anpassung des Temperaturfeldes an die gegebenen Randbedingungen sind noch spezielle Lösungen der Differentialgleichung additiv zur gefundenen Lösung hinzuzufügen. Folgende einfache Ansätze erfüllen ebenfalls die Gl. (3.2.-41)

$$\vartheta = A$$

$$\vartheta = B\varphi$$

$$\vartheta = D \ln r'$$

$$\vartheta = E\varphi \ln r',$$

was durch Bilden der Ableitungen und Einsetzen sofort überprüfbar ist. Als erweiterte Lösung gilt

damit

$$\vartheta(r', \varphi) = A + B\varphi + D \ln r' + E\varphi \ln r' + \vartheta_r \vartheta_\varphi. \quad (3.2.-59)$$

Eine Reihe prinzipieller Überlegungen über die günstigste Anpassung der unterschiedlichen Randbedingungen, wie beispielsweise durch FOURIER-Reihen, führten in [18] zu einer Auswahl von Termen, die natürlich der Lösungsgleichung (3.2.-59) entnommen worden sind. Für den hier betrachteten Fall wurde

$$\begin{aligned} \vartheta(r', \varphi) &= \vartheta_F + D \left(\ln r' + \frac{1}{h_1} \right) \\ &+ \sum_{\omega=1}^{\infty} C_\omega \cos(\omega\varphi) [\omega \cosh(\omega \ln r') \\ &+ h_1 \sinh(\omega \ln r')] \end{aligned} \quad (3.2.-60)$$

mit

$$h_1 = \frac{\alpha_1 r_1}{\lambda} \quad (3.2.-61)$$

als geeignete Form ausgewählt. Die gefundene Lösung erfordert jedoch eine geringfügige Korrektur der Randbedingung am äußeren Rohrumfang. Die Randbedingung kann zwar als Funktion der Ortskoordinate definiert werden, sie muß aber von gleichem Typus sein. Vergleicht man Gl. (3.2.-37) mit Gl. (3.2.-38), so liegt im ersten Fall eine Randbedingung 3. Art und im zweiten Fall eine Randbedingung 2. Art vor (Definition im Abschnitt 1.3.2.). Da letzten Endes der Wärmeübergangskoeffizient am äußeren Rohrrand ohnehin nicht als Funktion des geometrischen Ortes, d. h. als Funktion von φ , erfaßt werden kann und seine Größe auch große Unsicherheiten beinhaltet, wird die Wärmeabgabe des Rohres als Mittelwert berechnet und durch eine Randbedingung 2. Art dargestellt. Damit nehmen die Gln. (3.2.-34) bis (3.2.-38) die dimensionslosen Formen

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\pi} = 0 \text{ für } r'_1 < r' < r'_s \quad (3.2.-62)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r'} \right)_{r'=r'_1} + h_1 (\vartheta_F - \vartheta|_{r'=r'_1}) = 0 \text{ für } 0 < \varphi < \pi \quad (3.2.-63)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r'} \right)_{r'=r'_s} = g_0(\varphi) \text{ für } 0 < \varphi < \varphi_0 \quad (3.2.-64)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r'} \right)_{r'=r'_s} = g_1(\varphi) \text{ für } \varphi_0 < \varphi < \pi \quad (3.2.-65)$$

an. Die Größen g_0 und g_1 stellen die dimensionslosen Wärmestromdichten im Schweißnahtbereich und an der freien Rohraußenfläche dar.

Für das weitere Vorgehen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Das Heizrohr liegt oberhalb der Lamelle und wird so von der Wärmedämmung umhüllt, daß die äußere Rohroberfläche im Bereich außerhalb der Schweißnaht (φ_0 bis π) als adiabat zu betrachten ist.
- Das Heizrohr befindet sich unterhalb der Lamelle und gibt direkt Wärme an die Umgebung ab.

Es gelten:

$$\int_0^\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial r'_a} \cos(\omega^* \varphi) d\varphi = \int_0^{\varphi_0} g_0 \cos(\omega^* \varphi) d\varphi \quad (3.2.-78)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left\{ D \frac{1}{r'_a} \cos(\omega^* \varphi) + \cos(\omega^* \varphi) \sum_{\omega=1}^\infty C_\omega \cos(\omega \varphi) \right. \\ & \times \left[\frac{\omega^2}{r'_a} \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \frac{\omega}{r'_a} \cosh(\omega \ln r'_a) \right] \Big\} d\varphi \\ & = g_0 \frac{1}{\omega^*} \sin(\omega^* \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.2.-79)$$

Jetzt verschwindet der erste Summand des Integranden und alle Summanden der Reihe mit $\omega^* \neq \omega$, während für $\omega^* = \omega$

$$\int \cos^2(\omega \varphi) d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega \varphi) \quad (3.2.-80)$$

gilt, woraus folgt:

$$\begin{aligned} & C_\omega \frac{\pi}{2} \left[\frac{\omega^2}{r'_a} \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \frac{\omega}{r'_a} \cosh(\omega \ln r'_a) \right] \\ & = g_0 \frac{1}{\omega} \sin(\omega \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.2.-81)$$

$$C_\omega = \frac{2r'_a g_0 \sin(\omega \varphi_0)}{\pi \omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \quad (3.2.-82)$$

Die ermittelten Konstanten D und C_ω sind keine Funktionen der Variablen φ und r' und somit „tatsächliche“ Konstanten, so daß die Randbedingung Gl. (3.2.-64) endgültig erfüllt ist. Durch Substitution der ermittelten Größen erhält Gl. (3.2.-60) die Form

$$\begin{aligned} \vartheta(r', \varphi) &= \vartheta_F + \frac{\varphi_0}{\pi} r'_a g_0 \left[\ln r' + \frac{1}{h_1} \right] + \frac{2r'_a g_0}{\pi} \\ & \times \sum_{\omega=1}^\infty \frac{\sin(\omega \varphi_0) [\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')]}{\omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \\ & \times \cos(\omega \varphi). \end{aligned} \quad (3.2.-83)$$

Damit kann der dimensionslose Temperaturverlauf in der Rohrwandung berechnet werden. Im vorliegenden Sonderfall sind jedoch noch weitere Vereinfachungen möglich, wenn man die nachfolgenden Ergebnisse und Gl. (3.2.-70) einarbeitet. Die Wärmeabgabe des halben Rohres beträgt $\dot{Q}_0$, und daraus folgen nach Gl. (3.2.-69) für die Leitung in der Rohrwand

$$i_1 - i_2 = \frac{\dot{Q}_0}{\pi b \lambda} \ln \frac{r_a}{r_1} \quad (3.2.-84)$$

und für den konvektiven Übergang an der Rohrinnenwand

$$t_F - i_1 = \frac{\dot{Q}_0}{\pi b r_1 \alpha_1}, \quad (3.2.-85)$$

woraus sich die dimensionslose Temperatur des Heizmediums nach der Definitionsgleichung (3.2.-39)

$$\vartheta_F = \frac{t_F - i_2}{i_1 - i_2} = 1 + \frac{1}{h_1 \ln \frac{r_a}{r_1}} = 1 + \frac{1}{h_1 \ln r'_a} \quad (3.2.-86)$$

nur als Funktion der dimensionslosen Wärmeübertragungszahl h_1 und des Durchmesserhältnisses r'_a berechnet. Damit erhält Gl. (3.2.-83) die Form

$$\begin{aligned} \vartheta(r', \varphi) &= 1 - \frac{\ln r'}{\ln r'_a} - \frac{2}{\varphi_0 \ln r'_a} \\ & \times \sum_{\omega=1}^\infty \frac{\sin(\omega \varphi_0) [\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')]}{\omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \\ & \times \cos(\omega \varphi). \end{aligned} \quad (3.2.-87) \checkmark$$

Zur Kontrolle werden die mittleren dimensionslosen Rohroberflächentemperaturen bestimmt. Es ergeben sich

$$\bar{\vartheta}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \vartheta(r'_1, \varphi) d\varphi = 1 \quad (3.2.-88)$$

und

$$\bar{\vartheta}_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \vartheta(r'_a, \varphi) d\varphi = 0. \quad (3.2.-89)$$

Diese zunächst erstaunlichen Ergebnisse sind vollkommen richtig, da nach Gl. (3.2.-39)

$$t = (i_1 - i_2) \vartheta + i_2 \quad (3.2.-90)$$

$$i_1 = (i_1 - i_2) \cdot 1 + i_2 = i_1 \quad (3.2.-91)$$

sowie

$$i_2 = (i_1 - i_2) \cdot 0 + i_2 = i_2 \quad (3.2.-92)$$

folgen.

Temperaturfeld $t(r, \varphi)$

Das dimensionsbehaftete Temperaturfeld erhält man, wenn in Gl. (3.2.-90) die Gln. (3.2.-84), (3.2.-85) und (3.2.-87) eingearbeitet werden.

$$\begin{aligned} t(r', \varphi) &= t_F - \frac{\dot{Q}_0}{\pi b} \left\{ \frac{\ln r'}{\lambda} + \frac{2}{\varphi_0 \lambda} \right. \\ & \times \sum_{\omega=1}^\infty \frac{\sin(\omega \varphi_0) [\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')]}{\omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \\ & \times \cos(\omega \varphi) + \frac{1}{r_1 \alpha_1} \Big\}. \end{aligned} \quad (3.2.-93)$$

$\dot{Q}_0/b$ Wärmeabgabe des Rohres im Bereich von $\varphi = 0$ bis π , bezogen auf $b = 1$ m (identisch mit der Wärmeabgabe der halben Lamelle von 1 m Breite)

t_F Temperatur des Heizmediums

λ Wärmeleitkoeffizient des Rohrmaterials

- α_1 Wärmeübergangskoeffizient vom Heizmedium an die innere Rohrwand
 φ_0 halbe Schweißnahtbreite, gemessen im Bogenmaß
 h_1 Wärmeübertragungszahl $\left(h_1 = \frac{\alpha_1 r_1}{\lambda}\right)$
 r_i, r_a innerer, äußerer Rohrradius
 $\left(r' = \frac{r}{r_1}; r'_a = \frac{r_a}{r_1}; r'_1 = 1\right)$.

Damit ist es möglich, die Temperaturverteilung in der Rohrwand und in der Schweißnaht zu berechnen, ohne daß über die vorherigen Ableitungen Kenntnisse vorliegen müssen.

Anmerkung

Die Gl. (3.2.-93) kann auch mit Hilfe der Beziehungen [Gl. (3.2.-96) und (3.2.-97)] mit Potenzfunktionen dargestellt werden. Allerdings ergeben sich wegen der veränderlichen Größe r' nicht so einfache Terme wie in der später vorgestellten Gleichung (3.2.-99).

Mittlere Schweißnahttemperatur

Von besonderem Interesse ist für den Heizungsingenieur die Temperatur in der Schweißnaht, welche gleichzeitig die Rippenfußtemperatur für die angeschweißte Lamelle darstellt. Diese Temperatur ist wiederum Grundlage für die wärmetechnische Berechnung der Lamelle und bildet mit dem bereits verwendeten Wert $\dot{Q}_0$ einen funktionellen Zusammenhang. Die Temperatur in der Schweißnaht kann als Mittelwert gebildet werden, indem man den Temperaturverlauf am äußeren Rohrrand im Bereich von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_0$ integriert und das Ergebnis durch die Bezugslänge φ_0 dividiert. Ausgehend von Gl. (3.2.-87), gelten für die mittlere Schweißnahttemperatur

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \vartheta(r'_a, \varphi) d\varphi \quad (3.2.-94)$$

und

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = & -\frac{2}{\varphi_0^2 \ln r'_a} \\ & \times \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \varphi_0) [\omega \cosh(\omega \ln r'_a) + h_1 \sinh(\omega \ln r'_a)]}{\omega^3 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \end{aligned} \quad (3.2.-95)$$

Rechentechische Vereinfachungen ergeben sich, wenn die mathematischen Beziehungen

$$\cosh(\omega \ln r'_a) = \frac{e^{\ln(r'_a)^{\omega}} + e^{\ln(r'_a)^{-\omega}}}{2} = \frac{r_a'^{\omega} + r_a'^{-\omega}}{2} \quad (3.2.-96)$$

und

$$\sinh(\omega \ln r'_a) = \frac{e^{\ln(r'_a)^{\omega}} - e^{\ln(r'_a)^{-\omega}}}{2} = \frac{r_a'^{\omega} - r_a'^{-\omega}}{2} \quad (3.2.-97)$$

substituiert werden. Es gelten

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = & -\frac{2}{\varphi_0^2 \ln r'_a} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \varphi_0)}{\omega^3} \\ & \times \frac{\omega(r_a'^{\omega} + r_a'^{-\omega}) + h_1(r_a'^{\omega} - r_a'^{-\omega})}{\omega(r_a'^{\omega} - r_a'^{-\omega}) + h_1(r_a'^{\omega} + r_a'^{-\omega})} \end{aligned} \quad (3.2.-98)$$

und

$$\vartheta_0 = -\frac{2}{\ln r'_a} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sin(\omega \varphi_0)}{\omega \varphi_0} \right)^2 \frac{\frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a'^{2\omega} + 1}{\frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a'^{2\omega} - 1} \quad (3.2.-99)$$

Die dimensionsbehaftete mittlere Schweißnahttemperatur ($\equiv$ Rippenfußtemperatur) lautet unter Berücksichtigung der Gln. (3.2.-90), (3.2.-84), (3.2.-85) und (3.2.-99):

$$\begin{aligned} t_0 = t_F + \frac{\dot{Q}_0}{\pi b} & \left\{ -\frac{2}{\lambda} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sin(\omega \varphi_0)}{\omega \varphi_0} \right)^2 \right. \\ & \times \left. \frac{\frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a'^{2\omega} + 1}{\frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a'^{2\omega} - 1} - \frac{\ln r'_a}{\lambda} - \frac{1}{r_1 \alpha_1} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.-100)$$

Die Bedeutung der verwendeten Formelzeichen wurde bereits im Zusammenhang mit Gl. (3.2.-93) erläutert. Wegen des Zusammenhangs $\dot{Q}_0 = f(t_0)$ wird meistens bei diesen gegebenen Werten die Frage nach der Heizmedientemperatur gestellt sein. Diese Größe t_F kann durch einfache Umformung der Gl. (3.2.-100) eliminiert werden.

Die Auswertung der unendlichen Reihe ist manuell sehr aufwendig, so daß dies besser mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung erfolgt. Die Gl. (3.2.-100) ist Bestandteil des im Abschnitt 3.5. beschriebenen Rechenprogramms. Wegen der zahlreichen Einflußgrößen erscheint es wenig sinnvoll, die vorstehende Beziehung separat auszuwerten und evtl. in Tabellenform wiederzugeben. Statt dessen erfolgen nach Kombination mit der Lamellenkonstruktion für typische Ausführungsvarianten serienmäßige Durchrechnungen.

3.2.3.2. Beispiel

Es ist die Temperaturverteilung in der Rohrwand eines Heizrohres und entlang der Schweißnaht zur Lamelle zu ermitteln. Weiterhin soll die mittlere Temperatur in der Schweißnaht berechnet werden. Die konstruktive Gestaltung von Rippe und Lamelle entspricht der Darstellung im Bild 3.2.-6.

Es gelten die Werte

$$\begin{aligned} t_F &= 180^\circ \text{C} & r_1 &= 0,00785 \text{ m} \\ \dot{Q}_0 &= 90 \text{ W} & r'_a &= 1,357 \\ \lambda &= 50 \text{ W/m K} & h_1 &= 0,157 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 1000 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad \varphi_0 = 0,24$$

$$b = 1 \text{ m}$$

und die Variablen

$$r' = 1; 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,25; 1,3; 1,357$$

$$\varphi = 0; 0,1\pi; 0,2\pi; 0,3\pi; 0,4\pi; 0,5\pi; 0,6\pi; 0,7\pi; 0,8\pi; 0,9\pi; \pi.$$

• Lösung

Die Berechnungen erfolgen nach Gl. (3.2.-93) und Gl. (3.2.-100) mit Hilfe der elektronischen Datenverarbeitung. Die unendliche Reihe wird dabei soweit ausgewertet, bis der absolute Zuwachs eines Gliedes den 0,00001fachen Absolutwert des Anfangsgliedes unterschreitet. Die Ergebnisse in °C sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

r'	φ/π										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	172,59	173,29	174,51	175,54	176,35	176,97	177,45	177,79	178,03	178,17	178,21
1,05	172,51	173,24	174,47	175,51	176,32	176,95	177,43	177,78	178,02	178,15	178,20
1,10	172,40	173,17	174,44	175,48	176,30	176,94	177,42	177,77	178,01	178,14	178,19
1,15	172,26	173,11	174,41	175,46	176,29	176,92	177,41	177,76	178,00	178,14	178,18
1,20	172,08	173,04	174,39	175,45	176,27	176,91	177,40	177,75	177,99	178,13	178,18
1,25	171,88	172,98	174,38	175,44	176,27	176,91	177,39	177,75	177,99	178,13	178,17
1,30	171,65	172,93	174,37	175,43	176,26	176,90	177,39	177,74	177,98	178,12	178,17
1,357	171,35	172,91	174,37	175,43	176,26	176,90	177,39	177,74	177,98	178,12	178,17

Die mittlere Schweißnahttemperatur beträgt $t_0 = 171,6^\circ\text{C}$. Um die Konvergenz der Reihe und den Aufwand der Berechnung zu demonstrieren, wird ein Wert nach Gl. (3.2.-93) manuell ermittelt. Um einen einfachen Taschenrechner verwenden zu können, war es zweckmäßig, die Hyperbelfunktionen in Potenzfunktionen analog den Gln. (3.2.-96) und (3.2.-97) zu überführen. Die Berechnungsgleichung lautet dann

$$t(r', \varphi) = t_F - \frac{\dot{Q}_0}{\pi b} \left\{ \frac{\ln r'}{\lambda} + \frac{2}{\varphi_0 \lambda} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega \varphi_0)}{\omega^2} \times \frac{\omega(r'^{\omega} + r'^{-\omega}) + h_1(r'^{\omega} - r'^{-\omega})}{\omega(r_a^{\omega} - r_a^{-\omega}) + h_1(r_a^{\omega} + r_a^{-\omega})} \cos(\omega \varphi) + \frac{1}{r_1 \alpha_1} \right\} \quad (3.2.-101)$$

und mit den eingesetzten Zahlenwerten für den Punkt $r' = 1,2$, $\varphi = 0,5\pi$

$$\begin{aligned} t(1,2; 0,5\pi) &= 180^\circ\text{C} - \frac{90}{\pi \cdot 1} \left\{ \frac{\ln 1,2}{50} \right. \\ &+ \frac{2}{0,24 \cdot 50} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega \cdot 0,24)}{\omega^2} \\ &\times \frac{\omega(1,2^{\omega} + 1,2^{-\omega}) + 0,157(1,2^{\omega} - 1,2^{-\omega})}{\omega(1,357^{\omega} - 1,357^{-\omega}) + 0,157(1,357^{\omega} + 1,357^{-\omega})} \\ &\times \left. \cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{0,00785 \cdot 1000} \right\} \text{ K.} \end{aligned}$$

Für die Reihe gilt

$$\omega = 1 \quad S_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 2 \quad S_2 &= 0,1154 \frac{4,269 + 0,117}{2,597 + 0,374} (-1) \\ &= -0,17036 \end{aligned}$$

$$\omega = 3 \quad S_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 4 \quad S_4 &= 0,0512 \frac{10,223 + 0,250}{12,384 + 0,579} 1 \\ &= 0,04136 \end{aligned}$$

$$\omega = 5 \quad S_5 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 6 \quad S_6 &= 0,0275 \frac{19,925 + 0,416}{36,504 + 1,005} (-1) \\ &= -0,01491 \end{aligned}$$

$$\omega = 7 \quad S_7 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 8 \quad S_8 &= 0,0147 \frac{36,259 + 0,639}{91,291 + 1,819} 1 \\ &= 0,00583 \end{aligned}$$

$$\omega = 9 \quad S_9 = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 10 \quad S_{10} &= 0,00675 \frac{63,532 + 0,947}{211,266 + 3,332} (-1) \\ &= -0,00203 \end{aligned}$$

$$\omega = 11 \quad S_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 12 \quad S_{12} &= 0,0018 \frac{108,340 + 1,382}{467,577 + 6,126} 1 \\ &= 0,000417 \end{aligned}$$

$$\omega = 13 \quad S_{13} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega = 14 \quad S_{14} &= -0,0011 \frac{180,839 + 2,004}{1004,988 + 11,275} (-1) \\ &= 0,00020. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} t(1,2; 0,5) &= 180^\circ\text{C} - 28,648(0,00365 - 0,02325 \\ &+ 0,12738) \text{ K} = 176,91^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem dick umrandeten Wert der vorhergehenden Tabelle überein.

Das Temperaturfeld ist als räumliche Verteilung über den halben Rohrquerschnitt im Bild (3.2.-7) dargestellt. In Auswertung des Bildes und der Ergebnistabelle spiegeln sich die zugrunde gelegten Randbedingungen deutlich wider.

- Im Bereich von φ_0 bis π stehen die Isothermen senkrecht auf der äußeren Rohrwand $r = r_a$, so daß kein radiales Temperaturgefälle existiert (vgl. Tabelle und Detail, Bild 3.2.-7). Dies bedeutet, daß es in diesem Rohrbereich keinen Wärmestrom nach außen gibt ($g_1 = 0$).
- An den Symmetrieflächen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ist der tangentielle Temperaturgradient gleich Null (vgl. Bild 3.2.-7). Die Isothermen besitzen deshalb an diesen Stellen rechtwinklig zu den Symmetrieflächen verlaufende Tangenten.
- Eine Besonderheit existiert bei $\varphi = \pi$ und $r = r_a$, da die beiden vorgenannten Bedingungen hier gleichzeitig gelten.
- Im Bereich von $\varphi = 0$ bis φ_0 ist ein radialer Temperaturgradient vorhanden (vgl. Detail, Bild 3.2.-7) da dort ein Wärmestrom in die Schweißnaht fließt (g_0). Die Isothermen stehen somit nicht senkrecht auf dem äußeren Rohrumfang, bzw. das „Temperaturgebirge“ weist dort deutliche Falllinien auf.

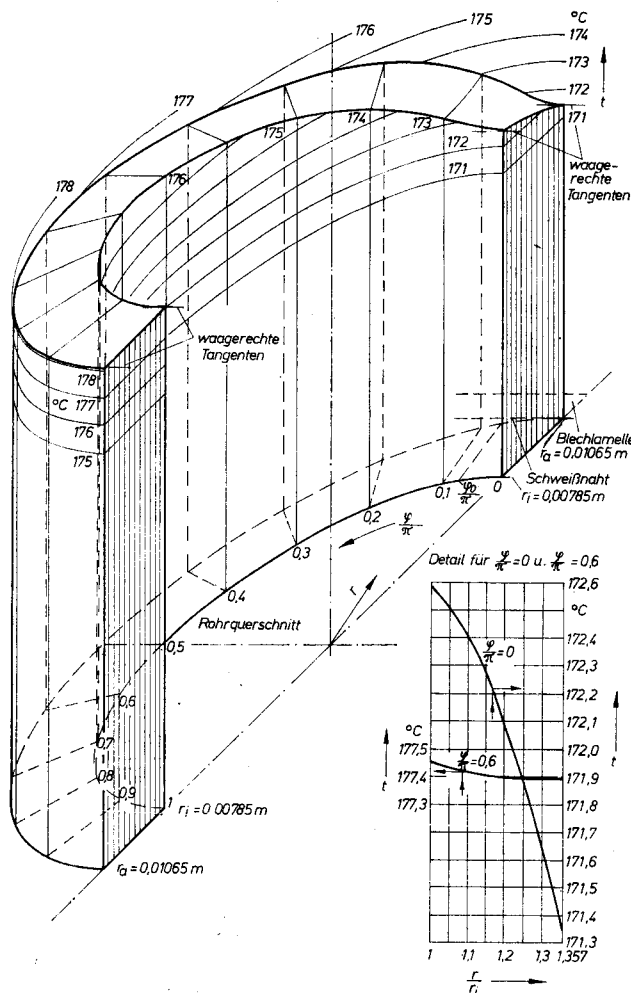


Bild 3.2.-7
Temperaturverlauf in Form einer räumlichen Darstellung über einem Heizrohrquerschnitt als Ergebnisse des Beispiels 3.2.3.2.

- Auf der Rohrrinnenseite wird an jeder Stelle des Rohres Wärme übertragen. Deshalb enden die Temperaturkurven — vgl. Detail, Bild 3.2.-7 — nicht mit waagerechter Tangente, und die Isothermen stehen nirgendwo senkrecht auf dem inneren Rohrrand.

3.2.3.3. Heizrohr gibt auch außerhalb der Schweißnaht Wärme ab

Entsprechend der Darstellung im Abschnitt 3.2.3. wird bei der konstruktiven Strahlplattengestaltung nach Bild 3.2-4 für die Wärmeabgabe außerhalb der Schweißnaht die konstante dimensionslose Wärmestromdichte g_1 eingeführt. Man kann die Wärmeabgabe des halben Rohres außerhalb der Schweißnaht durch

$$\dot{Q}_1 = b \int_{\varphi_0}^{\pi} \alpha_2 (t_2 - t_1) r_a d\varphi \quad (3.2.-102)$$

angeben, wobei α_2 den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten darstellt. Ganz exakt müßte α_2 als eine Funktion von t_2 und von φ aufgefaßt werden. Da die vorhandene Konstruktion — wie bereits angedeutet — näherungsweise Annahmen bedingt, sollen nachfolgende Vereinfachungen Verwendung finden.

- Der Wärmedurchgangskoeffizient k wird wie bei einer ebenen Wand berechnet, wobei α_2 und $\bar{t}_2$ über Iterationen zu bestimmen sind. Es gelten

$$k(\bar{t}_2) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_a - r_i}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2(\bar{t}_2)}} \quad (3.2.-103)$$

und

$$\bar{t}_2 = \frac{k}{\alpha_2} (t_F - t_1) + t_1. \quad (3.2.-104)$$

Auf die Ermittlung von α_2 als Funktion der mittleren Rohroberflächentemperatur $\bar{t}_2$ außerhalb des Schweißnahtbereiches wird im Anwendungsbeispiel 3.4.3. ausführlich eingegangen.

- Als wärmeabgebende Fläche an die Innenluft sei nur die unterhalb des Rohrmittelpunktes liegende Rohroberfläche $\left(\frac{\pi}{2} \text{ bis } \pi\right)$ in Ansatz gebracht. Dies ist dadurch begründet, da sowohl die Abstrahlung als auch die konvektive Wärmeübergabe an den Raum praktisch nur von diesem Abschnitt aus erfolgen kann. Die Wärmeabgabe oberhalb des Rohrmittelpunktes $\left(\varphi_0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right)$ kommt fast ausschließlich der darüberliegenden Lamelle zugute. Der zusätzliche Wärmetransport an die Lamelle kommt in der Wirkung einer Verbreiterung der Schweißnaht gleich. Da deren exakte Erfassung ohnehin mit Unsicherheiten behaftet ist, entfällt die weitere Berücksichtigung der Wärmeabgabe bei $\varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Unter Beachtung der Vereinfachungen ergibt sich der Wärmestrom der betrachteten Rohrhälfte an die Umgebung zu

$$\dot{Q}_1 = k(t_F - t_1) b r_a \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.2.-105)$$

Wegen der getroffenen Festlegungen unterscheiden sich die weiteren Ausarbeitungen von [18].

Die dimensionslose Form folgt analog der Definitionsgleichung (3.2.-68)

$$g_1 = -\frac{r_1}{\lambda(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)} \frac{\dot{Q}_1}{\frac{\pi}{2} r_a b} = -\frac{r_1}{\lambda(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)} k(t_F - t_1). \quad (3.2.-106)$$

Da die Lösung Gl. (3.2.-60) bereits die Randbedingungen Gln. (3.2.-62) und (3.2.-63) erfüllt, müssen noch die Bedingungen Gln. (3.2.-64) und (3.2.-65) zur Bestimmung der Konstanten D und C_ω eingearbeitet werden. In Analogie zu Gl. (3.2.-75) gilt:

$$\int_0^\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial r'_a} d\varphi = \int_0^{\varphi_0} g_0 d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi g_1 d\varphi = g_0 \varphi_0 + g_1 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.2.-107)$$

Das Integral der linken Seite ist bereits gelöst, so daß unter Beachtung von Gl. (3.2.-77)

$$\frac{D}{r'_a} \pi = g_0 \varphi_0 + g_1 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow D = r'_a \left(g_0 \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{g_1}{2} \right) \quad (3.2.-108)$$

folgt. Entsprechend der Gl. (3.2.-78) kann man

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial r'_a} \cos(\omega^* \varphi) d\varphi &= \int_0^{\varphi_0} g_0 \cos(\omega^* \varphi) d\varphi \\ &+ \int_{\pi/2}^\pi g_1 \cos(\omega^* \varphi) d\varphi = \frac{g_0}{\omega^*} \sin(\omega^* \varphi_0) - \frac{g_1}{\omega^*} \sin\left(\omega^* \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.2.-109)$$

schreiben, woraus sich in Verbindung mit der linken Seite von Gl. (3.2.-81) die Konstante

$$C_\omega = \frac{2r'_a \left[g_0 \sin(\omega \varphi_0) - g_1 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right]}{\pi \omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \quad (3.2.-110)$$

angeben läßt.

Der dimensionslose Temperaturverlauf ergibt sich durch Substitution der Konstanten in Gl. (3.2.-60) zu

$$\begin{aligned} \vartheta(r', \varphi) &= \vartheta_F + \left(g_0 \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{g_1}{2} \right) r'_a \left(\ln r' + \frac{1}{h_1} \right) \\ &+ \frac{2r'_a}{\pi} \sum_{\omega=1}^{\infty} \left[g_0 \sin(\omega \varphi_0) - g_1 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\times \frac{\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')}{\omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \cos(\omega \varphi). \end{aligned} \quad (3.2.-111)$$

Die Bestimmung der dimensionslosen Wärmestromdichten g_0 und g_1 setzt die Kenntnis der mittleren Rohroberflächentemperaturen $\bar{i}_1$ und $\bar{i}_2$ voraus. Diese berechnen sich nach den Gln. (3.2.-84) und (3.2.-85) unter Beachtung der Gesamtwärmeabgabe der zugrunde gelegten Rohrhälfte

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 + \dot{Q}_1 \quad (3.2.-112)$$

zu

$$\bar{i}_1 - \bar{i}_2 = \frac{\dot{Q}}{\pi b \lambda} \ln \frac{r_a}{r_1} \quad (3.2.-113)$$

und

$$t_F - \bar{i}_1 = \frac{\dot{Q}}{\pi b r_1 \alpha_1} \quad (3.2.-114)$$

Die Gl. (3.2.-86) hat weiterhin Gültigkeit, da sich bei deren Ableitung der Wärmestrom ohnehin heraus kürzt. Eine weitere Vereinfachung der Gl. (3.2.-111) ähnlich wie bei adiabater Rohrdämmung ist möglich, wenn eine Zusammenfassung der koeffizientenbehafteten Wärmestromdichten gelingt. Unter Verwendung der Gln. (3.2.-68) und (3.2.-106) gilt für

$$g_0 \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{g_1}{2} = -\frac{r_1}{\lambda(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)} \frac{\dot{Q}_0}{b \varphi_0 r_a} \frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{r_1}{\lambda(\bar{i}_1 - \bar{i}_2)} \frac{\dot{Q}_1}{b \pi r_a} \quad (3.2.-115)$$

$$g_0 \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{g_1}{2} = -\frac{r_1}{\lambda(\bar{i}_1 - \bar{i}_2) b r_a \pi} (\dot{Q}_0 + \dot{Q}_1) \quad (3.2.-116)$$

und nach Substitution von

$$\dot{Q}_0 + \dot{Q}_1 = b \pi \lambda (\bar{i}_1 - \bar{i}_2) \frac{1}{\ln \frac{r_a}{r_1}} \quad (3.2.-117)$$

$$g_0 \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{g_1}{2} = -\frac{1}{r'_a \ln r'_a} \quad (3.2.-118)$$

Damit vereinfacht sich Gl. (3.2.-111) zu

$$\begin{aligned} \vartheta(r', \varphi) &= 1 - \frac{\ln r'}{\ln r'_a} + \frac{2r'_a}{\pi} \\ &\times \sum_{\omega=1}^{\infty} \left[g_0 \sin(\omega \varphi_0) - g_1 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\times \frac{\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')}{\omega^2 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \cos(\omega \varphi). \end{aligned} \quad (3.2.-119)$$

Analog den Gln. (3.2.-88) und (3.2.-89) folgen die trivialen Ergebnisse

$$\bar{\vartheta}_1 = 1 \quad \text{und} \quad \bar{\vartheta}_2 = 0,$$

so daß auch weiterhin die Gln. (3.2.-90) bis (3.2.-92) gelten.

Temperaturfeld $t(r_1, \varphi)$

Substituiert man in Gl. (3.2.-90) die Gln. (3.2.-119), (3.2.-113) und (3.2.-114), so erhält man das dimensionsbehaftete Temperaturfeld

$$t(r', \varphi) = t_F - \frac{\dot{Q}}{\pi b} \left\{ \frac{\ln r'}{\lambda} - \frac{2r'_a}{\pi \lambda} \right. \\ \times \ln r'_a \sum_{\omega=1}^{\infty} \left[g_0 \sin(\omega \varphi_0) - g_1 \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \times \frac{\omega \cosh(\omega \ln r') + h_1 \sinh(\omega \ln r')}{\omega^3 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \\ \left. \times \cos(\omega \varphi) + \frac{1}{r_1 \alpha_1} \right\}. \quad (3.2.-120)$$

Diese Gleichung kann wiederum ohne Vorkenntnisse der bisherigen Ableitungen angewendet werden. Die Bezeichnungen sind in Verbindung mit Gl. (3.2.-93) zusammengefaßt erläutert worden. Ergänzend stellt $\dot{Q}/b$ die Wärmeabgabe des Rohres im Bereich von $\varphi = 0$ bis π bezogen auf $b = 1$ m (identisch mit der Wärmeabgabe der halben Lamelle und der halben Wärmeabgabe des Rohres an die Umgebung $\dot{Q} = \dot{Q}_0 + \dot{Q}_1$) dar.

Mittlere Schweißnahttemperatur

Interessant ist auch hier vor allem die mittlere Schweißnahttemperatur. Sie ergibt sich analog in Auswertung der Gl. (3.2.-94), wobei als Integrand die dimensionslose Temperatur nach Gl. (3.2.-119) eingesetzt wird. Es gelten

$$\vartheta_0 = \frac{2r'_a}{\varphi_0 \pi} \sum_{\omega=1}^{\infty} \left[g_0 \sin^2(\omega \varphi_0) - g_1 \sin(\omega \varphi_0) \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \times \frac{\omega \cosh(\omega \ln r'_a) + h_1 \sinh(\omega \ln r'_a)}{\omega^3 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \quad (3.2.-121)$$

und nach Umformung mit den Gln. (3.2.-96) und (3.2.-97)

$$\vartheta_0 = \frac{2r'_a}{\varphi_0 \pi} \sum_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^3} \left[g_0 \sin^2(\omega \varphi_0) - g_1 \sin(\omega \varphi_0) \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \times \frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a^{2\omega} + 1 \\ \times \frac{\omega + h_1}{\omega - h_1} r_a^{2\omega} - 1. \quad (3.2.-122)$$

Die dimensionsbehaftete mittlere Schweißnahttemperatur lautet dann

$$t_0 = t_F + \frac{\dot{Q}}{\pi b} \left\{ \frac{2r'_a \ln r'_a}{\varphi_0 \pi \lambda} \right. \\ \times \sum_{\omega=1}^{\infty} \left[g_0 \sin^2(\omega \varphi_0) - g_1 \sin(\omega \varphi_0) \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \times \frac{\omega \cosh(\omega \ln r'_a) + h_1 \sinh(\omega \ln r'_a)}{\omega^3 [\omega \sinh(\omega \ln r'_a) + h_1 \cosh(\omega \ln r'_a)]} \cdot \frac{\ln r'_a}{\lambda} - \frac{1}{r_1 \alpha_1} \left. \right\}. \quad (3.2.-123)$$

Auch diese Gleichung ist Bestandteil des Rechenprogramms im Abschnitt 3.5.

3.2.3.4. Beispiel

Um den Einfluß der Wärmeabgabe des Rohres nach außen zu veranschaulichen, werden für eine neue Berechnung der Temperaturverteilung die Werte des Beispiels 3.2.3.2. verwendet und zusätzlich $\dot{Q}_1 = 39$ W ergänzt. Damit ergibt sich $\dot{Q} = 129$ W.

Lösung

Grundlage der Berechnungen, die mittels der elektronischen Datenverarbeitung erfolgten, waren die Gln. (3.2.-120) und (3.2.-123). Die Ergebnisse finden sich in der nachfolgenden Tabelle.

Die mittlere Schweißnahttemperatur beträgt 170,0°C. Anhand der Ergebniszusammenstellung werden die zugrunde gelegten Randbedingungen deutlich. Zur Bildung der Temperaturgradienten können auf der Außenseite die Werte von $r' = 1,30 \dots 1,357$ sowie auf der Innenseite die Werte von $r' = 1$ und 1,05 Verwendung finden.

Auf der Außenseite besteht im Bereich von $\varphi/\pi = 0$ bis 0,08 ein großer Temperaturgradient, da dort der Übergang vom Rohr an die aufgeschweißte Strahlplatte erfolgt.

Im Bereich von $\varphi/\pi = 0,08$ bis $\varphi/\pi = 0,5$ ist der Temperaturgradient Null.

Von $\varphi/\pi = 0,5$ bis $\varphi/\pi = 1$ erfolgt die Wärmeabgabe an die Umgebung. Der Temperaturgradient ist relativ klein.

Wegen der analytischen Lösung mittels oszillierender Reihen ist der Übergang nicht sprunghaft an den Grenzen.

Temperaturen in der Rohrwand in °C

r'	0	0,1	0,2	0,3	0,4	φ/π 0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	171,12	171,88	173,16	174,20	174,95	175,46	175,79	176,04	176,20	176,30	176,33
1,05	171,03	171,81	173,11	174,16	174,91	175,42	175,76	176,01	176,17	176,27	176,30
1,10	170,90	171,74	173,07	174,13	174,89	175,40	175,74	175,98	176,15	176,24	176,27
1,15	170,74	171,66	173,04	174,10	174,86	175,37	175,71	175,96	176,12	176,22	176,25
1,20	170,55	171,59	173,02	174,08	174,85	175,35	175,69	175,94	176,10	176,20	176,23
1,25	170,32	171,52	173,00	174,07	174,84	175,34	175,67	175,92	176,08	176,18	176,21
1,30	170,07	171,46	172,99	174,06	174,83	175,33	175,65	175,90	176,07	176,17	176,20
1,357	169,74	171,44	172,99	174,06	174,83	175,32	175,64	175,88	176,05	176,15	176,18

Auf der Innenseite ist an jeder Stelle ein Temperaturgradient vorhanden. Er ist bei $\varphi/\pi = 0$ am größten und nimmt mit wachsenden Werten φ/π ab. Wegen der Wärmeabgabe des Rohres an die Umgebung sind alle Temperaturen gegenüber dem Beispiel 3.2.3.2. niedriger.

3.3. Ableitung der Temperaturverteilung in der Lamelle

Vom konstruktiven Aufbau her sind homogene und heterogene Lamellen zu unterscheiden. Homogene Lamellen bestehen aus einem durchgehenden (von Heizrohr zu Heizrohr) einschichtigen Material. Heterogene Lamellen sind durch einen mehrlagigen Aufbau gekennzeichnet, wobei eine Lamelle gestützt sein kann. Als mehrlagige Konstruktionen sind nur solche zu verstehen, wo die einzelnen Schichten maßgeblich an der Wärmeleitung zwischen den Heizrohren beteiligt sind. Beispiele sind für homogene Lamellen

Strahlplatten mit und ohne einseitige Wärmedämmung, Bild 8.3.-2

Variante A, Bild 8.2.-1 (Frengerdecke)

Variante B, Bild 8.2.-1

Variante C, Bild 8.2.-1

für heterogene Lamellen

Variante E, Bild 8.2.-1 (Stramaxdecke)

Variante F, Bild 8.2.-1 (Ibisdecke).

Sind die Lamellen durch Materialschichten bedeckt, die keinen nennenswerten Einfluß auf die Temperaturverteilung zwischen den Rohren nehmen, dann werden deren Wärmeleitwiderstände lediglich in den Teilwärmedurchgangskoeffizienten, die von den Lamellen aus gebildet werden, erfaßt. Ein Beispiel dafür ist der Fußboden bei Variante D, Bild 8.2.-1.

3.3.1. Temperaturverteilung in homogenen Lamellen

Die prinzipiellen Möglichkeiten sind im Bild 3.3.-1 dargestellt. Variante A zeigt eine durchgehende Lamelle, Variante B eine beiderseitig berandete. Im ersten Fall wird dem Lamellenabschnitt l an den beiden Begrenzungen durch die Heizrohre die sogenannte Rippenfußtemperatur t_0 aufgeprägt. Die genannten Begrenzungen sind als betrachtungsmäßige Grenzen zu verstehen. Bei Variante B wird der Temperaturverlauf im Bereich $l/2$ nur durch eine einseitige Rippenfußtemperatur bestimmt. Die qualitativen Temperaturverläufe — im ersten Fall die volle Kettenlinie und im zweiten Fall eine halbierte Kettenlinie — sind im Bild 3.3.-1 mit vermerkt. Die wärmetechnische Lösung der vorliegenden Probleme wurde bereits früher im Abschnitt 2.2. erarbeitet. Die hier zutreffende Wärmeleitung in gerader Richtung ist dort sowohl für gleiche als auch für außen und innen ungleiche Umgebungstemperaturen betrachtet worden. Die in Frage kommenden Gleichungen werden zusammengefaßt wiedergegeben.

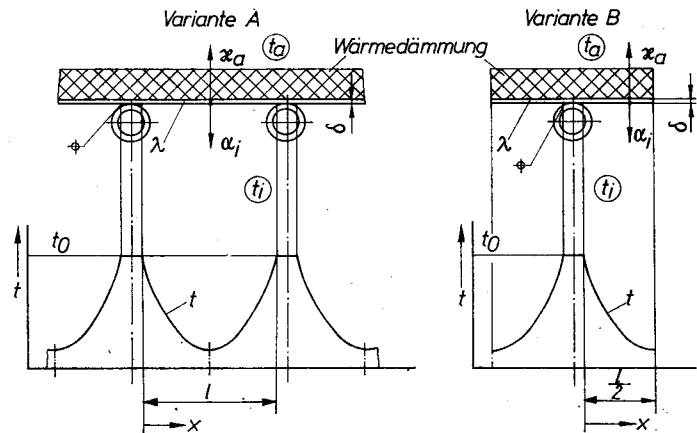


Bild 3.3.-1
Schematische Darstellung der Konstruktion und des qualitativen Temperaturverlaufs bei homogenen durchgehenden und berandeten Lamellen

Durchgehende Lamelle bei gleichen Umgebungstemperaturen

Verlauf der Übertemperatur nach Gl. (2.2.-20)

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)}. \quad (3.3.-1)$$

Mittlere Übertemperatur nach Gl. (2.2.-27)

$$\vartheta_m = \vartheta_0 \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2} \right)}{m \frac{l}{2}}. \quad (3.3.-2)$$

Durchgehende Lamelle bei ungleichen Umgebungstemperaturen

Verlauf der Übertemperatur nach Gl. (2.2.-48)

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (3.3.-3)$$

Mittlere Übertemperatur nach Gl. (2.2.-49)

$$\vartheta_m = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2} \right)}{m \frac{l}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta. \quad (3.3.-4)$$

Berandete Lamellen

Im Gegensatz zum bereits behandelten Problem der Randwärmeabgabe (Abschnitt 2.2.8.) für eine unendliche lange Rippe lauten hier die Randbedin-

gungen

$$\vartheta_{x=0} = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_{x=l/2} = 0. \quad (3.3.-5)$$

Das bedeutet, daß man die Wärmeabgabe der Stirnfläche der Lamelle vernachlässigt. Bei dicken Rippen sollte man dann die Lamellenlänge um die halbe Rippendicke rechnerisch vergrößern. Durch diese sehr praktikable Näherung und durch den Kunstgriff, die Lamellenlänge mit $l/2$ zu bezeichnen, werden inhaltlich und formal die Randbedingungen gleich denen der durchgehenden Lamelle, so daß die Gln. (3.3.-1) bis (3.3.-4) in vollem Umfang gelten. Die verwendeten Größen werden zusammenfassend erläutert (vgl. auch Bild 3.3.-1)

$t_1; t_a$	Temperaturen der Umgebung auf der Innen- bzw. Außenseite der Lamellen
$\vartheta = t - t_1$	Übertemperatur
$\vartheta_0 = t_0 - t_1$	Übertemperatur am Rippenfuß
$\vartheta_m = t_m - t_1$	mittlere Übertemperatur
$\Delta = t_a - t_1$	Temperaturdifferenz zwischen äußerer und innerer Umgebung
κ_a, κ_i	Teilwärmehduregangskoeffizient von der Lamellenoberfläche zur Außenseite bzw. Innenseite (bei unbedeckten Lamellen ist $\kappa_a = \alpha_a$ bzw. $\kappa_i = \alpha_i$)
λ	Wärmeleitkoeffizient der Lamelle
δ	Dicke der Lamelle
l	Lamellenabmessung

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_i}{\lambda \delta}}.$$

Wärmeabgabe und Oberflächentemperatur

Die Wärmestromdichten an die Umgebung berechnen sich unabhängig von der Lamellenform zu

$$\dot{q}_a = \kappa_a(t_m - t_a) = \kappa_a(\vartheta_m - \Delta) \quad (3.3.-6)$$

sowie

$$\dot{q}_i = \kappa_i(t_m - t_1) = \kappa_i \vartheta_m. \quad (3.3.-7)$$

Die mittleren Oberflächentemperaturen sind zur Berechnung des temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten unerlässlich. Es gelten die Gleichungen

$$t_{ma} = \frac{\kappa_a}{\alpha_a}(\vartheta_m - \Delta) + t_a \quad (3.3.-8)$$

und

$$t_{mi} = \frac{\kappa_i}{\alpha_i} \vartheta_m + t_1. \quad (3.3.-9)$$

3.3.2. Beispiel

Die Lamelle einer Strahlplatte ist durch folgende Daten gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} \kappa_a &= 1,35 \text{ W/m}^2 \text{ K} & \delta &= 0,001 \text{ m} \\ \alpha_i &= 11 \text{ W/m}^2 \text{ K} & l &= 0,12 \text{ m} \\ \lambda &= 50 \text{ W/m K} \end{aligned}$$

Die Umgebungstemperaturen betragen $t_1 = t_a = 20^\circ\text{C}$. Die Rippenfußtemperatur liegt mit $t_0 = 150^\circ\text{C}$ fest. Es ist die Wärmeabgabe eines Lamellenstreifens von $b = 1 \text{ m}$ Länge zu berechnen und anschließend durch Veränderung der Abmessung l die Anpassung an Beispiel 3.2.2. durchzuführen. Der Einfachheit halber werden die Koeffizienten κ_a und α_i konstant gelassen.

Lösung

Anhand der unter Abschnitt 3.3.1. zusammengestellten Berechnungsgleichungen kann man schrittweise ermitteln:

$$m = \sqrt{\frac{1,35 + 11}{50 \cdot 0,001}} \frac{1}{\text{m}} = 15,72 \text{ m}^{-1}$$

mittlere Übertemperatur

$$\vartheta_m = (150 - 20) \text{ K} \frac{\tanh\left(15,72 \frac{0,12}{2}\right)}{15,72 \frac{0,12}{2}} = 101,54 \text{ K}$$

Gesamt-Wärmestromdichte

$$\dot{q} = \dot{q}_i + \dot{q}_a = (11 + 1,35) 101,54 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1254,0 \text{ W/m}^2$$

Wärmeabgabe einer Lamelle von 1 m Länge

$$\dot{q} \cdot b \cdot l = 1254,0 \cdot 1 \cdot 0,12 \text{ W} = 150 \text{ W}.$$

Im Beispiel 3.2.2. betrug bei gleicher Rippenfußtemperatur die Wärmeabgabe einer halben Lamelle von ebenfalls 1 m Länge $\dot{Q}_0 = 90 \text{ W}$. Wird im vorliegenden Fall der Wert l vergrößert, so sinkt die mittlere Übertemperatur; die wärmeabgebende Fläche nimmt aber zu. Wegen des gegenläufigen Einflusses — der nicht quantitativ überschaubar ist — soll eine Rückrechnung versucht werden.

Der Wert $\dot{q}bl$ muß $2\dot{Q}_0$ nach Definition und Forderung entsprechen. Daraus folgen:

$$l\dot{q} = \frac{2\dot{Q}_0}{b}$$

$$l(\kappa_a + \alpha_i)\vartheta_m = \frac{2\dot{Q}_0}{b}$$

$$l(\kappa_a + \alpha_i)\vartheta_0 \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} = \frac{2\dot{Q}_0}{b}$$

$$\begin{aligned} l \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{m \frac{l}{2}} &= \frac{2\dot{Q}_0}{b(\kappa_a + \alpha_i)\vartheta_0} \\ &= \frac{2 \cdot 90}{1(1,35 + 11)(150 - 20)} \text{ m} = 0,112 \text{ m}. \end{aligned}$$

Da eine explizite Darstellung von l nicht möglich ist, wird die linke Seite der Gleichung als Funktion von l ermittelt und aufgezeichnet.

Es gelten:

l	in m	0,15	0,18	0,20
$\frac{l}{m} \cdot \frac{\tanh\left(m \frac{l}{2}\right)}{\frac{l}{2}}$	in m	0,105	0,113	0,117

Die grafische Darstellung in Bild 3.3.-2 ergibt, ausgehend vom Ordinatenwert, die Lamellenabmessung $l = 0,175$ m. Damit würde die Lamelle mit der form- und kraftschlüssigen Rohrverbindung wärmetechnisch abgeglichen sein.

Anmerkung:

Die unterschiedlichen Annahmen für α_1 liegen in den Temperaturunterschieden zwischen Lamelle und Heizrohr begründet. Exakt müßten sie jedoch noch iterativ überprüft werden. Da im Beispiel keine Aussagen über die Anbringung der Platte und die Strahlungstemperaturen der Umgebung vorhanden sind, sei gemäß Aufgabenstellung die Konstanz der Werte angenommen.

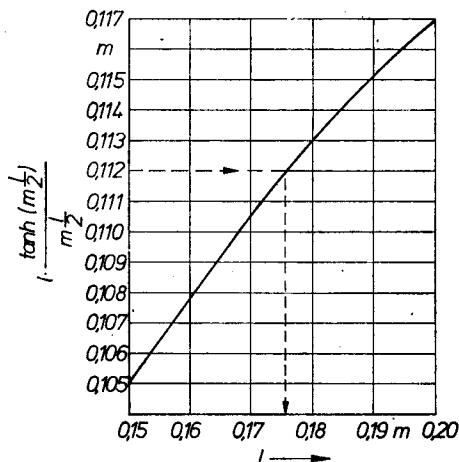


Bild 3.3.-2
Hilfsgrafik zur Lösung des Beispiels 3.3.2.

3.3.3. Temperaturverteilung in heterogenen Lamellen

Die Berechnung der Temperaturverteilung und letztlich der Wärmeabgabe ist bei zusammengesetzten Lamellen sehr aufwendig. Vorab sind jedoch noch prinzipielle Einteilungen bezüglich der Konstruktionsprinzipien zu treffen und deren wärmetechnische Konsequenzen aufzuzeichnen.

- Geht beispielsweise die Blechlamelle von einem zum anderen Heizrohr durch, dann kann das Berechnungsmodell für homogene Lamellen angewendet werden, wenn

$$(\lambda \delta)_{\text{Blechlamelle}} \gg (\lambda \delta)_{\text{Massivlamelle}} \quad (3.3.-10)$$

Gültigkeit hat. Die Massivbeschichtung müßte dann lediglich im Teilwärmedurchgangskoeffizienten α_1 erfaßt werden.

- Sind die Metallamellen in durchgehender oder gestutzter Form vollkommen im Massivelement eingebettet (vgl. Variante F, Bild 8.2.-1), so kann von der Blechlamelle zur festhaftenden Beschichtung kein Wärmeleitwiderstand definiert werden. Da aber bei den relativ dünnen Elementen die eindimensionale Wärmeleitung als theoretisches Modell beibehalten werden soll, folgt die Konsequenz, daß in jedem beliebigen Lamellenquerschnitt eine konstante, nur von der Ortskoordinate x abhängige Temperatur vorliegt.
- Liegen die Metallamellen in durchgehender oder gestutzter Form nur auf der Massivlamelle auf (vgl. Variante E, Bild 8.2.-1), dann wird durch bewußt vorgesehene Gleitpalte oder technologisch entstandene Spalte stets mit einem Wärmeleitwiderstand zu rechnen sein. Dadurch ist die Temperatur in der Blechlamelle an jeder Stelle x höher als in der Massivlamelle. Im Berechnungsmodell wird dann in jeder Lamelle eine eindimensionale Wärmeleitung angenommen und zwischen beiden ein Wärmestrom in Abhängigkeit von den angrenzenden Temperaturdifferenzen und den Wärmeleitwiderständen im Spalt berücksichtigt.

Während der erstgenannte Fall bereits im Abschnitt 3.3.1. gelöst wurde, bedürfen die beiden weiteren noch einer Lösung. Diese muß jedoch wegen der grundsätzlichen Unterschiede getrennt erarbeitet werden.

3.3.3.1. Massivlamellen mit festeingeformter Blechlamelle

Ein prinzipieller Aufbau ist im Bild 3.3.-3 gezeigt. Wie bereits darauf hingewiesen, wird wegen des festen Einbaus angenommen, daß, ausgehend von der Übertemperatur am Rippenfuß ϑ_0 , im Bereich zwischen dem Querschnitt A und B die Blechlamelle und die

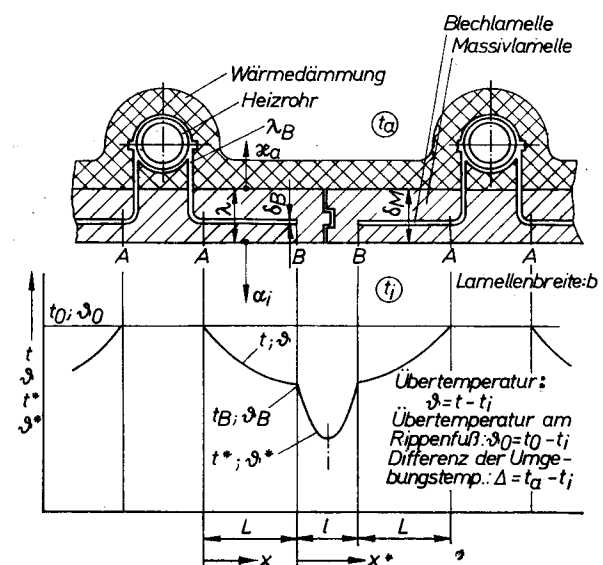


Bild 3.3.-3
Schematische Darstellung der Konstruktion und des qualitativen Temperaturverlaufs heterogener Lamellen (Massivlamelle mit festeingeformter gestutzter Blechlamelle)

massive Beschichtung stets eine einheitliche Übertemperatur ϑ aufweisen. Im Querschnitt B wird dann ein Wärmestrom an die Massivlamelle ohne Blecheinlage übergeben. Wegen der veränderten Wärmeleitfähigkeit kann die Temperaturkurve nicht mit gleicher Tangente weiterverlaufen. Um bisherige Lösungen zu verwenden, ist es zweckmäßig, zwei unterschiedliche Koordinatensysteme — nämlich ϑ, x und ϑ^*, x^* — zu benutzen. Die Wärmeleitfähigkeit erfordert ebenfalls mit λ und λ_M eine differenzierte Festlegung. Während λ_M dem Wärmeleitkoeffizienten des massiven Baustoffs direkt entspricht, muß λ als äquivalenter Wert verstanden werden. Nach Gl. (1.3.-59) gilt analog

$$\lambda = \frac{\delta_B \lambda_B + (\delta_M - \delta_B) \lambda_M}{\delta_M}. \quad (3.3.-11)$$

Damit sind die früher aufgestellten Differentialgleichungen und deren Lösungen sofort übernehmbar. Auf der Grundlage der Gl. (2.2.-39) kann man für den allgemeineren Fall ungleicher Umgebungstemperaturen schreiben:

$$\frac{d^2 \vartheta^*}{dx^{*2}} - \frac{\kappa_1 + \kappa_a}{\lambda_M \delta_M} \vartheta^* = -\Delta \frac{\kappa_a}{\lambda_M \delta_M} \quad (3.3.-12)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - \frac{\kappa_1 + \kappa_a}{\lambda \delta_M} \vartheta = -\Delta \frac{\kappa_a}{\lambda \delta_M}. \quad (3.3.-13)$$

Die allgemeinen Lösungen lauten

$$\vartheta^* = C_1^* e^{m^* x^*} + C_2^* e^{-m^* x^*} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (3.3.-14)$$

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (3.3.-15)$$

mit

$$m^* = \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda_M \delta_M}} \quad (3.3.-16)$$

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda \delta_M}}. \quad (3.3.-17)$$

Sind keine weiteren Deckschichten auf der Lamellenoberfläche angebracht, dann kann $\kappa_1 \equiv \alpha_1$ bzw. $\kappa_a \equiv \alpha_a$ gesetzt werden. Die Randbedingungen sind gegenüber den bisher behandelten Fällen jedoch verändert. So gelten:

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{für } x = 0 \quad (3.3.-18)$$

$$\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = \lambda_M \frac{d\vartheta^*}{dx^*} \quad \text{für } x = L \text{ und } x^* = 0 \quad (3.3.-19)$$

$$\vartheta = \vartheta^* = \vartheta_B \quad \text{für } x = L \text{ und } x^* = 0 \quad (3.3.-20)$$

$$\frac{d\vartheta^*}{dx^*} = 0 \quad \text{für } x^* = \frac{l}{2}. \quad (3.3.-21)$$

Damit würden sich die Bestimmungsgleichungen ergeben, deren Lösung dann zu den Konstanten führte.

Dieser Aufwand ist allerdings nicht notwendig, da nach Umformung der Gl. (2.2.-48) für die reine Massivlamelle

$$\begin{aligned} \vartheta^* = & \left(\vartheta_B - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[m^* \left(\frac{l}{2} - x^* \right) \right]}{\cosh \left(m^* \frac{l}{2} \right)} \\ & + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \end{aligned} \quad (3.3.-22)$$

und in Anlehnung an Gl. (2.2.-62) für die zusammengesetzte Lamelle

$$\begin{aligned} \vartheta = & \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} \\ & + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta - (\vartheta_0 - \vartheta_B) \frac{\sinh (mx)}{\sinh (mL)} \end{aligned} \quad (3.3.-23)$$

geschrieben werden können. [Im letzten Fall war lediglich zu beachten, daß die Absenkung der Temperatur an der Stelle B ($\vartheta_0 - \vartheta_B$) statt dem in Gl. (2.2.-62) gültigen ϑ^* beträgt. Dieses war nach Bild 2.2.-5 definiert und hat mit dem jetzigen Übertemperaturverlauf $\vartheta^* = \vartheta^*(x^*)$ im Bereich l nichts zu tun.]

Die Randbedingungen Gln. (3.3.-18), (3.3.-20) und (3.3.-21) werden von den Gln. (3.3.-22) und (3.3.-23) sofort erfüllt, da diese für die Ableitungen der früheren Gleichungen auch galten. Lediglich Gl. (3.3.-19), die die Verknüpfung zwischen beiden Übertemperaturverläufen darstellt, bedarf noch der Einarbeitung. Es gilt

$$\begin{aligned} -\lambda \left\{ \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) m \frac{\sinh \left[m \left(\frac{L}{2} - L \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{L}{2} \right)} \right. \\ \left. + (\vartheta_0 - \vartheta_B) m \frac{\cosh (mL)}{\sinh (mL)} \right\} \\ = -\lambda_M \left(\vartheta_B - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) m^* \frac{\sinh \left(m^* \frac{l}{2} \right)}{\cosh \left(m^* \frac{l}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (3.3.-24)$$

woraus ϑ_B folgt:

$$\begin{aligned} \vartheta_B = & \frac{\lambda m \left\{ - \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \tanh \left(m \frac{L}{2} \right) + \rightarrow \right. \\ & \left. \frac{m \lambda}{\tanh (mL)} + \rightarrow \right. \\ & \left. \rightarrow + \frac{\vartheta_0}{\tanh (mL)} \right\} + \lambda_M m^* \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right)}{\rightarrow + \lambda_M m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right)} \end{aligned} \quad (3.3.-25)$$

Mittlere Übertemperaturen

Diese Größen ergeben sich ebenfalls aus den früheren Betrachtungen. Es kann in Analogie zu Gl. (2.2.-49)

$$\vartheta_m^* = \left(\vartheta_B - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right)}{m^* \frac{l}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (3.3.-26)$$

und nach Gl. (2.2.-66)

$$\vartheta_m = \left(\frac{\vartheta_o + \vartheta_B}{2} - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh \left(m \frac{L}{2} \right)}{m \frac{L}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \quad (3.3.-27)$$

angegeben werden.

Wärmeabgaben und Oberflächentemperaturen

Die Wärmestromdichten berechnen sich nach den Gln. (3.3.-6) sowie (3.3.-7). Sie sind getrennt für die Breite L und l zu erfassen und die Mittelwerte der Wärmeströme nach außen und innen zu bilden:

$$\dot{q}_{a,m} = \frac{l \dot{q}_a^* + 2L \dot{q}_a}{2L + l} \quad (3.3.-28)$$

$$\dot{q}_{i,m} = \frac{l \dot{q}_i^* + 2L \dot{q}_i}{2L + l} \quad (3.3.-29)$$

Damit können die mittleren Oberflächentemperaturen

$$t_{ma} = t_a + \frac{\dot{q}_{am}}{\alpha_a} \quad (3.3.-30)$$

$$t_{mi} = t_1 + \frac{\dot{q}_{im}}{\alpha_1} \quad (3.3.-31)$$

berechnet werden. Anschließend folgt die Überprüfung der angenommenen Wärmeübergangskoeffizienten und die eventuelle iterative Verbesserung. Die mittlere Oberflächentemperatur wurde bewußt über die gesamte Lamellenbreite gebildet, um damit nur einen Wärmeübergangskoeffizienten für jede Oberfläche zu bekommen. Eine abschnittsweise Ermittlung würde bei der Unsicherheit der Wärmeübergangsverhältnisse nur eine größere Genauigkeit vortäuschen und zu erhöhtem Rechenaufwand führen, da dann auch die κ -Werte abschnittsweise zu unterscheiden wären.

3.3.3.2. Beispiel

Eine Lamellendecke ist untergehängt und besteht aus profilierten Gipsplatten. In diesen Platten ist eine Aluminiumlamelle in perforierter Ausführung und gestutzter Länge eingegossen. Der Aufbau und die Zeichnungen entsprechen dem Bild 3.3.-3. Es gelten

die Werte:

$$\delta_M = 0,035 \text{ m}$$

$$\delta_B = 0,001 \text{ m}$$

$$L = 0,150 \text{ m}$$

$$l = 0,150 \text{ m}$$

$$\lambda_M = 0,5 \text{ W/m K}$$

$$\lambda_B = 220 \text{ W/m K}$$

$$t_1 = 20^\circ \text{C}$$

$$t_a = 20^\circ \text{C}$$

$$\alpha_1 = 7,5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\kappa_a = 1,2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

$$\vartheta_o = 40 \text{ K.}$$

Die Werte α_1 und κ_a können zur Vereinfachung konstant betrachtet werden. Der Temperaturverlauf und die Wärmestromdichten sind festzustellen.

• Lösung

Die Berechnung erfolgt schrittweise.

Äquivalenter Wärmeleitkoeffizient der zusammengesetzten Rippe nach Gl. (3.3.-11):

$$\lambda = \frac{0,001 \cdot 220 + (0,035 - 0,001) 0,5}{0,035} \frac{\text{W}}{\text{m K}} = 6,77 \text{ W/m K}$$

Abkürzungen nach den Gln. (3.3.-16) und (3.3.-17)

$$m^* = \sqrt{\frac{1,2 + 7,5}{0,5 \cdot 0,035}} \frac{1}{\text{m}} = 22,3 \text{ m}^{-1}$$

$$m = \sqrt{\frac{1,2 + 7,5}{6,77 \cdot 0,035}} \frac{1}{\text{m}} = 6,1 \text{ m}^{-1}$$

Temperatur ϑ_B nach Gl. (3.3.-25)

$$\vartheta_B =$$

$$\frac{6,77 \cdot 6,1 \left\{ -40 \cdot \tanh \left(6,1 \frac{0,15}{2} \right) + \frac{40}{\tanh (6,1 \cdot 0,15)} \right\}}{\frac{6,1 \cdot 6,77}{\tanh (6,1 \cdot 0,15)} + 0,5 \cdot 22,3 \tanh \left(22,3 \frac{0,15}{2} \right)} \text{ K} = 23,36 \text{ K}$$

Temperaturverlauf ϑ^* nach Gl. (3.3.-22)

$$\vartheta^* = 23,36 \frac{\cosh \left[22,3 \left(\frac{0,15}{2} - x^* \right) \right]}{\cosh \left(22,3 \frac{0,15}{2} \right)} \text{ K}$$

x^* in m	0	0,02	0,04	0,06	0,075
ϑ^* in K	23,36	15,69	11,19	8,95	8,47

Temperaturverlauf ϑ nach Gl. (3.3.-23)

$$\vartheta = 40 \frac{\cosh \left[6,1 \left(\frac{0,15}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(6,1 \frac{0,15}{2} \right)} \text{ K} - (40 - 23,36) \frac{\sinh (6,1x)}{\sinh (6,1 \cdot 0,15)} \text{ K}$$

x in m	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15
ϑ in K	40	34,60	30,36	27,14	24,83	23,36

Die Ergebnisse sind im Bild 3.3.-4 aufgetragen. Zeichnet man die Tangenten an die Kurven ϑ und ϑ^* an der Stelle $x = L$ bzw. $x^* = 0$, so ergeben sich die Anstiege, die identisch mit den Differentialquotienten der Übertemperaturverläufe an dieser Stelle sind, zu

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -36 \frac{\text{K}}{\text{m}}; \quad \frac{d\vartheta^*}{dx^*} = -490 \frac{\text{K}}{\text{m}}.$$

Ist die Berechnung richtig, so muß die Gl. (3.3.-19) erfüllt sein. Probe:

$$6,77 \cdot (-36) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0,5 \cdot (-490) \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$244 \text{ W/m}^2 \approx 245 \text{ W/m}^2.$$

Die mittleren Übertemperaturen betragen nach den Gln. (3.3.-26) und (3.3.-27)

$$\vartheta_m^* = 23,36 \frac{\tanh \left(22,3 \frac{0,15}{2} \right)}{22,3 \frac{0,15}{2}} \text{ K} = 13,0 \text{ K}$$

$$\vartheta_m = \frac{40 + 23,36}{2} \frac{\tanh \left(6,1 \frac{0,15}{2} \right)}{6,1 \frac{0,15}{2}} \text{ K} = 29,6 \text{ K},$$

und die Wärmestromdichten nach den Gln. (3.3.-6) und (3.3.-7)

$$\dot{q}_a^* = 1,2 \cdot 13 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 15,6 \text{ W/m}^2;$$

$$\dot{q}_a = 1,2 \cdot 29,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 35,5 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_i^* = 7,5 \cdot 13 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 97,5 \text{ W/m}^2;$$

$$\dot{q}_i = 7,5 \cdot 29,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 222 \text{ W/m}^2$$

führen zu den Mittelwerten nach den Gln. (3.3.-28) und (3.3.-29)

$$\dot{q}_{a,m} = \frac{0,15 \cdot 15,6 + 2 \cdot 0,15 \cdot 35,5}{2 \cdot 0,15 + 0,15} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 28,9 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_{i,m} = \frac{0,15 \cdot 97,5 + 2 \cdot 0,15 \cdot 222}{2 \cdot 0,15 + 0,15} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 180,5 \text{ W/m}^2.$$

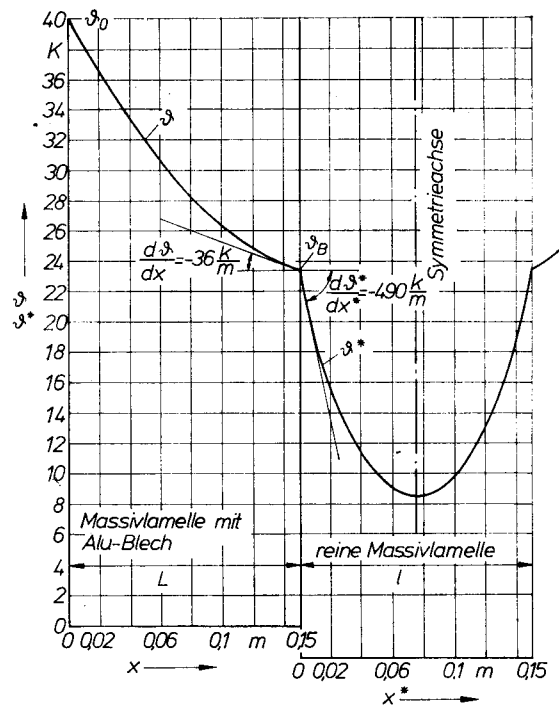


Bild 3.3.-4
Temperaturverläufe in einer heterogenen Lamelle als Ergebnis des Beispiels 3.3.3.2.

3.3.3.3. Massivlamelle mit aufliegender Blechlamelle

Bild 3.3.-5 zeigt eine derartige Lamelle und den qualitativen Temperaturverlauf. Zur Berechnung wurde ein spezielles Modell entwickelt.

Natürlich sind auch dabei vereinfachte Annahmen notwendig. Die Betrachtung beginnt beim jeweiligen Querschnitt A. Dort habe die Blechlamelle die Temperatur t_0 bzw. die Übertemperatur ϑ_0 , und in den Querschnitt der Massivlamelle strömt keine Wärme

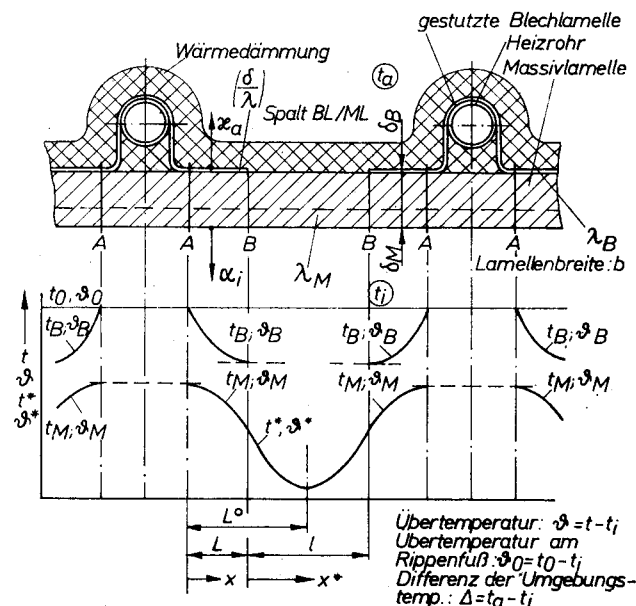


Bild 3.3.-5
Schematische Darstellung der Konstruktion und des qualitativen Temperaturverlaufs heterogener Lamellen (Massivlamelle mit aufliegender Blechlamelle)

ein. (Die Wärmeabgabe im Rohrbereich durch die Massivschicht hindurch wird separat ermittelt. Da die Wärmeübergangsverhältnisse in diesem Bereich nicht eindeutig erfaßbar sind und teilweise auch mit Reißbildung zu rechnen ist, sei die vorgenannte Randbedingung sicherheitshalber formuliert.) Weiterhin wird angenommen, daß am Ende der Blechlamelle — Querschnitt B — der Wärmestrom durch deren Stirnfläche vernachlässigbar klein ist. An gleicher Stelle fließt in der Massivlamelle ein bestimmter Wärmestrom, der durch die Wärmeabgabe zwischen den Querschnitten B aufgeprägt ist. Diese Randbedingungen lauten mathematisch formuliert, wenn ϑ_B den Verlauf der Übertemperatur in der Blech- und ϑ_M den in der Massivlamelle kennzeichnet,

$$\vartheta_B = \vartheta_0 \quad \text{für } x = 0 \quad (3.3.-32)$$

$$\frac{d\vartheta_M}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad (3.3.-33)$$

$$\frac{d\vartheta_B}{dx} = 0 \quad \text{für } x = L \quad (3.3.-34)$$

$$\frac{d\vartheta_M}{dx} = K \quad \text{für } x = L. \quad (3.3.-35)$$

Die Konstante K wird später noch definiert. Sie stellt die Verbindung zum Temperaturverlauf t^* bzw. ϑ^* dar. Dabei besteht eine Analogie zu Abschnitt 3.3.1. Da im vorliegenden Fall das Modell bedeutend komplizierter ist, erfolgt die Anpassung von ϑ^* zweckmäßigerweise nach Lösung von $\vartheta_B = \vartheta_B(x)$ und $\vartheta_M = \vartheta_M(x)$.

Wäre im Ausnahmefall die Blechlamelle durchgehend, dann gelte für $L = L^0$ und für $K = 0$.

Die thermodynamischen Vorgänge an zwei aneinander grenzenden Elementen der Lamellen können in Verbindung mit Bild 3.3.-6 beschrieben werden. Es gelten die Wärmestrombilanzen:

Blechlamelle

— eintretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{B,x} = -\lambda_B A_B \frac{d\vartheta_B}{dx} \quad (3.3.-36)$$

— austretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{B,x+dx} = -\lambda_B A_B \frac{d}{dx} \left(\vartheta_B + \frac{d\vartheta_B}{dx} dx \right) \quad (3.3.-37)$$

Wärmestrom an die Umgebung

$$d\dot{Q}_a = \alpha_a (\vartheta_B - \Delta) b dx \quad (3.3.-38)$$

Wärmestrom an die Massivlamelle

$$d\dot{Q} = \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)_{\text{SpaltBL/ML}} (\vartheta_B - \vartheta_M) b dx \quad (3.3.-39)$$

Massivlamelle

— eintretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{M,x} = -\lambda_M A_M \frac{d\vartheta_M}{dx} \quad (3.3.-40)$$

— austretender Wärmestrom

$$\dot{Q}_{M,x+dx} = -\lambda_M A_M \frac{d}{dx} \left(\vartheta_M + \frac{d\vartheta_M}{dx} dx \right) \quad (3.3.-41)$$

Wärmestrom an die Umgebung

$$d\dot{Q}_i = \alpha_i \vartheta_M b dx. \quad (3.3.-42)$$

Die Teilwärmedurchgangskoeffizienten α_i und α_a beinhalten außer dem Wärmeübergangswiderstand noch eventuelle Wärmeleitwiderstände von Deckschichten. Sind diese nicht existent, so gelten $\alpha_i = \alpha_1$ und $\alpha_a = \alpha_a$.

Mit den definierten Wärmeströmen folgen nach Bild 3.3.-6 die Wärmebilanzen

$$d\dot{Q}_a + d\dot{Q} = \dot{Q}_{B,x} - \dot{Q}_{B,x+dx} \quad (3.3.-43)$$

und

$$d\dot{Q}_i - d\dot{Q} = \dot{Q}_{M,x} - \dot{Q}_{M,x+dx}. \quad (3.3.-44)$$

Substituiert man die einzelnen Größen, so ergeben sich unter Beachtung von $A = b \cdot \delta$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta_B}{dx^2} - \frac{\alpha_a + \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)_{\text{SpaltBL/ML}}}{\lambda_B \delta_B} \vartheta_B + \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)_{\text{SpaltBL/ML}} \vartheta_M &= -\frac{\alpha_a}{\lambda_B \delta_B} \Delta \end{aligned} \quad (3.3.-45)$$

und

$$\frac{d^2 \vartheta_M}{dx^2} + \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)_{\text{SpaltBL/ML}} \vartheta_B - \frac{\alpha_i + \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)_{\text{SpaltBL/ML}}}{\lambda_M \delta_M} \vartheta_M = 0. \quad (3.3.-46)$$

Es handelt sich dabei um ein System von gekoppelten, linearen, inhomogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ist relativ aufwendig.

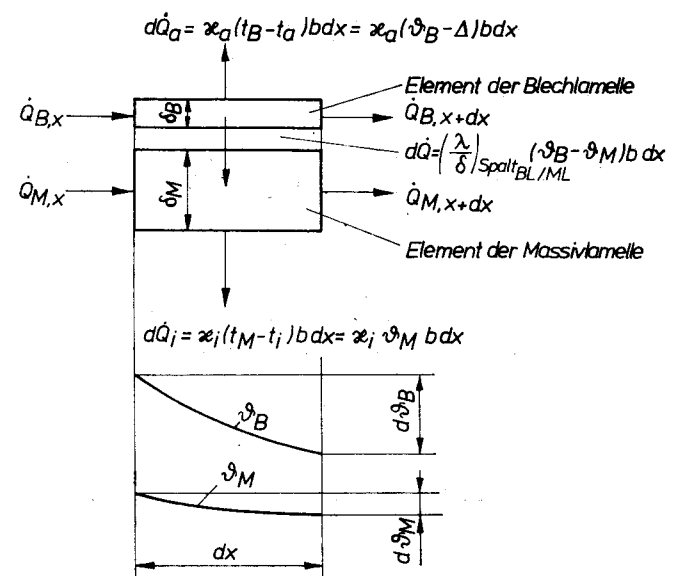


Bild 3.3.-6
Thermodynamische Verhältnisse an zwei nebeneinanderliegenden Elementen der Blech- und der Massivlamelle

Lösung des Systems von Differentialgleichungen

Zunächst werden zur Vereinfachung der Ableitung folgende Abkürzungen eingeführt:

$$-\frac{\kappa_a + \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{SpaltBL/ML}}}{\lambda_B \delta_B} = a_1 \quad (3.3.-47)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{SpaltBL/ML}} = b_1 \quad (3.3.-48)$$

$$-\frac{\kappa_a}{\lambda_B \delta_B} \Delta = c_1 \quad (3.3.-49)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{SpaltBL/ML}} = a_2 \quad (3.3.-50)$$

$$-\frac{\kappa_1 + \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{SpaltBL/ML}}}{\lambda_M \delta_M} = b_2, \quad (3.3.-51)$$

die dann das System ergeben:

$$\frac{d^2 \vartheta_B}{dx^2} + a_1 \vartheta_B + b_1 \vartheta_M = c_1 \quad (3.3.-52)$$

$$\frac{d^2 \vartheta_M}{dx^2} + a_2 \vartheta_B + b_2 \vartheta_M = 0. \quad (3.3.-53)$$

Als Lösungsansätze werden gewählt:

$$\vartheta_B = C_1 e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad \vartheta_M = C_2 e^{\lambda x}. \quad (3.3.-54)$$

Damit nehmen die Gln. (3.3.-52) und (3.3.-53) die homogenen Formen an:

$$(\lambda^2 + a_1) C_1 + b_1 C_2 = 0 \quad (3.3.-55)$$

$$a_2 C_1 + (\lambda^2 + b_2) C_2 = 0, \quad (3.3.-56)$$

woraus die charakteristische Gleichung folgt:

$$\lambda^4 + \lambda^2(a_1 + b_2) - b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0. \quad (3.3.-57)$$

Die Wurzeln sind

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{a_1 + b_2}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a_1 + b_2)^2}{4} - a_1 b_2 + b_1 a_2}. \quad (3.3.-58)$$

Praktische Abschätzungen der einzelnen Größen ergaben, daß man mit vier unterschiedlichen Lösungen rechnen kann. Damit wird Gl. (3.3.-54)

$$t_B = C_{1,1} e^{\lambda_{1,x}} + C_{1,2} e^{\lambda_{2,x}} + C_{1,3} e^{\lambda_{3,x}} + C_{1,4} e^{\lambda_{4,x}} \quad (3.3.-59)$$

$$t_M = C_{2,1} e^{\lambda_{1,x}} + C_{2,2} e^{\lambda_{2,x}} + C_{2,3} e^{\lambda_{3,x}} + C_{2,4} e^{\lambda_{4,x}}. \quad (3.3.-60)$$

Zwischen den beiden Temperaturverläufen besteht, wie bereits formuliert, eine Verbindung. Deshalb müssen auch die Konstanten C_1 und C_2 miteinander ver-

knüpft sein. Dies ist bereits durch das Gleichungssystem (3.3.-55) und (3.3.-56) für jedes λ_n gegeben. Danach gelten:

$$C_1 = -\frac{b_1}{\lambda^2 + a_1} C_2 \quad (3.3.-61)$$

oder

$$C_1 = -\frac{\lambda^2 + b_2}{a_2} C_2. \quad (3.3.-62)$$

Die Lösung des Systems homogener Differentialgleichungen lautet dann

$$\vartheta_B = \sum_{n=1}^4 -\frac{b_1}{\lambda_n^2 + a_1} C_n e^{\lambda_n x} \quad (3.3.-63)$$

$$\vartheta_M = \sum_{n=1}^4 C_n e^{\lambda_n x}. \quad (3.3.-64)$$

Als spezielle Lösung des Systems der inhomogenen Differentialgleichungen wird

$$\vartheta_B = A_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_M = A_2 \quad (3.3.-65)$$

gesetzt, wodurch die Gln. (3.3.-52) und (3.3.-53) die Form

$$a_1 A_1 + b_1 A_2 = c_1 \quad (3.3.-66)$$

$$a_2 A_1 + b_2 A_2 = 0 \quad (3.3.-67)$$

erhalten. Die Lösung führt zu

$$A_1 = \frac{b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (3.3.-68)$$

$$A_2 = \frac{a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}. \quad (3.3.-69)$$

Damit kann endlich die allgemeine Lösung des Systems der inhomogenen Differentialgleichungen angegeben werden:

$$\vartheta_B = \frac{b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} - \sum_{n=1}^4 \frac{b_1}{\lambda_n^2 + a_1} C_n e^{\lambda_n x} \quad (3.3.-70)$$

$$\vartheta_M = \frac{a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} + \sum_{n=1}^4 C_n e^{\lambda_n x}. \quad (3.3.-71)$$

Auf das Einsetzen der in den Gln. (3.3.-47) bis (3.3.-51) definierten Abkürzungen soll wegen des Umfangs, den die Gleichungen dann annehmen würden, verzichtet werden.

Zu bestimmen sind allerdings noch die Konstanten C_1 bis C_4 . Dazu dienen die Randbedingungen der Gln. (3.3.-32) bis (3.3.-35). Es ergibt sich das System von Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \frac{b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} - \frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1} C_1 - \frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1} C_4 \\ &\quad - \frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1} C_3 - \frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1} C_4 \end{aligned} \quad (3.3.-72)$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0 \quad (3.3.-73)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1} \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 L} - \frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1} \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 L} \\
& - \frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1} \lambda_3 C_3 e^{\lambda_3 L} - \frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1} \lambda_4 C_4 e^{\lambda_4 L} = 0
\end{aligned} \quad (3.3.-74)$$

$$\lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 L} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 L} + \lambda_3 C_3 e^{\lambda_3 L} + \lambda_4 C_4 e^{\lambda_4 L} = K. \quad (3.3.-75)$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man die Konstanten C_1 bis C_4 , so daß das zuerst aufgeworfene Problem — der Temperaturverlauf ϑ_B und ϑ_M — erledigt ist.

Als offenes Problem steht noch die Anpassung des Temperaturverlaufs ϑ^* , der im Bereich l im Massiv-element definiert ist, an den Temperaturverlauf ϑ_M . Es gelten die Kopplungsbedingungen

$$\vartheta_M = \vartheta^* \quad \text{für } x = L \text{ und } x^* = 0 \quad (3.3.-76)$$

und

$$\frac{d\vartheta_M}{dx} = \frac{d\vartheta^*}{dx^*} = K \quad \text{für } x = L \text{ und } x^* = 0, \quad (3.3.-77)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1}, \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4, \\ -\lambda_1 \frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1} e^{\lambda_1 L}, & -\lambda_2 \frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1} e^{\lambda_2 L}, & -\lambda_3 \frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1} e^{\lambda_3 L}, & -\lambda_4 \frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1} e^{\lambda_4 L}, \\ e^{\lambda_1 L} \left[\lambda_1 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_2 L} \left[\lambda_2 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_3 L} \left[\lambda_3 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_4 L} \left[\lambda_4 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_0 - \frac{b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ 0 \\ 0 \\ \left[-\frac{a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} + \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right] m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \end{pmatrix}$$

wobei im letzten Fall gleiche Lamellendicke und Wärmeleitkoeffizienten im Bereich L und l vorausgesetzt werden. Wäre dies nicht zutreffend, dann müßte ein korrigierender Faktor eingefügt werden. Um die Kopplungsbedingungen in Ansatz bringen zu können, muß zuerst der Temperaturverlauf ϑ^* angeschrieben werden. Es gilt in Anlehnung an Gl. (2.2.-48) unter Beachtung von Gl. (3.3.-76)

$$\begin{aligned}
\vartheta^* &= \left(\vartheta_M|_{x=L} - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\cosh \left[m^* \left(\frac{l}{2} - x^* \right) \right]}{\cosh \left(m^* \frac{l}{2} \right)} \\
&+ \frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_1} \Delta \quad (3.3.-78)
\end{aligned}$$

mit

$$m^* = \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_1}{\lambda_M \delta_M}}. \quad (3.3.-79)$$

Der Differentialquotient an der Stelle $x^* = 0$ hat die Form

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} &= - \left[\frac{a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} + \sum_{n=1}^4 C_n e^{\lambda_n L} - \frac{\kappa_a}{\kappa_1 + \kappa_a} \Delta \right] \\
&\times m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right). \quad (3.3.-80)
\end{aligned}$$

Der Wert ist identisch mit der Größe K . Durch Substitution in Gl. (3.3.-75) ist die Verknüpfung von ϑ_M und ϑ^* hergestellt. Das Gleichungssystem (3.3.-72) bis (3.3.-75) — dargestellt in Matrixschreibweise — gibt Gl. (3.3.-81) wieder. Die Lösung wird zweckmäßigerweise mit Hilfe der Rechentchnik vorgenommen. Deshalb sei auf die Substitution der Konstanten und Abkürzungen in den Gln. (3.3.-70) und (3.3.-71) verzichtet.

$$\begin{pmatrix} -\frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1}, & -\frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1}, \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \lambda_4, \\ -\lambda_1 \frac{b_1}{\lambda_1^2 + a_1} e^{\lambda_1 L}, & -\lambda_2 \frac{b_1}{\lambda_2^2 + a_1} e^{\lambda_2 L}, & -\lambda_3 \frac{b_1}{\lambda_3^2 + a_1} e^{\lambda_3 L}, & -\lambda_4 \frac{b_1}{\lambda_4^2 + a_1} e^{\lambda_4 L}, \\ e^{\lambda_1 L} \left[\lambda_1 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_2 L} \left[\lambda_2 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_3 L} \left[\lambda_3 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], & e^{\lambda_4 L} \left[\lambda_4 + m^* \tanh \left(m^* \frac{l}{2} \right) \right], \end{pmatrix} \quad (3.3.-81)$$

Mittlere Übertemperaturen

Sie folgen als integraler Mittelwert zu

$$\begin{aligned}
\vartheta_{B,m} &= \frac{1}{L} \int_0^L \vartheta_B dx = \frac{b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\
&- \frac{1}{L} \sum_{n=1}^4 \frac{b_1}{\lambda_n^2 + a_1} \frac{C_n}{\lambda_n} (e^{\lambda_n L} - 1) \quad (3.3.-82)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vartheta_{M,m} &= \frac{1}{L} \int_0^L \vartheta_M dx = \frac{a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \\
&+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^4 \frac{C_n}{\lambda_n} (e^{\lambda_n L} - 1) \quad (3.3.-83)
\end{aligned}$$

sowie

$$\vartheta_m^* = \left(\vartheta_M|_{x=L} - \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta \right) \frac{\tanh\left(m^* \frac{l}{2}\right)}{m^* \frac{l}{2}} + \frac{\kappa_a}{\kappa_i + \kappa_a} \Delta. \quad (3.3.-84)$$

Wärmeabgaben und Oberflächentemperaturen

Es gelten die spezifischen Wärmestromdichten

$$\dot{q}_a = \kappa_a(t_{B,m} - t_a) = \kappa_a(\vartheta_{B,m} - \Delta) \quad (3.3.-85)$$

$$\dot{q}_i = \kappa_i(t_{M,m} - t_i) = \kappa_i \vartheta_{M,m} \quad (3.3.-86)$$

$$\dot{q}_a^* = \kappa_a(t_{M,m}^* - t_a) = \kappa_a(\vartheta_m^* - \Delta) \quad (3.3.-87)$$

$$\dot{q}_i^* = \kappa_i(t_m^* - t_i) = \kappa_i \vartheta_m^* \quad (3.3.-88)$$

und zur Berechnung der mittleren Wärmestromdichten sowie der gemittelten Oberflächentemperaturen die Gln. (3.3.-28) bis (3.3.-31).

3.3.3.4. Beispiel

Es ist eine untergehängte Heizdecke gegeben, die dem konstruktiven Aufbau des Bildes 3.3.-5 entspricht. Die geltenden Daten sind mit Beispiel 3.3.3.2. abgestimmt, um gewisse Vergleiche zu ermöglichen. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \delta_M &= 0,035 \text{ m} & t_i &= 20^\circ\text{C} \\ \delta_B &= 0,001 \text{ m} & t_a &= 20^\circ\text{C} \\ L &= 0,150 \text{ m} & \alpha_1 &= 7,5 \text{ W/m}^2 \text{ K} \\ l &= 0,150 \text{ m} & \kappa_a &= 1,2 \text{ W/m}^2 \text{ K} \\ \lambda_M &= 0,5 \text{ W/m K} & \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{SpaltBL/ML}} &= 25 \text{ W/m}^2 \text{ K} \\ \lambda_B &= 220 \text{ W/m K} & \vartheta_o &= 40 \text{ K} \end{aligned}$$

Die Werte α_1 und κ_a sollen wiederum konstant belassen werden. Die Temperaturverläufe und die Wärmestromdichten sind zu berechnen.

• Lösung

Die Lösung erfolgte unter Verwendung der Rechen-technik. Die Ergebnisse werden in verfolgbaren Schritten mitgeteilt:

$$a_1 = -\frac{1,2 + 25}{220 \cdot 0,001} \frac{1}{\text{m}^2} = -119,1 \text{ m}^{-2}$$

$$b_1 = \frac{25}{220 \cdot 0,001} \frac{1}{\text{m}^2} = 113,6 \text{ m}^{-2}$$

$$c_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{25}{0,5 \cdot 0,035} \frac{1}{\text{m}^2} = 1428,6 \text{ m}^{-2}$$

$$b_2 = -\frac{7,5 + 25}{0,5 \cdot 0,035} \frac{1}{\text{m}^2} = -1857,1 \text{ m}^{-2}$$

$$\lambda_{1,2,3,4} =$$

$$\pm \sqrt{\frac{-119,1 - 1857,1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-119,1 - 1857,1}{2}\right)^2 - 119,1 \cdot 1857,1 + 113,6 \cdot 1428,6}}$$

$$\lambda_1 = 44,11 \quad \lambda_3 = 5,50$$

$$\lambda_2 = -44,11 \quad \lambda_4 = -5,50$$

$$m^* = \sqrt{\frac{1,2 + 7,5}{0,5 \cdot 0,035}} \frac{1}{\text{m}} = 22,3 \text{ m}^{-1}$$

Lösung des Gleichungssystems (3.3.-81)

$$C_1 = -0,008782 \quad C_3 = 4,077077$$

$$C_2 = -2,875460 \quad C_4 = 27,067837$$

Gleichungen der Temperaturkurven ϑ_B und ϑ_M nach den Gln. (3.3.-70) und (3.3.-71)

$$\begin{aligned} \vartheta_B &= \frac{113,6}{44,11^2 - 119,1} 0,008782 e^{44,11x} \\ &+ \frac{113,6}{44,11^2 - 119,1} 2,875460 e^{-44,11x} \\ &- \frac{113,6}{5,5^2 - 119,1} 4,077077 e^{5,5x} \\ &- \frac{113,6}{5,5^2 - 119,1} 27,067837 e^{-5,5x} \\ \vartheta_M &= -0,008782 e^{44,11x} - 2,875460 e^{-44,11x} \\ &+ 4,077077 e^{5,5x} + 27,067837 e^{-5,5x} \end{aligned}$$

Ergebnisse

x in m	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15
ϑ_B in K	40,0	35,5	32,2	29,7	28,1	27,5
ϑ_M in K	28,3	27,0	24,8	22,7	20,1	14,6

Gleichung der Temperaturkurve ϑ^* nach Gl. (3.3.-78)

$$\vartheta^* = 14,6 \frac{\cosh\left[22,3\left(\frac{0,15}{2} - x^*\right)\right]}{\cosh\left(22,3 \frac{0,15}{2}\right)}$$

Ergebnisse

x^* in m	0	0,02	0,04	0,06	0,075
ϑ^* in K	14,6	9,8	7,0	5,6	5,3

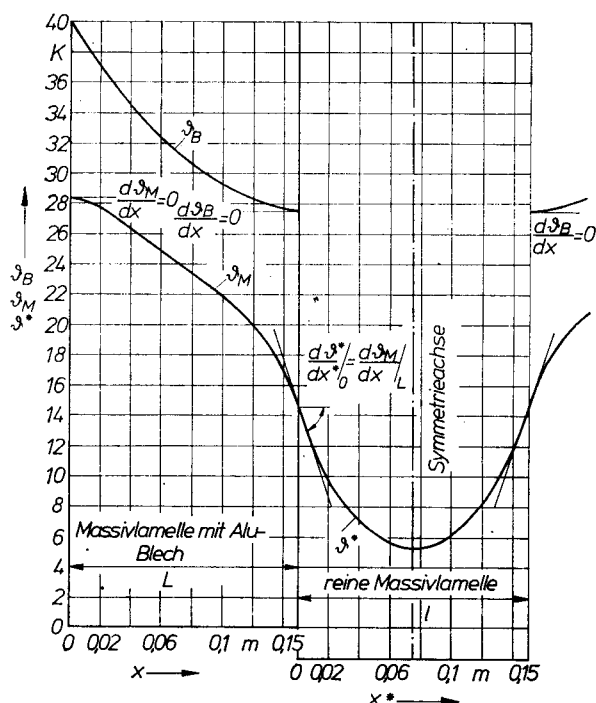


Bild 3.3.-7
Temperaturverläufe in einer heterogenen Lamelle als Ergebnis des Beispiels 3.3.3.4.

Die grafische Darstellung erfolgte im Bild 3.3.-7. Die Temperaturverläufe ϑ_M und ϑ^* liegen niedriger als die vergleichbaren Kurven ϑ und ϑ^* des Beispiels 3.3.3.2. Die Ursache findet man in dem Wärmeübergangswiderstand des Spaltes zwischen Blech- und Massivlamelle begründet.

Mittlere Übertemperaturen nach den Gln. (3.3.-82) bis (3.3.-84)

$$\vartheta_{B,m} = 31,8 \text{ K}$$

$$\vartheta_{M,m} = 23,3 \text{ K}$$

$$\vartheta_m^* = 8,1 \text{ K.}$$

Wärmestromdichten nach den Gln. (3.3.-85) bis (3.3.-88) sowie (3.3.-28) und (3.3.-29)

$$\dot{q}_a^* = 9,8 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_i^* = 61,0 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_a = 38,1 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_i = 175,1 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_{a,m} = 28,7 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_{i,m} = 137,0 \text{ W/m}^2.$$

3.4. Praktische Berechnung der Gesamtwärmeabgabe

3.4.1. Verfahrensmöglichkeiten

In den vorangegangenen Abschnitten wurden für die verschiedensten Konstruktionen von Strahlplatten und anderen Elementen mit lamellenförmigem Auf-

bau der Zusammenhang zwischen Heizmedientemperatur und Rippenfußtemperatur sowie zwischen Rippenfußtemperatur und Lamellentemperatur einschließlich deren Mitteltemperatur abgeleitet. Es besteht also Kenntnis über

$$t_F = f(t_o; \dot{Q}_o) \quad (3.4.-1)$$

und

$$t = f(t_o) \rightarrow t_m = f(t_o) \rightarrow \dot{Q}_o = f(t_o). \quad (3.4.-2)$$

Nunmehr ergibt sich einerseits die Aufgabe, die Verknüpfung zwischen beiden funktionellen Beziehungen herzustellen sowie die Gesamtwärmeabgabe der Konstruktion — bestehend aus Rohrbereich und Lamellenbereich — zu ermitteln.

Die Übergabeparameter zwischen den Algorithmen nach Gl. (3.4.-1) sowie denen nach Gl. (3.4.-2) sind die sogenannte Rippenfußtemperatur t_o und der Wärmestrom $\dot{Q}_o$, der vom Rippenfuß in eine halbe Lamelle fließt. In einigen Fällen ist es möglich, eine geschlossene Lösung durch Substitutionen herzustellen. Generell erscheint es jedoch zweckmäßig, die genannte Nahtstelle „offen“ zu belassen. Die Gründe dafür sind:

- Die Gleichungen würden enorm aufgebläht, ohne daß sich die eigentliche Berechnung vereinfacht.
- Die Kombinationen zwischen den verschiedenen Verbindungsstrukturen Rohr—Lamelle und den unterschiedlichen Lamellenkonstruktionen sollen stets möglich sein.
- Beachtet man die Abhängigkeit der Wärmeübergangskoeffizienten von den jeweiligen Oberflächentemperaturen der beheizten Platten, dann ist eine explizite Darstellung von t_o oder gar von t_F ohnehin illusorisch.

Es wurden deshalb die nachfolgenden Verfahrensweisen zur Diskussion gestellt:

A.

Ausgehend von t_o wird die Wärmeabgabe der Lamelle berechnet, wobei die Wärmeübergangskoeffizienten α_i und α_a , durch Wiederholung des Berechnungszyklus, beginnend von einer Schätzung, an den richtigen Wert anzugleichen sind. Mit Kenntnis von t_o und $\dot{Q}_o$ ist die Heizmedientemperatur t_F bestimmbar. Die Wärmeabgabe des Rohrbereiches bedarf der zusätzlichen Erfassung.

B.

Vorgegeben wird die mittlere Oberflächentemperatur auf der Innenseite $t_{m,i}$. Damit ist α_i eindeutig determiniert, so daß eine einmalige Berechnung bereits die realen Verhältnisse erfaßt. Die Anpassung der äußeren Wärmeübergangsbedingungen erfolgt unproblematisch, da die Größe des Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ_a in erster Linie durch die in der Regel vorhandene Dämmschicht und nur in geringem Maße durch α_a beeinflusst wird. Damit ist die Gesamtwärmeabgabe der Lamelle ermittelbar. Die Berechnung der Rippenfußtemperatur t_o kann sofort erfolgen, wenn es sich um homogene Lamellen handelt. Nachdem t_o und $\dot{Q}_o$ bekannt sind, ist über den Algorithmus $t_F = f(t_o; \dot{Q}_o)$ auf die Heizmedientemperatur zu schließen. Die

Wärmeabgabe des Rohrbereiches muß anschließend erfaßt werden.

Die Variante A. besitzt den Vorteil, für die in den Abschnitten 3.2. und 3.3. aufgestellten Algorithmen sofort anwendbar zu sein. Der Nachteil liegt in der iterativen Einarbeitung der Wärmeübergangsverhältnisse. Da letzteres bei Einsatz der elektronischen Datenverarbeitung keinen Hinderungsgrund darstellt, erscheint Variante A. als prädestiniert für den Aufbau eines Rechenprogramms. Variante B. sollte angewendet werden, wenn die wärmetechnischen Größen homogener Lamellen manuell zu berechnen sind.

Daß man in beiden Fällen zweckmäßigerweise nicht von einer bestimmten Heizmedientemperatur ausgeht, kann nicht als Nachteil gewertet werden, da in der Regel ohnehin Leistungskurven für bestimmte Konstruktionen in Abhängigkeit von der mittleren Medientemperatur verlangt werden. Ausführliche Darstellungen finden sich im Abschnitt 3.5. für Variante A. und im Anwendungsbeispiel 3.4.3. für Variante B.

3.4.2. Wärmetechnische Näherungen bei der Kombination der Konstruktionselemente

Die theoretischen Probleme der Ermittlung der Wärmeabgabe im Rohr- und Lamellenbereich wurden in den speziellen Abschnitten behandelt und gelöst. Es verbleibt jedoch noch die typische ingenieurmäßige Aufgabe, die geeigneten praktischen Approximationen für die den Berechnungen zugrunde zu legenden Abmessungen, Temperaturen, Wärmeübergangskoeffizienten u. a. m. zu finden. Dabei ist es wichtig, den Aufwand in Relation zur Genauigkeit zu sehen.

Mögliche Ausführungsformen der Verbindung zwischen Rohr und Lamelle sind in Bild 3.4.-1 dargestellt. Die Rohre geben je nach Konstruktion außer an die Lamelle auch an die innere und äußere Umgebung Wärme ab. Die in Ansatz gebrachten wärmeabgebenden Flächen sind im Bild 3.4.-1 dick gezeichnet. Zur Beurteilung über die Güte dieser Näherung muß der Definitionsbereich der Lamelle mit gesehen werden. Er ist bei den Darstellungen jeweils mit vermerkt. Entsprechend der Berechnungsgrundlage für die Lamellen wird im Bereich der gesamten Lamelle ein Wärmestrom nach innen und außen angenommen. Bild 3.4.-1 zeigt insgesamt sechs verschiedene Konstruktionen.

Die Bezeichnungen sind in Übereinstimmung mit dem Rechenprogramm (Abschnitt 3.5.) gewählt. Als Grundprinzip wird bei der Berechnung der Wärmeströme davon ausgegangen, daß Teilwärmedurchgangskoeffizienten im wärmegeprägten Bereich gleich denen der gedämmten Lamelle gesetzt, daß Wärmeübergangskoeffizienten der nackten Rohroberfläche entsprechend den wirklichen Rohroberflächentemperaturen neu bestimmt und daß beim Wärmedurchgang durch unter dem Rohr liegende Massivlamellen für die Berechnung die Wärmeübergangskoeffizienten des Lamellenbereiches verwendet werden. Damit ergeben sich die Wärmeströme bei den einzelnen Konstruktionen.

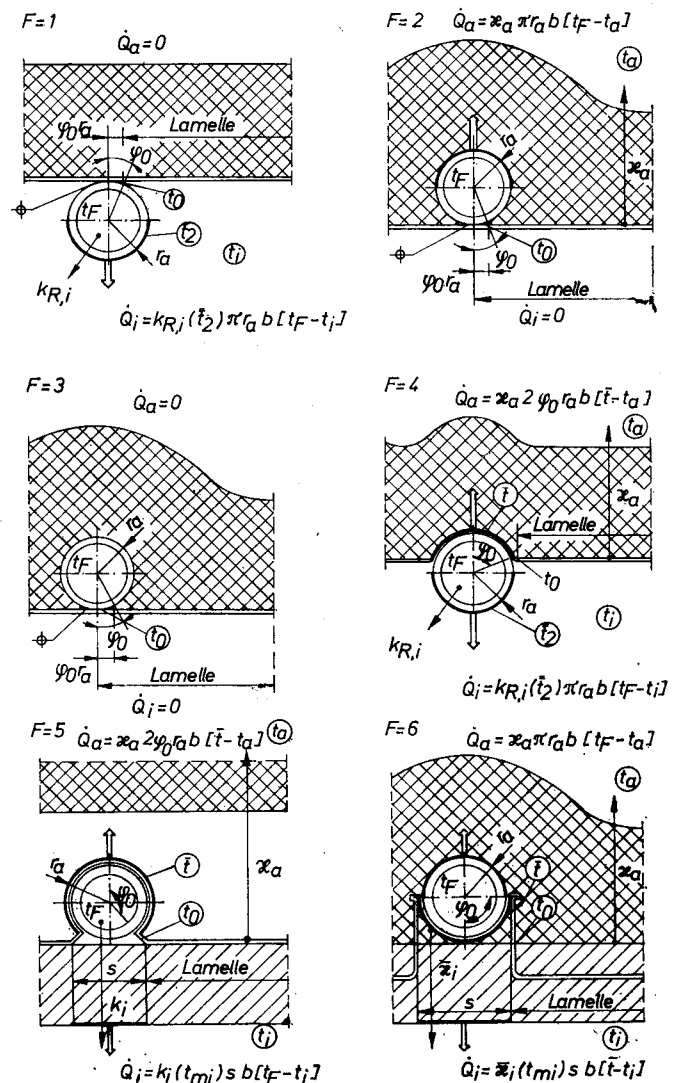


Bild 3.4.-1

Praktische Ausführungsformen der Verbindung zwischen Heizrohr und Lamelle sowie der entsprechenden wärmetechnischen Approximation

Ausführung F = 1

Die Wärmeabgabe des Rohres nach außen wird vernachlässigt, da die Strahlplatten auf der Oberseite gut wärmegeprägt sind und die Schweißnaht im Verhältnis zur Lamelle schmal ist ($\varphi_0 r_a \ll 1/2$). Gemäß Abschnitt 3.2.3.3. wird für die Wärmeabgabe des Heizrohres zur inneren Umgebung

$$\dot{Q}_i = k_{R,i} \cdot \pi r_a b (t_F - t_i) \quad (3.4.-3)$$

mit dem näherungsweisen Koeffizienten $k(\bar{t}_2)$ nach Gl. (3.2.-103) und ihrer iterativ ermittelten Oberflächentemperatur gesetzt.

Ausführung F = 2 und F = 3

Für die Wärmeabgabe der Lamelle wird der Rohrabstand als geometrische Abmessung angenommen. Dadurch entfällt die Berücksichtigung eines zusätzlichen Wärmestromes durch das Heizrohr nach innen. Die Wärmeabgabe nach außen kann bei Verwendung

des Berechnungsmodells 3.2.3.1. ($\equiv F 3$) Null und bei Ansatz des Modells 3.2.3.3. ($\equiv F 2$)

$$\dot{Q}_a = \kappa_a \pi r_a b (t_F - t_a) \quad (3.4.-4)$$

mit konstantem κ_a angenommen werden. Die etwas zu große rechnerische Wärmeabgabe der Lamelle im Bereich der Schweißnaht nach außen und die Vernachlässigung des Rohrbereiches φ bis $\pi/2$ in gleicher Richtung kompensieren sich teilweise und sind generell von untergeordneter Bedeutung.

Ausführung F = 4

Die Wärmeabgabe der gebogenen Lamelle im Rohrbereich ist nach

$$\dot{Q}_a = \kappa_a 2\varphi_0 r_a b (\bar{\vartheta} - t_a) = \kappa_a 2\varphi_0 r_a b (\bar{\vartheta} - \Delta) \quad (3.4.-5)$$

mit der mittleren Lamellenübertemperatur $\bar{\vartheta}$ im Sickenbereich entsprechend Gl. (3.2.-25) zu berechnen. Für manuelle Ermittlungen kann man näherungsweise für $\bar{\vartheta} = \vartheta_0$ ohne bemerkenswerten Fehler setzen. Die Wärmeabgabe vom Heizrohr zur inneren Umgebung erfolgt wie bei Ausführung F = 1 — also nach Gl. (3.4.-3).

Ausführung F = 5

Die Wärmeabgabe der rohrumhüllenden Lamelle nach außen kann nach Gl. (3.4.-5) mit den dort vermerkten Berechnungsmethoden für $\bar{\vartheta}$ vorgenommen werden. Zur Berechnung des Wärmestromes nach innen gelte

$$\dot{Q}_i = k_i s b (t_F - t_i) = k_i s b \vartheta_F \quad (3.4.-6)$$

mit dem Wärmedurchgangskoeffizienten

$$k_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_a - r_i}{\lambda} + \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Spalt R/ML}} + \frac{\delta_M}{\lambda_M} + \frac{1}{\alpha_i}} \quad (3.4.-7)$$

Ausführung F = 6

Der Wärmestrom des Rohres nach außen entspricht in vollem Umfang der Variante F = 2, so daß Gl. (3.4.-4) gilt. Die Wärmeabgabe nach innen berechnet sich näherungsweise zu

$$\dot{Q}_i = \bar{\kappa}_i s b (\bar{i} - t_i) = \bar{\kappa}_i s b \bar{\vartheta} \quad (3.4.-8)$$

mit

$$\bar{\kappa}_i = \frac{1}{\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)_{\text{Spalt R/ML}} + \frac{\delta_M}{\lambda_M} + \frac{1}{\alpha_i}} \quad (3.4.-9)$$

Die mittlere Lamellentemperatur im Sickerbereich ist analog Gl. (3.2.-25) unter Beachtung der Anmerkung des Abschnittes 3.2.1. zu ermitteln.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bezüglich der Anbringung der außenliegenden Wärmedämmungen die direkt anliegenden Schichten — wie bei F = 1 bis F = 4 — und die im Abstand verlegten — wie bei F = 5 — rechnerisch gleich behandelt werden. Im letzten Fall ist lediglich die Luftschicht bei der Berechnung des Teilwärmehduregangskoeffizienten mit zu berücksichtigen. Die Variante F = 5 soll somit nur eine weitere Möglichkeit der Dämmschichtanordnung verdeutlichen.

Im Bild 3.4.-2 sind die Lamellenkonstruktionen und deren Vermaßung zusammengestellt, für welche Berechnungsalgorithmen vorliegen. Theoretisch sind alle Anschlußvarianten und alle Lamellenvarianten kombinierbar. Beispiele werden im Bild 3.4.-3 gezeigt.

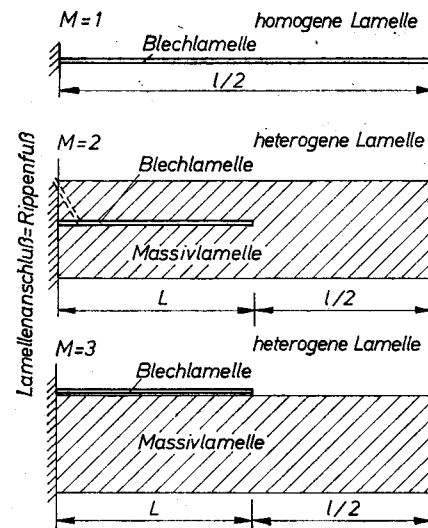


Bild 3.4.-2
Schematische Darstellung der berechenbaren Lamellenkonstruktionen

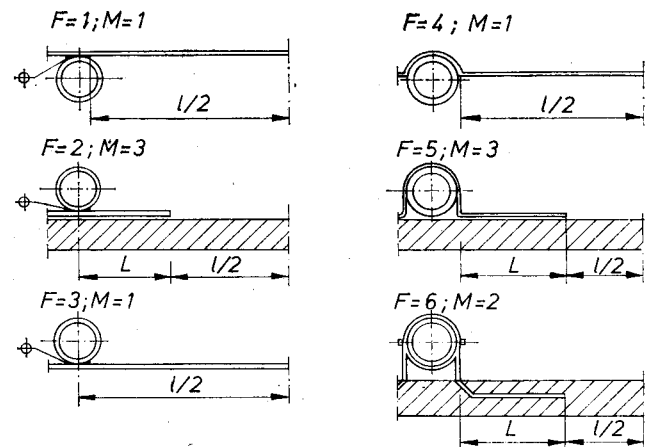


Bild 3.4.-3
Auswahl von Kombinationsmöglichkeiten von Verbindungs- und Lamellenkonstruktionen

4. Wärmeabgabe von Infrarotstrahlern

4.1. Allgemeines

Die Wärmeleistungen von Infrarotstrahlern werden üblicherweise von den Geräteherstellern angegeben. Sie lassen sich bei Elektrostrahlern durch die elektrische Leistungsmessung leicht bestimmen. Bei Gasstrahlern erfolgt die Ermittlung über eine Bilanz der eingesetzten Primärenergie und der im Abgas enthaltenen Verlustenergie. Der Wirkungsgrad ergibt sich näherungsweise bei direkter Abgasführung (Abgasrohrleitung) zu 85% und bei indirekter Abgasführung (Abgase werden über die Raumlüftung entfernt) zu 95%.

Eine Besonderheit der Infrarotstrahler ist die Anbringung von Reflektoren bei fast allen Bauarten. Dadurch erhält man bei stabförmigen Heizstäben keine nach allen Richtungen gleichmäßige Intensitätsverteilung mehr, und bei flächenförmigen Strahlern entspricht die Intensitätsverteilung nicht mehr dem LAMBERTSchen Kosinusetz. In der Praxis werden für die wirklichen Verhältnisse richtungsabhängige Verteilungsdiagramme — üblicherweise in Polarkoordinaten — dargestellt. Die meßtechnische Auswertung der Strahlungsfelder ist insgesamt vorteilhaft, entbindet sie den Projektanten doch vor mitunter unsicheren Annahmen, beispielsweise Strahlungskoeffizient, Oberflächentemperatur, strahlende Fläche u. a. m.

Die Probleme der Strahlungsverteilung bei Infrarotstrahlern sind denen der Lichtverteilung bei Leuchten gleich. Es besteht Analogie zwischen folgenden Größen:

Energiestrom (Wärmestrom) $\dot{Q}_s$ in W

— Lichtstrom Φ in lm

spezifischer Energiestrom, bezogen auf das bestrahlte Flächenelement,

$$e_A = \frac{d\dot{Q}_s}{dA} \text{ in W/m}^2$$

— Beleuchtungsstärke E in lx ($\equiv \text{lm/m}^2$)

spezifischer Energiestrom, bezogen auf das bestrahlte Raumwinkelement,

$$e_\Omega = \frac{d\dot{Q}_s}{d\Omega} \text{ in W/sr}$$

— Lichtstärke I in cd.

Damit ist eine Möglichkeit geschaffen, einige in der Beleuchtungstechnik gebräuchliche Betrachtungen zu übernehmen. Dies trifft allerdings nicht auf die Bemessungsverfahren zu, da die in dem spezifischen Bereich auftretenden Forderungen keine Übertragung auf die Heizungstechnik gestatten. Der Klärung bedarf noch die Frage, inwieweit für spätere wärme-physiologische Nachrechnungen der Strahler näherungsweise durch eine äquivalente ebene Fläche, für

die das LAMBERTSche Kosinusetz gilt, ersetzt werden kann, so daß die allgemein üblichen Algorithmen weiterhin anwendbar sind.

4.2. Wirkung von Reflektoren

4.2.1. Gütegrad

Zur Beurteilung der verschiedenen Reflektorbauarten dient der Gütegrad. Er ist definiert durch den Quotienten: Gesamte emittierte Strahlung $\dot{Q}_s^*$ bei Anbringung eines Reflektors zur Gesamtstrahlung $\dot{Q}_s$ ohne Reflektor

$$\eta = \frac{\dot{Q}_s^*}{\dot{Q}_s} \quad (4.2.-1)$$

Bezeichnet man die dem Reflektor zugestrahlte Energie mit $\dot{Q}_{s,R}$, dann beträgt der absorbierte Anteil $a\dot{Q}_{s,R}$ bzw. $(1-r)\dot{Q}_{s,R}$. Dieser Energiestrom wird größtenteils konvektiv an die Umgebung übertragen. Die Gl. (4.2.-1) kann dann auch

$$\eta = \frac{\dot{Q}_s - a\dot{Q}_{s,R}}{\dot{Q}_s} = 1 - a \frac{\dot{Q}_{s,R}}{\dot{Q}_s} = 1 - \frac{\dot{Q}_{s,R}}{\dot{Q}_s} (1-r) \quad (4.2.-2)$$

geschrieben werden. Diese Berechnung ist für spiegelnde Reflektoren bei einmaliger Reflexion der auftreffenden Strahlung zutreffend. Für diffuse Reflektoren gibt HARTINGER [26]

$$\eta = 1 - \frac{\dot{Q}_{s,R}}{\dot{Q}_s} \frac{1-r}{1-r \frac{\dot{Q}_{s,R}}{\dot{Q}_s}} \quad (4.2.-3)$$

an. Aus den Ergebnissen lassen sich einige Konstruktionsmerkmale ableiten.

Der Reflektor sollte aus spiegelndem Material, z. B. poliertem Aluminiumblech, bestehen.

Die Strahlung auf den Reflektor $\dot{Q}_{s,R}$ sollte gering gehalten werden.

Nach der letzten Forderung wäre es ungünstig, wenn der Strahler tief im Reflektor sitzt, andererseits wird jedoch die Richtwirkung der vom Strahler emittierten Strahlung verbessert. Das heißt, letztlich liegt bezüglich der Konstruktion ein Optimierungsproblem vor.

Abschließend sei festgestellt, daß die Problematik des Gütegrades in erster Linie vom Hersteller zu beachten ist. Bei der Bemessung einer Anlage mit Infrarotstrahlern hat dieser nur eine untergeordnete Bedeutung.

4.2.2. Ermittlung von Strahlungsverteilungen

Wie bereits eingangs erwähnt, werden die Strahlungsverteilungen im Polarkoordinatensystem angegeben. Bei stark axialunsymmetrischer Ausstrahlung sollten Verteilungskurven in verschiedenen Meridianebenen erfaßt werden. Die spezifischen Energieströme sind dabei wahlweise als e_D in W/sr oder als e_A in W/m² dargestellt. Die Aussage in der ersten Form ist eindeutig, da sich der Energiestrom auf den Raumwinkel

bezieht. Im zweiten Fall wird vorausgesetzt, daß die Fläche normal zur Verbindungsgeraden (Strahler — Fläche) liegt. Zusätzlich muß noch die Entfernung r der Fläche vom Strahler — gemessen längs der Verbindungsgeraden — angegeben werden. Es leuchtet ein, daß die letztere Darstellung umständlicher ist als die erstere, dennoch wenden sie einige Hersteller an. Die Umrechnung erfolgt entsprechend der Definitionsgleichung für den Raumwinkel ($d\Omega = dA/r^2$) zu

$$e_D = e_A \cdot r^2. \quad (4.2.-4)$$

Die nachfolgenden Bilder zeigen einige qualitative Beispiel-Verläufe. Im Bild 4.2.-1 sind für einen elektrischen Heizstab ohne Reflektor die gleichmäßige Strahlungsverteilung und bei Einsatz eines Reflektors der einseitig orientierte Kurvenverlauf gegenübergestellt. Im Bild 4.2.-2 werden die Verhältnisse eines Gas-Infrarotstrahlers für Ebenen entlang der Längs- und Querachse dargestellt.

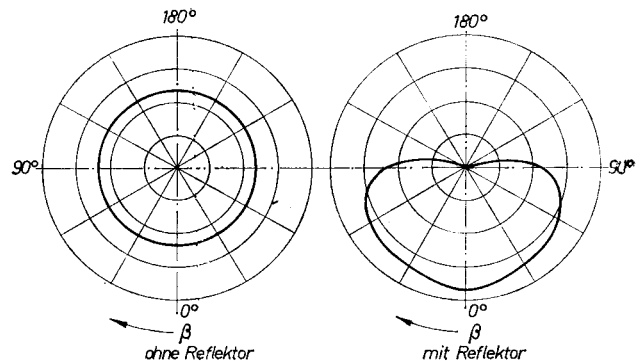


Bild 4.2.-1
Qualitative Strahlungsverteilung eines Elekt-Infrarotstrahlers ohne und mit Reflektor

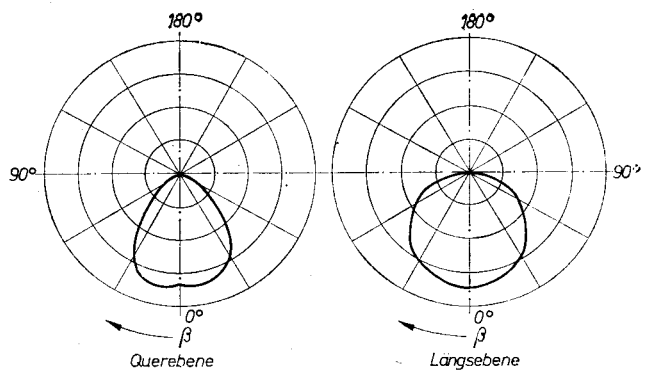


Bild 4.2.-2
Qualitative Strahlungsverteilung eines Gas-Infrarotstrahlers in quer- und längsliegenden Ebenen

Außer der exakten meßtechnischen Erfassung der Verteilungskurven kann, einem Vorschlag von HALBERTSMA [27] zufolge, für spiegelnde rotations-symmetrische Reflektoren mit punktförmiger Strahlungsquelle auch ein grafisches Verfahren zur näherungsweise Vorausbestimmung Anwendung finden. Im Bild 4.2.-3 ist ein Element eines derartigen Reflektors herausgezeichnet. Es wird durch die Punkte R_1 und R_2 begrenzt. Die von der punktförmigen Strahlungsquelle ausgehenden Strahlen $\overline{MR}_1$ und $\overline{MR}_2$ werden am Reflektor nach den Gesetzen der

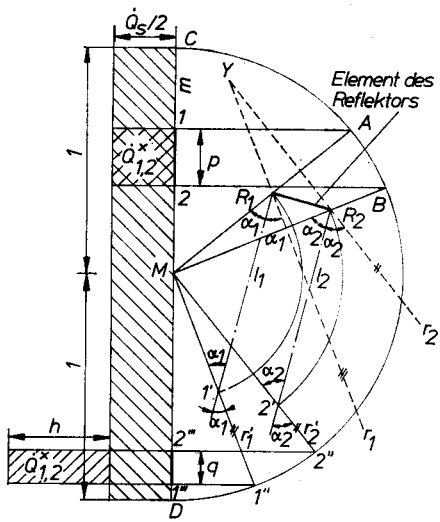


Bild 4.2.-3

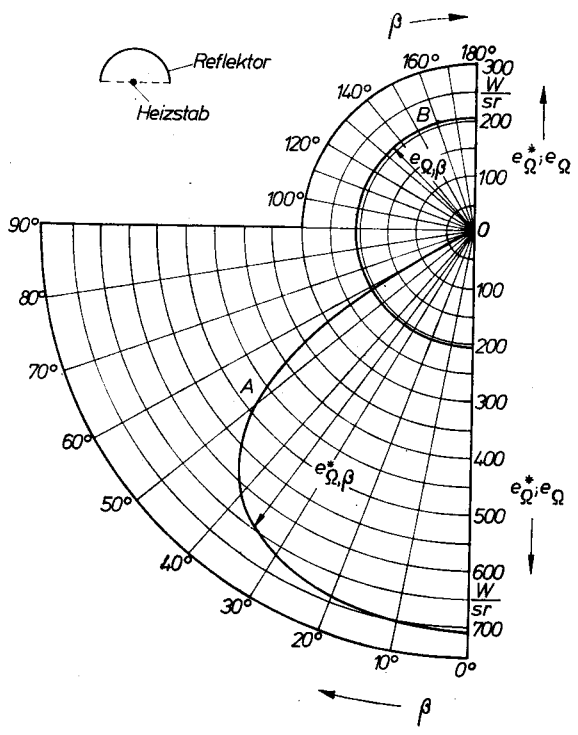


Bild 4.2.-5

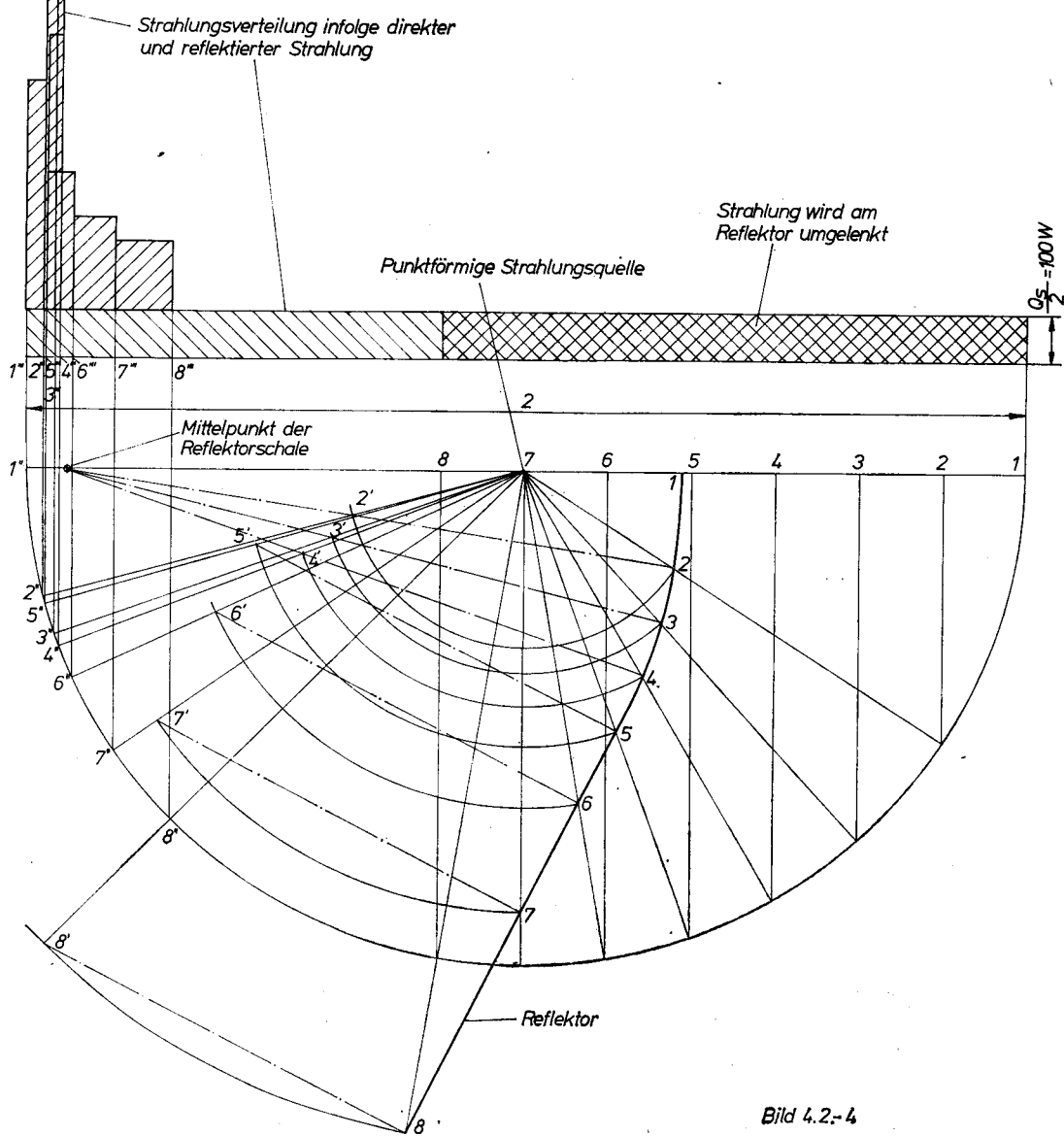


Bild 4.2.-4

Optik zurückgeworfen. Es sind dazu die Normalen l_1 und l_2 zu konstruieren und die Einfallswinkel gleich den Ausfallswinkeln zu wählen. Dadurch entstehen die Reflexionsgeraden r_1 und r_2 . Die rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich im Punkt Y . Bei einem rotationssymmetrischen Reflektor liegen dann alle Schnittpunkte auf einem Kreis um die Achse m . Bei genügend großer Entfernung kann näherungsweise angenommen werden, daß dieser Kreis mit dem Punktstrahler zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung können die Reflexionsstrahlen r_1 und r_2 parallel in den Mittelpunkt M verschoben werden. Sie stellen sich dann als die Geraden r'_1 und r'_2 dar. Diese aufwendige Konstruktion kann man vereinfachen, wenn um den Mittelpunkt Kreisbogen mit den Radien $\overline{MR_1}$ und $\overline{MR_2}$ geschlagen und zum Schnitt mit den Normalen l_1 und l_2 gebracht werden. Die Verbindungsgeraden zwischen M und den Schnittpunkten $1'$ und $2'$ sind identisch mit r'_1 und r'_2 . Grundlage ist, daß es sich um gleichschenklige Dreiecke MR_11' und MR_22' handelt.

Geht man von der Voraussetzung aus, daß sich die Strahlung gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet, so trägt man längs der Geraden m die Strahlungsenergie $\dot{Q}_s/2$ an. Die Strecken $\overline{MC}$ und $\overline{MD}$ sind gleich lang und vom Betrag Eins. Damit ergibt sich schließlich die Gesamtstrahlungsenergie $\dot{Q}_s$. Der in den durch das Reflektorelement ausgeschnittenen Raumwinkel ausgesandte Energiestrom ist ein Bruchteil der emittierten Gesamtenergie. Der Anteil entspricht dem Längenverhältnis $\overline{12}$ zu $\overline{CD}$ [vgl. auch Gl. (4.3.-4)]. Der betrachtete Energiestrom $\dot{Q}_{1,2}^*$ wird durch die doppelt schraffierte Fläche charakterisiert. Es gilt

$$\dot{Q}_{1,2}^* = \dot{Q}_s \frac{\overline{12}}{\overline{CD}} = \dot{Q}_s \frac{\overline{12}}{2} = \frac{\dot{Q}_s}{2} (\overline{12}).$$

Vernachlässigt man die Absorption des Reflektors, dann wird der gleiche Energiestrom in die Kugelzone, die durch die rotierenden Strahlen $\overline{M1''}$ und $\overline{M2''}$ entsteht, ausgestrahlt. Soll ein gegebener Absorptionsgrad Berücksichtigung finden, so ist die Strahlungsenergie entsprechend zu reduzieren. Der neue Raumwinkelanteil wird durch die Strecke $\overline{1'''2'''}$ dargestellt. Es ist in diesem Bereich außer der allseitig vorhandenen Strahlung noch die reflektierte Strahlung $\dot{Q}_{1,2}^*$ anzutragen. Wegen der geforderten Flächengleichheit gilt

$$h = \frac{\dot{Q}_s \cdot p}{2 \cdot q}.$$

Bild 4.2.-3

Prinzipiskizze zur Ermittlung der Intensitätsverteilung bei Einsatz eines rotationssymmetrischen Reflektors mit punktförmiger Strahlungsquelle

Bild 4.2.-4

Ermittlung der Strahlungsverteilung eines rotationssymmetrischen Reflektors mit punktförmiger Strahlungsquelle gezeigt an einem praktischen Beispiel

Bild 4.2.-5

Gemessene Strahlungsverteilung eines elektrisch betriebenen Langfeldstrahlers mit Reflektor (Kurve A) und umgerechnete Strahlungsverteilung bei demontiertem Reflektor (Kurve B)

Wird die beschriebene Konstruktion für jedes Reflektorelement wiederholt, so ergibt sich die gesamte Strahlungsverteilung. Qualitativ entspricht dies der Darstellung des Abschnittes 4.3.2. Für einen zusammengesetzten Reflektor (Kugelhappe und Kegelschirmmantel) ist die Konstruktion im Bild 4.2.-4 erfolgt. Im kugelförmigen Reflektorabschnitt schneiden sich die Normalen natürlich im geometrischen Mittelpunkt des Reflektors. Dadurch ergeben sich Überschneidungen in der Reihenfolge der projizierten Punkte $1''$ bis $8''$. Eine Überlagerung der schraffierten Flächen $\dot{Q}^*$ ist die Folge. Im weiteren sind diese Flächen zu addieren, so daß der umhüllende Kurvenzug letztlich das Ergebnis — die endgültige Verteilung — darstellt. Im speziellen Beispiel beträgt die Gesamtstrahlung $\dot{Q}_s = 200$ W. Die Strahlung in eine Hemisphäre somit 100 W. Die Strahlung nach oben wird durch den Reflektor im Bereich der Zonen 1 bis 8 aufgefangen und nach unten gelenkt. Damit entfällt die doppelt schraffierte Fläche. Sie entspricht der zusätzlichen Verteilung zwischen $1'''$ bis $8'''$.

Die Grundkonstruktion kann auch für Vorausuntersuchungen von Langfeldstrahlern Verwendung finden, wenn die Strahlungsverteilung in einer Ebene untersucht werden soll. Selbstverständlich entfällt dann die Umrechnung auf den Raumwinkel. Bilanziert werden lediglich die Energieströme in die ebenen Winkel.

4.2.3. Beispiel

Im Bild 4.2.-5 ist die Strahlungsverteilung A eines sehr langen linienförmigen Heizstabes mit Reflektor in einer Ebene, die rechtwinklig zum Strahler steht, gegeben. Die Lage des Heizstabes zum Reflektor, der aus blankem Aluminiumblech besteht, ist im Bild ebenfalls dargestellt. Es ist die Strahlungsverteilung zu ermitteln, die sich bei Weglassen des Reflektors ergeben würde.

• Lösung

Die im vorliegenden Fall auftretende Gesamtstrahlung wird durch Addition der winkelbezogenen Energiedichten für Schrittweiten von je 2 Grad gebildet. Es gelten die Werte für die raumwinkelbezogenen Energieströme bei Vorhandensein des Reflektors in Funktion des ebenen Winkels:

β Grad	$e_{\Omega,\beta}^*$ W/sr	β Grad	$e_{\Omega,\beta}^*$ W/sr	β Grad	$e_{\Omega,\beta}^*$ W/sr
1	705	21	685	41	605
3	705	23	682	43	585
5	705	25	680	45	560
7	705	27	675	47	535
9	700	29	670	49	500
11	700	31	662	51	465
13	700	33	655	53	420
15	697	35	645	55	355
17	695	37	635	57	275
19	690	39	620	59	150

Damit ergibt sich der spezifische Wärmestrom entsprechend der Summe

$$\dot{q}_s^* = \sum_{i=1}^{59} (e_{a,\beta}^* \Delta\beta)_i$$

mit $\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2 = \Delta\beta = \text{const. zu}$

$$\begin{aligned} \dot{q}_s^* &= \Delta\beta \sum_{i=1}^{59} (e_{a,\beta}^*)_i = 2 \cdot 18061 \text{ Grad} \cdot \text{W/sr} \\ &= 36122 \text{ Grad} \cdot \text{W/sr}. \end{aligned}$$

Da die Achse des Heizstabes in der Ebene liegt, die von den Reflektorberandungen aufgespannt wird, muß die Hälfte der Gesamtabstrahlung auch den Schirm treffen. Dies bedeutet, daß $\dot{Q}_{s,R} = 0,5 \dot{Q}_s$ gilt. Damit kann man nach Gl. (4.2.-2) den Gütegrad des Strahlers unter Beachtung eines Absorptionskoeffizienten (Anhang, Tabelle 1) von $a = 0,05$ zu

$$\eta = 1 - 0,5 \cdot 0,05 = 0,975$$

errechnen. Mit Gl. (4.2.-1) ergibt sich die querschnittsbezogene Gesamtstrahlung in den Halbraum

$$\dot{q}_s = \frac{\dot{q}_s^*}{\eta} = \frac{36122 \text{ Grad} \cdot \text{W}}{0,975} = 37048 \frac{\text{Grad} \cdot \text{W}}{\text{sr}}$$

Im Falle eines reflektorlosen Heizstabes berechnet sich die gleichmäßig verteilte Strahlung mit einem spezifischen Energiestrom zu

$$e_a = \frac{\dot{q}_s}{180^\circ} = \frac{37048 \text{ W}}{180} = 206 \text{ W/sr}.$$

Die entsprechende Strahlungsverteilung ist als Kurve B im Bild 4.2.-5 eingetragen.

4.3. Ermittlung der Gesamtstrahlungsenergie

Unter der Annahme, daß die Strahlungsverteilung rotationssymmetrisch zur Achse 0° bis 180° ist, sind die bei der Verteilungskurve vorhandenen ebenen Winkel in räumliche Winkel zu überführen. Entsprechend Bild 4.3.-1 muß der Raumwinkel aus dem Verhältnis

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \tag{4.3.-1}$$

bestimmt werden. Die Fläche der Kugelzone ergibt sich unter Beachtung, daß es sich um kleine Größen handelt, zu

$$dA = 2\pi r^* db = 2\pi r \sin \beta r d\beta = 2\pi r^2 \sin \beta d\beta. \tag{4.3.-2}$$

Somit erhält Gl. (4.3.-1) die Form

$$d\Omega = 2\pi \sin \beta d\beta, \tag{4.3.-3}$$

woraus der endliche Raumwinkel, der aus zwei rotierenden Radien mit den Neigungswinkeln β_1 und β_2 aufgespannt wird, lautet

$$\Omega_{1,2} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} 2\pi \sin \beta d\beta = 2\pi(\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \tag{4.3.-4}$$

Für die halbe Kugeloberfläche ergibt sich mit $\beta_1 = 0^\circ$ und $\beta_2 = 90^\circ$ erwartungsgemäß $\Omega_{HK} = 2\pi \text{ sr}$. Damit ist die Grundlage für eine rechnerische und zeichnerische Ermittlung der Gesamtstrahlung, ausgehend von der Strahlungsverteilung, die in einer Ebene meßtechnisch erfaßt wurde, gegeben.

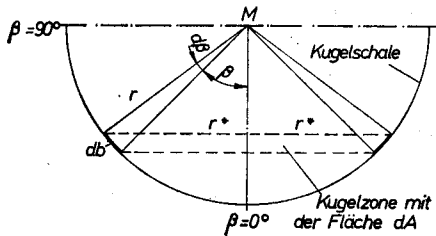


Bild 4.3.-1 Darstellung des geometrischen Zusammenhangs zwischen ebenem Winkel und Raumwinkel

4.3.1. Rechnerisches Verfahren

Es werden vorab die Raumwinkel für Zonen nach Gl. (4.3.-4) gebildet, deren ebene Winkel β_1 und β_2 mit einer Schrittweite von 10° wandern. Die Ergebnisse sind nachfolgend tabelliert:

Ebener Winkel		Raumwinkel
0°...10°	170°...180°	0,096
10°...20°	160°...170°	0,284
20°...30°	150°...160°	0,463
30°...40°	140°...150°	0,629
40°...50°	130°...140°	0,774
50°...60°	120°...130°	0,897
60°...70°	110°...120°	0,992
70°...80°	100°...110°	1,058
80°...90°	90°...100°	1,090

Die Summe gibt für die Vollkugel 4π sr.

Die spezifische Strahlungsenergie $e_{a,\beta}$ wird für die Winkelhalbierenden zwischen den Zongengrenzen abgelesen und mit dem entsprechenden Raumwinkel multipliziert. Die Summe der Produkte stellt die gesamte emittierte Strahlung des betrachteten Gerätes dar. Eine feinere Zonenverteilung liefert natürlich auch genauere Ergebnisse. Die angegebene Schrittweite dürfte jedoch für die Praxis akzeptable Werte liefern.

4.3.2. Zeichnerisches Verfahren

Die Lösung geht auf LIEBENTHAL und ROUSSEAU zurück. Sie ist im Bild 4.3.-2 dargestellt. Zur grafischen Umsetzung des Raumwinkels wird zunächst ein Umweg beschritten, indem

$$Y = r \cos \beta \tag{4.3.-5}$$

gebildet wird. Dies kann auf einfache Weise durch das parallel zur Symmetrieachse des Polarkoordinatendiagramms zu entwickelnde Diagramm mit kartesischen Koordinaten erfolgen. Als Achsen werden der

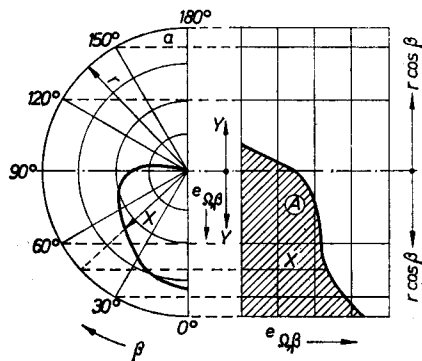


Bild 4.3.-2
Einfache Übertragungsmöglichkeit der Strahlungsverteilung von einem Polarkoordinatendiagramm in ein kartesisches Koordinatensystem

spezifische raumwinkelbezogene Energiestrom e_Q und der Wert f gewählt. Letzterer erfordert keine Berechnung, sondern kann gemäß der Konstruktionsgeraden α und deren paralleler Schar gewonnen werden. Anschließend sind die Werte $e_{Q,\beta}$ vom Polarkoordinatendiagramm am besten mit dem Zirkel in das rechtwinklige System zu übertragen (vgl. Bild 4.3.-2, Strecke X). Voraussetzung ist natürlich die Beibehaltung des Maßstabes für e_Q . Die im kartesischen Koordinatensystem dargestellte Fläche A ist proportional der vom Strahler ausgehenden Gesamtstrahlung und kann durch Planimetrieren ermittelt werden. Diese Fläche bedarf jedoch noch der Umrechnung, da die Ordinate mit dem Radius $2r$ multipliziert wurde, die Fläche noch nicht den Raumwinkel 4π sr enthält und der frei gewählte Maßstab der Abszisse f noch zu berücksichtigen ist. Es gilt

$$\dot{Q}_S = 4\pi \frac{A}{2rf} \quad (4.3.-6)$$

4.3.3. Gesamtstrahlung und getauschte Wärmemenge

Die gesamte emittierte Strahlungsenergie wird durch den Wert $\dot{Q}_{S,1}$ repräsentiert. Gleichzeitig strahlt die Umgebung entsprechend ihrer Oberflächentemperatur auf die Heizfläche. Die Differenz stellt die übertragene Wärmemenge dar. Bei der Berechnung kann man näherungsweise annehmen, daß die vom Strahler ausgesandte Energie vollkommen von der umhüllenden Umgebung absorbiert wird, da das Flächenverhältnis von Strahler zur Umgebung nahe dem Wert Null liegt. Die Gl. (1.1.-43) nimmt damit die Form

$$\dot{Q}_{S,1,2} = A_1 C_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (4.3.-7)$$

an, wobei der Index 1 den Strahler und der Index 2 die Umgebung kennzeichnen. Demgegenüber gilt für die Gesamtemission des Körpers 1 nach Gl. (1.1.-15)

$$\dot{Q}_{S,1} = A_1 C_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \quad (4.3.-8)$$

Der prozentuale, relative Unterschied zwischen beiden Werten ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\dot{Q}_{S,1} - \dot{Q}_{S,1,2}}{\dot{Q}_{S,1,2}} \cdot 100\% \\ &= \frac{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4} 100\% \\ &= \frac{T_2^4}{T_1^4 - T_2^4} 100\%. \end{aligned} \quad (4.3.-9)$$

Eine praktische Aussage erhält man beispielsweise mit den Werten

Temperatur der Strahleroberfläche

$$t_1 = 850^\circ\text{C}; T_1 = 1123^\circ\text{C}$$

Temperatur der Umgebung

$$t_2 = 20^\circ\text{C}; T_2 = 293^\circ\text{C}.$$

Nach Gl. (4.3.-9) ergibt sich $\varepsilon = 0,5\%$. Dies bedeutet, daß die Gesamtemission ohne weiteres gleich dem vom Höchsttemperaturstrahler übertragenen Wärmestrom gesetzt werden kann.

4.3.4. Beispiel

Im Bild 4.3.-3 ist die Strahlungsverteilung eines rotationssymmetrischen Strahlers in einem Polarkoordinatendiagramm quantitativ wiedergegeben. Nach dem rechnerischen und zeichnerischen Verfahren soll die Gesamtstrahlung ermittelt werden.

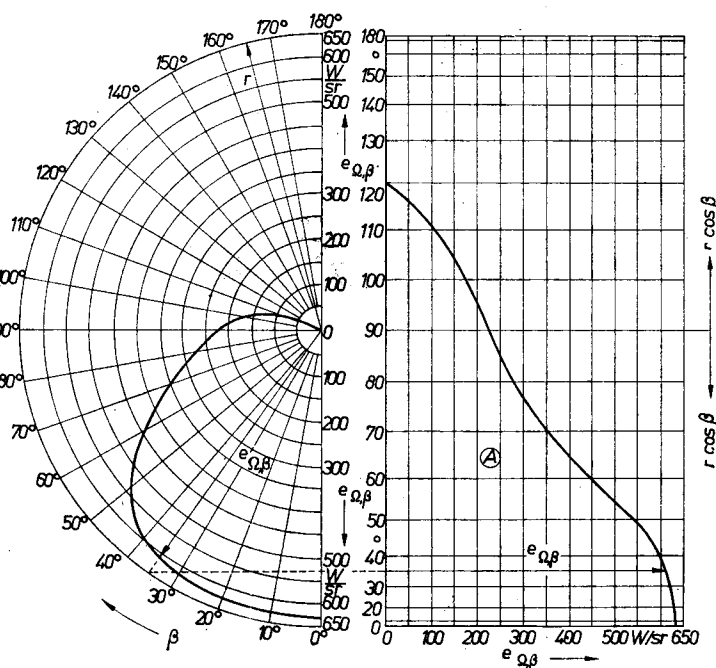


Bild 4.3.-3
Grafische Ermittlung der Strahlungsverteilung in kartesischen Koordinaten ausgehend von einer gemessenen und in Polarkoordinaten angegebenen Strahlungsverteilung

● Lösung

Rechnerisches Verfahren

Gemäß Abschnitt 4.3.1. wird für die Schrittweite des ebenen Winkels $\Delta\beta = 10^\circ$ gewählt. Damit haben die im genannten Abschnitt errechneten Raumwinkel Gültigkeit. Die spezifischen Energieströme in Zonenmitte betragen:

β Grad	$e_{\Omega,\beta}$ W/sr	β Grad	$e_{\Omega,\beta}$ W/sr
5	635	65	390
15	630	75	310
25	625	85	250
35	615	95	200
45	575	105	145
55	495	115	60

Die Multiplikation der aufgeführten Werte mit den zugehörigen Raumwinkeln und die anschließende Addition dieser Produkte ergibt schließlich

$\dot{Q}_s = 3223 \text{ W.}$

Zeichnerisches Verfahren

Die Umzeichnung des Diagramms von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten erfolgt nach Abschnitt 4.3.2. Die neu ermittelte Verteilungskurve ist ebenfalls im Bild 4.3.-3 angegeben. Das Planimetrieren oder das Ermitteln der Fläche nach der Trapezregel ergibt $A = 13370$ Flächeneinheiten (z. B. mm^2). Der Radius beträgt $r = 130$ Längeneinheiten (z. B. mm), und der Maßstabsfaktor ist mit

$f = \frac{20 \text{ Längeneinheiten (z. B. mm)}}{100 \text{ W/sr}}$

festgelegt. Damit kann Gl. (4.3.-6) ausgewertet werden. Die Gesamtstrahlung ergibt sich zu

$\dot{Q}_s = 4\pi \frac{13370 \cdot 100}{2 \cdot 130 \cdot 20} \text{ W} = 3231 \text{ W.}$

Die Abweichung von 0,2% gegenüber dem rechnerischen Verfahren ist auf Ungenauigkeiten zurückzuführen. Insgesamt wird jedoch die Gleichwertigkeit der beiden Ermittlungsmöglichkeiten deutlich.

4.4. Praktische Verteilungskurven und mögliche Näherungen für Infrarotstrahler mit flachen Reflektoren

4.4.1. Reale Strahlungskurven

In den Bildern 4.4.-1 und 4.4.-2 sind die Verteilungskurven eines Gasinfrarotstrahlers mit vier Brenneinsätzen dargestellt. Er entspricht konstruktiv dem im Bild 8.4.-2 gezeigten Aufbau. Die spezifischen Energieströme sind auf die Fläche bezogen. Die Fläche liegt normal zur einfallenden Strahlung im radialen Abstand von $r = 3 \text{ m}$. Dies ist bei weiteren Berechnungen zu beachten. Eine Umformung kann nach Gl. (4.2.-4) erfolgen.

4.4.2. Angenäherte Strahlungskurven

Wegen der im Verhältnis zum Reflektor großen Glühplatte weichen beim Gasstrahler die Strahlungsverteilungen nur relativ wenig von der Verteilung nach dem LAMBERTSchen Kosinusetz — Gl. (1.1.-5) — ab. Die Energieverteilung nach dieser Gesetzmäßigkeit ist im Bild 1.1.-2 gezeigt. Überträgt man die Darstellung in das meßtechnisch ermittelte reale Strahlungsdiagramm Bild 4.4.-1, so ergibt sich schließlich beim Radius R eine gute Annäherung. Dies bedeutet, daß man die Gasstrahler für Nachrechnungen, die keine absolute Genauigkeit fordern, ohne weiteres als graue Strahler betrachten darf. Der hauptsächlichste Vorteil besteht darin, daß die wärme-physiologischen Überprüfungen vereinfacht werden

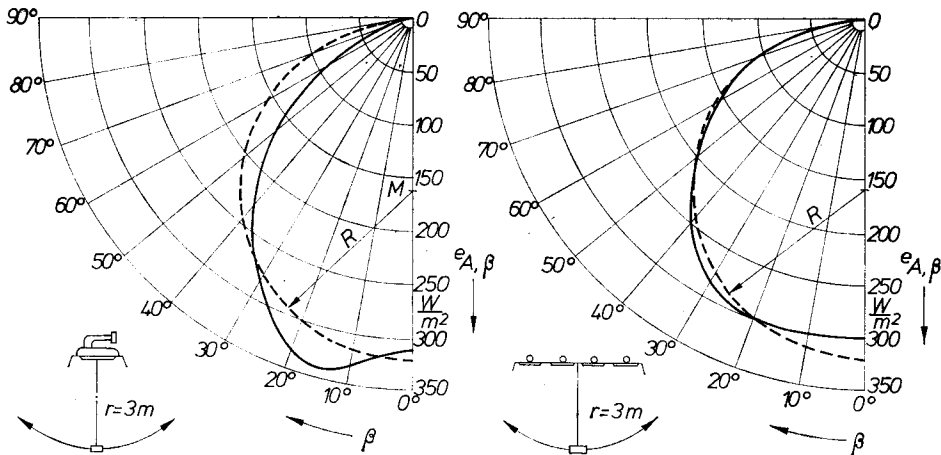


Bild 4.4.-1 Bestrahlungsstärkeverteilung des im Bild 8.4.-2 dargestellten Strahlers in Polarkoordinaten bei vertikaler Strahlung in den beiden Hauptschnittebenen (Abstand der Meßsonde vom Glühkörper $r = 3 \text{ m}$)

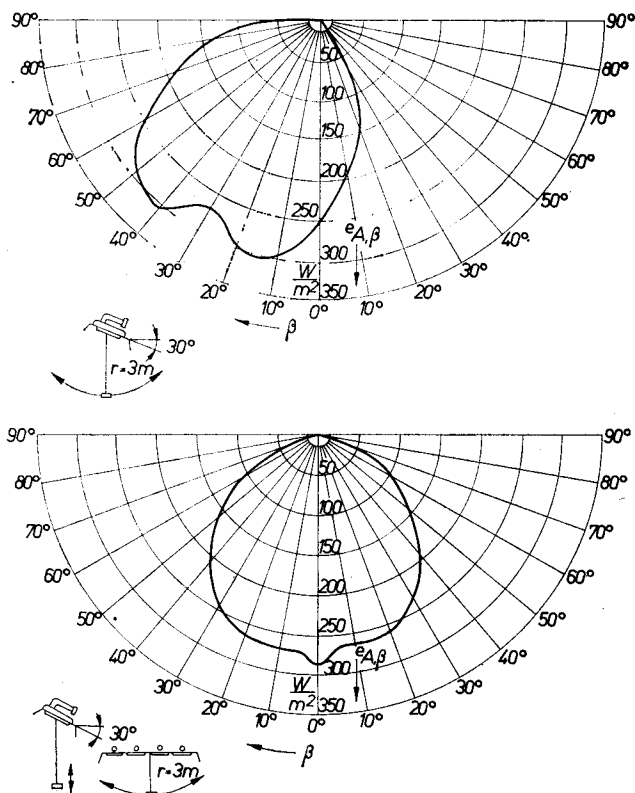


Bild 4.4.-2

Bestrahlungsstärkeverteilung des im Bild 8.4.-2 dargestellten Strahlers in Polarkoordinaten bei um 30° geneigtem Strahler in den beiden Hauptschnittebenen (Abstand der Meßsonde vom Glühkörper $r = 3$ m)

können, da die diskrete Auswertung des Strahlungsflusses für die einzelnen Raumwinkelemente entfällt. Es wäre allerdings zu ungenau, wollte man aus einer einzigen Messung $e_{\Omega,\beta}$ entsprechend der Strahlungsverteilung des grauen Strahlers auf die Gesamtleistung schließen. Die Abweichungen sind – wie Bild 4.4.-1 verdeutlicht – an einigen Stellen beträchtlich, so daß die Strahlungsverteilung auf jeden Fall meßtechnisch umfassend vorgenommen werden sollte. Die vorgeschlagene näherungsweise Beurteilung von Behaglichkeitsfragen ist nur für flächenförmige Strahler mit flachem Reflektor anwendbar. Sie darf nicht auf elektrische Infrarotstrahler mit Tiefstrahlereigenschaften übertragen werden.

4.4.3. Oberflächentemperatur der Glühkörper und fiktive Temperatur des Strahlers

Für die vom Strahler emittierte Gesamtstrahlung gilt

$$\dot{Q}_s = A_1 E_s \quad (4.4.-1)$$

und unter Beachtung der Gl. (1.1.-15)

$$\dot{Q}_s = A_1 C_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \quad (4.4.-2)$$

Der Zusammenhang zwischen der Strahlung in den Halbraum und der in Normalenrichtung ist durch Gl. (1.1.-12) gegeben

$$E_s = \pi E_{s,n} \quad (4.4.-3)$$

Die Erweiterung mit der strahlenden Fläche A_1 liefert den Wärmestrom

$$\dot{Q}_s = A_1 E_s = \pi (A_1 E_{s,n}) \quad (4.4.-4)$$

Der in Normalenrichtung gestrahlte Energiestrom $A_1 E_{s,n}$ entspricht dem raumwinkelbezogenen spezifischen Energiestrom für $\beta = 0^\circ$, das heißt, es gilt

$$A_1 E_{s,n} = e_{\Omega,\beta=0^\circ} \quad (4.4.-5)$$

Die schrittweise Substitution der Gl. (4.4.-5) in Gl. (4.4.-4) und Gl. (4.4.-2) sowie die Auflösung nach der Temperatur des Glühkörpers T_1 bzw. t_1 ergibt

$$t_1 = 100 \sqrt[4]{\frac{\pi e_{\Omega,\beta=0^\circ}}{A_1 C_1}} \text{ K} - 273^\circ \text{C} \quad (4.4.-6)$$

Damit kann die Oberflächentemperatur des Glühkörpers berechnet werden. Einen angenäherten Wert erhält man, wenn die Strahlungsverteilung nicht exakt nach dem LAMBERTSchen Kosinusetz erfolgt und deshalb ein Mittelwert Verwendung findet.

Oftmals läßt sich die Heizfläche nicht exakt ermitteln, es wird dann bei flachen Reflektoren empfohlen, die durch die Außenkanten aufgespannte Fläche A_1^* als Heizfläche zu betrachten. Setzt man diese dann in Gl. (4.4.-6) ein, so ergibt sich allerdings eine fiktive Oberflächentemperatur des Strahlers. Diese Verfahrensweise kann auch bei Elektro-Infrarotstrahlern mit mehreren Heizstäben und flachem darüberliegendem Reflektor angewendet werden. Sie gibt ferner bei der Berechnung der Strahlungstemperatur die geometrischen Verhältnisse genauer als der Bezug auf die glühende Oberfläche wieder (vgl. Abschnitt 7.2.3.2.). Der in Gl. (4.4.-6) einzusetzende Strahlungskoeffizient C_1^* sollte bei spiegelnden Reflektoren dem des Glühkörpers, bei dunklen Reflektoren dem des Reflektors entsprechen. Im letzteren Fall wird der Wert etwa gleich dem des Glühkörpers sein, das heißt, für die praktische Anwendung kann in guter Näherung generell mit dem Strahlungskoeffizienten des Glühkörpers gerechnet werden. Es gilt für die mittlere Temperatur des Strahlers

$$t_1^* = 100 \sqrt[4]{\frac{\pi e_{\Omega,\beta=0^\circ}}{A_1^* C_1^*}} \text{ K} - 273. \quad (4.4.-7)$$

4.4.4. Beispiel

Für die im Bild 4.4.-1 dargestellten realen Strahlungsverteilungen eines Gasstrahlers ist die Oberflächentemperatur der Strahlersteine näherungsweise zu berechnen. Die Gesamtheit der Glühkörper-Oberflächen sei mit $A_1 = 0,1 \text{ m}^2$ und der Strahlungskoeffizient mit $C_1 = 5,4 \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ anzunehmen.

• Lösung

Die Strahlungsenergie in Normalenrichtung kann aus dem Bild 4.4.-1 für die gestrichelt eingetragene, idealisierte Verteilung mit

$$e_{A,\beta=0^\circ} = 320 \text{ W/m}^2$$

abgelesen werden. Die Umrechnung gemäß Gl. (4.2.-4) liefert

$$e_{\Omega, \beta=0^\circ} = 320 \cdot 9 \text{ W/sr} = 2880 \text{ W/sr}.$$

Schließlich ergibt Gl. (4.4.-6)

$$t_1 = 100 \sqrt[4]{\frac{\pi \cdot 2880}{5,4 \cdot 0,1}} \text{ K} - 273^\circ\text{C} = 865^\circ\text{C}.$$

Dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit den Herstellerangaben von 850°C bis 900°C überein.

Die fiktive Strahlertemperatur ergibt sich für eine Oberfläche von $A = 0,4 \text{ m}^2$ zu

$$t_1^* = 100 \sqrt[4]{\frac{\pi \cdot 2880}{5,4 \cdot 0,4}} \text{ K} - 273^\circ\text{C} = 532^\circ\text{C}.$$

5. Einstrahlzahlen

5.1. Definition

In den Abschnitten 1.1.10 bis 1.1.12 wurde der Begriff der Einstrahlzahl eingeführt. Im Ergebnis der Ableitung folgte:

- Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine Fläche 2

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 \quad (5.1.-1)$$

- Einstrahlzahl einer Fläche 1 auf eine Fläche 2

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \frac{1}{A_1 \pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{r^2} dA_2 dA_1 \\ &\equiv \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \varphi_{1,2} dA_1 \end{aligned} \quad (5.1.-2)$$

- Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine Fläche 2

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_2}{r^2} dA_2. \quad (5.1.-3)$$

Die Bezeichnungen und Winkel erklären sich an Hand der Bilder 1.1.-14 und 1.1.-16.

Die Bedeutung der in den Gln. (5.1.-1) bis (5.1.-3) definierten Einstrahlzahlen wird mit Hilfe der symbolischen Darstellungen im Bild 5.1.-1 deutlich.

A:

Das Flächenelement 1 strahlt in den Halbraum. Ein Teil der Strahlung trifft die Fläche 2. Der Anteil zur Gesamtstrahlung wird mit $\varphi_{1,2}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die Einstrahlzahl des Flächenelementes 1 auf die Fläche 2.

B:

Das Flächenelement 1' strahlt auf die Fläche 2. Der Strahlungsanteil wird durch $\varphi_{1,2}$ — analog Variante A — charakterisiert. Wandert dieses Flächenelement an alle Stellen der Fläche 1, so kann aus der unendlichen Vielzahl der Werte $\varphi_{1,2}$ ein Mittelwert gebildet werden. Dieser wird mit $\Phi_{1,2}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die mittlere Einstrahlzahl der Fläche 1 auf die Fläche 2.

C:

Das kugelförmige Element 1 strahlt im Gegensatz zu den beiden vorgenannten Fällen nicht nur in den Halbraum, sondern in den gesamten Raum. Ein Teil der emittierten Strahlung trifft die Fläche 2. Der Anteil der Gesamtstrahlung wird mit $\varphi_{1,2}^{\circ}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die Einstrahlzahl des kugelförmigen Elementes 1 auf die Fläche 2. Mitunter wird das kugelförmige Element auch vereinfacht als „Punkt“ bezeichnet.

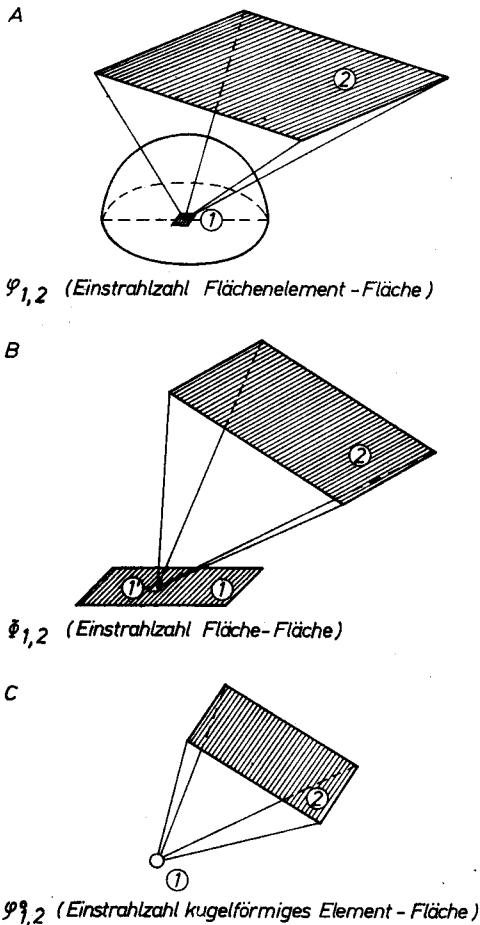


Bild 5.1.-1
Symbolische Darstellungen der in der Praxis vorkommenden Einstrahlzahlen

Generell gibt die Einstrahlzahl — oftmals auch Winkelverhältnis genannt — den Anteil der von der Oberfläche 1 ausgesandten Strahlung an, der die Oberfläche 2 trifft. Würde die Fläche 2 die strahlende Fläche 1 umhüllen, dann nähme die Einstrahlzahl den Grenzwert Eins an. In der Regel ist der Wert auf eine bestrahlte Fläche natürlich kleiner Eins. Die Summation der Einstrahlzahlen, der den Strahler umhüllenden Flächen n , liefert dann wieder den Wert Eins. Es gelten:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{1,i} = 1 \quad (5.1.-4)$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{1,i} = 1 \quad (5.1.-5)$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{1,i}^* = 1. \quad (5.1.-6)$$

Diese Gesetzmäßigkeit bietet den Vorteil, daß man bei der Berechnung von n Einstrahlzahlen stets eine Kontrollmöglichkeit hat. Verzichtet man darauf, so genügt die Bestimmung von $(n - 1)$ Einstrahlzahlen, um auf n Einstrahlzahlen zu schließen. Dies macht man sich vor allem zunutze, wenn die Bestimmung von einer bestimmten Einstrahlzahl besonders aufwendig ist.

Weiterhin kann für die mittlere Einstrahlzahl zwischen zwei Flächen mit Vorteil die Identitätsbeziehung

$$-A_1\Phi_{1,2} = A_2\Phi_{2,1}, \quad (5.1.-7)$$

die im Abschnitt 1.1.11. abgeleitet wurde, Anwendung finden.

5.2. Graphische Ermittlung von Einstrahlzahlen

5.2.1. Ableitung

Es besteht nach der Definition der Einstrahlzahl die Aufgabe, die vom Flächenelement 1 in den Halbraum ausgesendete Strahlung anteilig zu bestimmen, die die Fläche 2 trifft. Im Bild 5.2.-1 ist ein Modell zur grafischen Bestimmung vorgestellt. Das Flächenelement 1 wird in den Mittelpunkt M einer Halbkugel gelegt. Ausgehend von diesem Mittelpunkt M werden Verbindungsgeraden zu den Eckpunkten A, B, C und D der Fläche 2 aufgespannt. Diese Geraden durchstoßen die Halbkugeloberfläche an den Punkten A', B', C' und D' , wodurch ein Teil der Kugeloberfläche — im Bild schraffiert dargestellt — ausgeschnitten wird. Im folgenden ist die Projektion dieser Kugeloberfläche senkrecht auf den Grundkreis der aufgespannten Halbkugel zu bilden. Es entstehen die Eckpunkte A', B', C' und D' . Die dadurch beschriebene Fläche F zur Fläche des Grundkreises mit dem Radius r stellt die Einstrahlzahl $\varphi_{1,2}$ dar. Es gilt

$$\varphi_{1,2} = \frac{F}{\pi r^2}. \quad (5.2.-1)$$

Es ist gleichgültig, wie groß der Radius zu Beginn der Konstruktion gewählt wurde, da sich in entsprechendem Verhältnis auch die Projektionsfläche ändert. Die Konstruktion ist sehr anschaulich. Die Durchführung erfordert jedoch die Darstellung in Grund-, Auf- und Seitenriß, um die Durchdringungspunkte genau ermitteln zu können. Eine detaillierte Beschreibung des Konstruktionsablaufes sei im nachfolgenden Beispiel gegeben.

ECKERT hat in [15] ein optisch-experimentelles Verfahren vorgestellt, das vom Prinzip her dem grafischen Verfahren entspricht. Das strahlende Flächenelement wird durch eine sehr kleine Lichtquelle im Mittelpunkt einer aus Mattglas gefertigten Halbkugel nachgebildet.

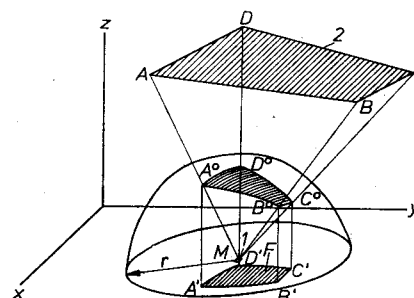


Bild 5.2.-1
Modell zur grafischen Ermittlung von Einstrahlzahlen

Im Inneren der Halbkugel wird der Proband entsprechend der in Wirklichkeit vorhandenen Geometrie untergebracht. Durch die Beleuchtung (Flächenelement) entsteht ein Schattenbild des Probanden auf der Glaskugel. Eine Fotografie aus großer Entfernung zeigt dann die Projektion des Schattens auf dem Grundriß. Diese Fläche F kann dann durch Planimetrieren ermittelt und die Einstrahlzahl nach Gl. (5.2.-1) berechnet werden. Insgesamt hat das beschriebene Verfahren nur wenig Bedeutung erlangt.

5.2.2. Beispiel

Der im Bild 5.2.-2 in schräger Parallelprojektion gegebene Raum diene als Grundlage für das Beispiel. Es ist die Einstrahlzahl des Flächenelementes auf die Deckenfläche EFGH zu bestimmen. Die Abmessungen des Raumes betragen $8\text{ m} \times 6\text{ m} \times 5\text{ m}$, wobei das Flächenelement an der Stelle M im Abstand 2 m und 1 m von der Ecke entfernt direkt auf der Bodenfläche liegt.

• Lösung

Zunächst wird der Grundriß $A'B'C'D'$ gezeichnet und um den Punkt M' ein Kreis mit dem beliebigen Radius r geschlagen. Von M' werden zu den Eckpunkten A' , B' , C' und D' Verbindungsgeraden gezogen. Als nächstes wird der Aufriß $A''B''E''F''$ entwickelt. Die Halbkugel mit dem nunmehr festgelegten Radius r ist um M'' darzustellen. Die Geraden von M'' zu den oberen Eckpunkten E'' und F'' markieren im Schnittpunkt mit dem Kreisbogen die äußeren Durchstoßungspunkte I'' und J'' . Die Projektion dieser Punkte auf den Grundriß ergeben im Schnittpunkt mit der Grundkreisachse die Punkte I' und J' . Ganz analog verläuft die Entwicklung des Seitenrisses $A'''D'''E'''H'''$. Um den Mittelpunkt M''' wird der Halbkreis mit Radius r aufgespannt. Die Verbindung zu den Eckpunkten liefert die Schnittpunkte K''' und L''' . Die Projektion in den Grundriß führt zu den Begrenzungspunkten K' und L' . Insgesamt ist zu vermerken, daß die Geraden $I'I'$, $J'J'$, $K'K'$, $L'L'$ sowie deren Verlängerungen Tangenten an Begrenzungslinien der gesuchten Grundrißprojektion darstellen. Außer den vier genannten Konstruktionspunkten sind zur Festlegung der Begrenzungslinien weitere Punkte erforderlich. Priorität haben dabei die Punkte P' , Q' , S' und T' , die auf den aufgespannten Geraden $M'D'$ usw. liegen. Die Lage der Punkte P und Q wird stellvertretend für alle im sogenannten Diagonalenriß entwickelt. Die Strecke $\overline{MA}$ wird in der wahren Länge im Grundriß als $\overline{M'A'}$ abgebildet. Die wahre Raumhöhe $\overline{AE}$ kann dem Aufriß als $\overline{A'E''}$ entnommen werden. Die Verbindungsgerade ME liefert im Schnittpunkt mit dem Halbkugelradius r den Durchdringungspunkt P , dessen senkrechte Projektion auf MA den Punkt P' fixiert. Die Strecke $\overline{MP'}$ ist nunmehr als wahre Länge identisch mit $\overline{M'P'}$ und

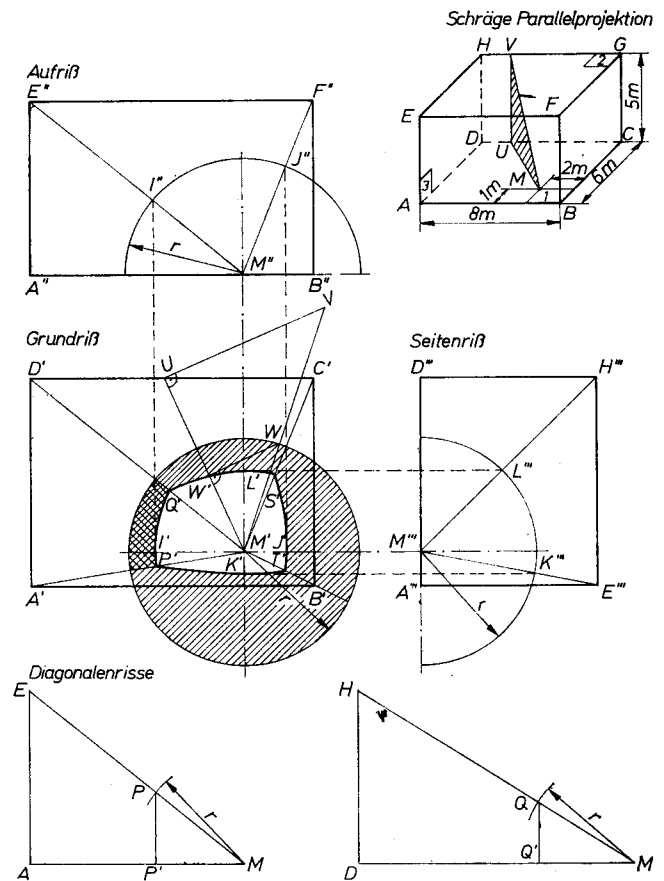


Bild 5.2.-2

Grafische Ermittlung der Einstrahlzahl zum Beispiel 5.2.2.

kann in den Grundriß mit dem Zirkel übertragen werden. Analog werden alle weiteren Eckpunkte der gesuchten Projektionsfläche konstruiert. Genügen die vorliegenden acht Punkte noch nicht für die Aufzeichnung des umrandenden Linienzuges, so sind noch beliebig viele Punkte konstruierbar. Ein Beispiel sei ausführlich beschrieben. Vom geometrischen Ort des Flächenelementes M' wird eine Verbindungsgerade zum willkürlich gewählten Punkt U im Grundriß gezeichnet. Dort wird das Lot errichtet und die wahre Raumhöhe $\overline{UV}$ als Strecke abgetragen. Die Punkte V und M' werden verbunden. Die entstandenen Dreieckseiten verkörpern wahre Strecken des in der schrägen Parallelprojektion eingezeichneten schraffierten Dreiecks. Analog dem vorher beschriebenen Diagonalenriß muß nunmehr im Grundriß auf der Strecke $\overline{VM'}$ der Halbkugelradius abgetragen werden. Dieser ist jedoch zufälligerweise durch den Halbkugelgrundkreis bereits eingezeichnet und markiert den Punkt W . Das Lot auf die Gerade UM' gibt schließlich die wahre Projektionslänge $\overline{M'W'}$ im Grundriß an. Damit ist der gesuchte Punkt W' als weiterer geometrischer Ort der Umschließungslinie gefunden. Prinzipiell kann diese Konstruktion zur einfacheren Ermittlung der Eckpunkte ebenfalls Anwendung finden. Die sogenannten Diagonalenrisse würden dann auch im Grundriß entwickelt.

Die im Grundriß entstandene Fläche $I'Q'W'L'S'J'T'K'P'$ entspricht der Fläche F des Bildes 5.2.-1. Sie kann durch Planimetrieren oder Auszählen eines darübergelegten transparenten Rasters ermittelt wer-

den. Im vorliegenden Beispiel ergaben sich für diese Fläche 972 Flächeneinheiten (z. B. mm²) und für den Grundkreis 3370 Flächeneinheiten, so daß nach Gl. (5.2.-1) gilt:

$$\varphi_{1,2} = \frac{972}{3370} = 0,288.$$

Die grafische Ermittlung bietet den Vorteil, daß gleichzeitig noch weitere Einstrahlzahlen entnehmbar sind. So stellt beispielsweise die kreuzweise schraffierte Fläche, die durch die Kurven $P'I'Q'$ und des äußeren Grundkreises sowie durch die Geraden $M'A'$ und $M'D'$ begrenzt wird, den Anteil der emittierten Strahlung des Flächenelementes dar, der die Seitenwand $ADEH$ trifft. Die kreuzweis schraffierte Fläche hat einen Inhalt von 175 Flächeneinheiten. Im Verhältnis zur Grundkreisfläche berechnet sich die Einstrahlzahl

$$\varphi_{1,3} = \frac{175}{3370} = 0,052.$$

In analoger Weise sind auch die übrigen Einstrahlzahlen auf die seitlichen Umfassungen zu berechnen.

Auf das abgehandelte Beispiel wird noch mehrfach Bezug genommen, z. B. auch bei der analytischen Ermittlung der Einstrahlzahlen.

5.3. Analytische Ermittlung von Einstrahlzahlen

5.3.1. Ableitung

Prinzipiell sind die Gln. (5.1.-1) bis (5.1.-3) mit analytischen Methoden zu lösen. Leider sind dabei keine allgemeingültigen Rezepturen möglich. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß die formal angegebenen Integrale in Wirklichkeit zu Mehrfachintegralen führen. Dies ist zwingend, da die Flächen A — gleichgültig, ob die Darstellung in kartesischen Koordinaten oder in Zylinderkoordinaten erfolgt — stets nur durch Doppelintegrale wiedergegeben werden können. Weiterhin sind die trigonometrischen Funktionen und der Abstand der jeweils im Strahlungsaustausch stehenden Elemente mit den Variablen des verwendeten Koordinatensystems zu formulieren. Dies ergibt — mitunter schon bei einfachen geometrischen Gebilden — sehr komplizierte Integranden.

Allgemein können die Gln. (5.1.-1) bis (5.1.-3) wie folgt geschrieben werden:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \beta_1(xyz) \cdot \cos \beta_2(xyz)}{r^2(xyz)} dx dy \quad (5.3.-1)$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos \beta_1(\varrho\varphi z) \cdot \cos \beta_2(\varrho\varphi z)}{r^2(\varrho\varphi z)} \varrho d\varrho d\varphi \quad (5.3.-2)$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{A_1 \pi} \int_{y'_1}^{y'_2} \int_{x'_1}^{x'_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \cos \beta_1(x, y, x', y', z) \times \frac{\cos \beta_2(x, y, x', y', z)}{r^2(x, y, x', y', z)} dx dy \right] dx' dy' \quad (5.3.-3)$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{A_1 \pi} \int_{\varphi'_1}^{\varphi'_2} \int_{\varrho'_1}^{\varrho'_2} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \cos \beta_1(\varrho, \varphi, \varrho', \varphi', z) \times \frac{\cos \beta_2(\varrho, \varphi, \varrho', \varphi', z)}{r^2(\varrho, \varphi, \varrho', \varphi', z)} \varrho d\varrho d\varphi \right] \varrho' d\varrho' d\varphi' \quad (5.3.-4)$$

$$\varphi_{1,2}^\circ = \frac{1}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \beta_2(x, y, z)}{r^2(x, y, z)} dx dy \quad (5.3.-5)$$

$$\varphi_{1,2}^\circ = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos \beta_2(\varrho, \varphi, z)}{r^2(\varrho, \varphi, z)} \varrho d\varrho d\varphi. \quad (5.3.-6)$$

Anmerkung:

- Die Beschreibung des Flächenelementes ist bei kartesischen Koordinaten durch $dA = dx dy$ einfach gegeben. Bei Verwendung von Polarkoordinaten muß nach der Skizze in Bild 5.3.-1 $dA = \varrho d\varphi d\varrho$ geschrieben werden.

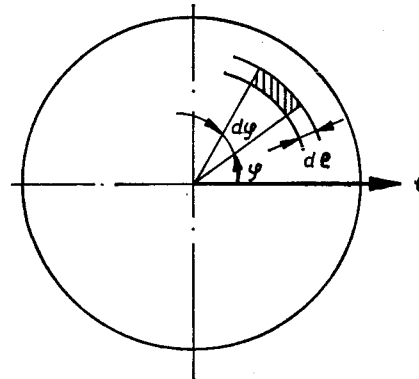


Bild 5.3.-1

Abmessung eines Flächenelementes bei einer Darstellung in Polarkoordinaten

- Erfolgt die Ermittlung der mittleren Einstrahlzahl Φ , also über zwei Flächen, ist es mitunter zweckmäßig, mit verschiedenen Koordinatensystemen zu arbeiten. Beispielsweise wählt man x und y sowie x' und y' bei gemeinsamer z -Achse. Die Formulierung der trigonometrischen Funktionen und des Abstandes stellt dann die Verknüpfung dar. Die in den Gln. (5.3.-3) und (5.3.-4) mit ' gekennzeichneten Variablen und Integrationsgrenzen beziehen sich auf A_1 .

Die Handhabung der Gleichungen wird aus den nachfolgenden Beispielen deutlich.

5.3.2. Beispiele

Beispiel 1

Es ist die Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes auf eine Kreisfläche zu errechnen. Die geometrischen Gegebenheiten sind im Bild 5.3.-2 angegeben.

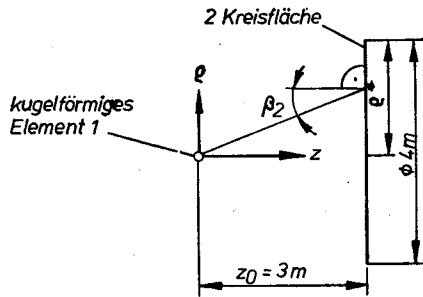


Bild 5.3.-2

Darstellung der geometrischen Verhältnisse bei Beispiel 5.3.2/1

• Lösung

Da es sich um eine Kreisfläche handelt, wird die Darstellung in Zylinderkoordinaten gewählt und von Gl. (5.3.-6)

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos \beta_2(\varrho, \varphi, z)}{r^2(\varrho, \varphi, z)} \varrho \, d\varrho \, d\varphi$$

ausgegangen. Die Größen des Integranden lauten:

$$r^2 = \varrho^2 + z_0^2$$

$$\cos \beta_2 = \frac{z_0}{r}$$

Damit wird

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho^*} \frac{z_0}{\sqrt{(\varrho^2 + z_0^2)^3}} \varrho \, d\varrho \, d\varphi$$

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{z_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + z_0^2}} \right]_0^{\varrho^*} d\varphi$$

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{z_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^{*2} + z_0^2}} \right) d\varphi$$

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{\varrho^{*2} + z_0^2}} \right)$$

Mit den vorgegebenen Zahlenwerten ergibt sich endgültig

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \right) = 0,084.$$

Beispiel 2

Es ist die Einstrahlzahl des Flächenelementes auf die Deckenfläche zu berechnen, deren geometrische Beziehungen zueinander bereits im Bild 5.2.-2 dargestellt wurden.

• Lösung

Ausgehend von der Gl. (5.3.-1)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \beta_1(x, y, z) \cdot \cos \beta_2(x, y, z)}{r^2(x, y, z)} dx \, dy,$$

sind die trigonometrischen Funktionen und der Abstand in kartesischen Koordinaten x, y, z zu formulieren. Mit Hilfe der Darstellungen im Bild 5.3.-3 ergeben sich

$$r^2 = x^2 + y^2 + z_0^2$$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \frac{z_0}{r}$$

$$dA = dx \, dy,$$

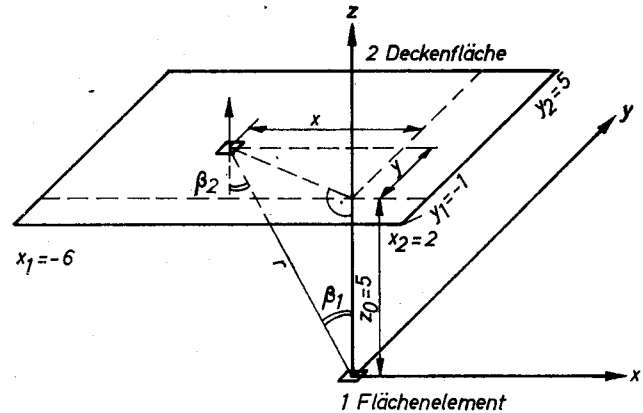


Bild 5.3.-3

Darstellung der geometrischen Verhältnisse bei Beispiel 5.3.2/2

woraus

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z_0^2}{r^4} dx \, dy \\ &= \frac{z_0^2}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^2} dx \, dy \end{aligned}$$

folgt. Die Lösung des Doppelintegrals wird schrittweise erarbeitet. Ein Exkurs in die Mathematik liefert die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^\mu} &= \frac{1}{(\mu-1)(4c-b^2)} \frac{2x+b}{(x^2 + bx + c)^{\mu-1}} \\ &+ \frac{2(2\mu-3)}{(\mu-1)(4c-b^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^{\mu-1}} \end{aligned}$$

und die Lösung für $\mu = 1$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan \frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}};$$

wenn $\sqrt{4c-b^2} > 0$.

Damit ist das innere Integral lösbar. Es gelten

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \frac{z_0^2}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{x}{(y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(y^2 + z_0^2)^{3/2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \right]_{x_1}^{x_2} dy \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Grenzen x_1 und x_2

$$\varphi_{1,2} = \frac{z_0^2}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{x_2}{(y^2 + z_0^2)(x_2^2 + y^2 + z_0^2)} - \frac{x_2}{(y^2 + z_0^2)(x_1^2 + y^2 + z_0^2)} + \frac{\arctan \frac{x_2}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} - \arctan \frac{x_1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{(y^2 + z_0^2)^{3/2}} \right] dy. \quad (*)$$

Der weitere Lösungsweg bereitet Schwierigkeiten, da seitens der Mathematik keine „Rezeptlösungen“ bereitgestellt werden. Substitutionen sind problematisch, deshalb werden zunächst Umformungen vorgenommen. Die Grundgleichung

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{x \cdot z_0^2}{(y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)} + \frac{z_0^2}{(y^2 + z_0^2)^{3/2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \right\} dy$$

wird durch Addition und gleichzeitiger Subtraktion von y^2 modifiziert

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{xz_0^2 + xy^2 - xy^2}{(y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)} + \frac{z_0^2 + y^2 - y^2}{(y^2 + z_0^2)\sqrt{y^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \right\} dy.$$

Die Trennung der Brüche liefert dann

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z_0^2} - \frac{xy^2}{(y^2 + z_0^2)(x^2 + y^2 + z_0^2)} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} - \frac{y^2}{(y^2 + z_0^2)\sqrt{y^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \right\} dy.$$

Zur Lösung des Doppelintegrals hätte man auch die umgekehrte Integrationsfolge wählen können. Statt der Ausdrücke

$$\sqrt{y^2 + z_0^2}, \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \text{ stünden dann } \sqrt{x^2 + z_0^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}.$$

Es ist anzunehmen, daß diese Ausdrücke charakteristisch für die Lösung sind, und es wird deshalb die weitere Umformung so durchgeführt, daß möglichst derartige Ausdrücke entstehen. Nach einiger Zwischen-

rechnung folgt

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2 + z_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} + \frac{\sqrt{y^2 + z_0^2} - y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{y^2 + z_0^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2 + z_0^2}} \cdot \frac{-xy \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{y^2 + z_0^2} \right\} dy. \quad (**)$$

In Fortführung der Annahme werden die Terme

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \quad \text{und} \quad \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}$$

nach y differenziert, da eine Lösung des äußeren Integrals nach dem Prinzip der partiellen Integration möglich erscheint. Zunächst ergeben sich

$$\frac{d}{dy} \left(\arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2 + z_0^2}} \cdot \frac{-xy \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{y^2 + z_0^2}$$

$$\frac{d}{dy} \left(\arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2 + z_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}.$$

Erfreulicherweise findet man diese Ausdrücke in der Gl. (**) wieder; schrittweise kann nun nach der partiellen Integration

$$\int uv' dy = uv - \int vu' dy$$

verfahren werden.

Mit

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}; \quad y' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2 + z_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}$$

$$u' = 0; \quad v = \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}$$

ergeben sich

$$\varphi_{1,2}^I = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z_0^2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2 + z_0^2}}.$$

Mit

$$u = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}; \quad v' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2 + z_0^2}} \cdot \frac{-xy \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{y^2 + z_0^2}$$

$$u' = \frac{\sqrt{y^2 + z_0^2} - y^2 \frac{1}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}}{y^2 + z_0^2}; \quad v = \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}$$

folgt

$$\varphi_{1,2}^{\text{II}} = \frac{1}{2\pi} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y^2 + z_0^2}}.$$

Die endgültige Gleichung lautet unter Bezugnahme auf Gl. (*) und die Grenzen y_1 und y_2 :

$\varphi_{1,2} =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + z_0^2}} \left(\arctan \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + z_0^2}} - \arctan \frac{y_1}{\sqrt{x_2^2 + z_0^2}} \right) \right. \\ & + \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x_2}{\sqrt{y_2^2 + z_0^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x_2}{\sqrt{y_1^2 + z_0^2}} \\ & - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_0^2}} \left(\arctan \frac{y_2}{\sqrt{x_1^2 + z_0^2}} - \arctan \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + z_0^2}} \right) \\ & \left. - \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x_1}{\sqrt{y_2^2 + z_0^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + z_0^2}} \arctan \frac{x_1}{\sqrt{y_1^2 + z_0^2}} \right]. \end{aligned}$$

Damit kann der Zahlenwert errechnet werden.

$\varphi_{1,2} =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \left(\arctan \frac{5}{\sqrt{2^2 + 5^2}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \right) \right. \\ & + \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} \arctan \frac{2}{\sqrt{5^2 + 5^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \arctan \frac{2}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \\ & - \frac{-6}{\sqrt{6^2 + 5^2}} \left(\arctan \frac{5}{\sqrt{6^2 + 5^2}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{6^2 + 5^2}} \right) \\ & \left. - \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} \arctan \frac{-6}{\sqrt{5^2 + 5^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \arctan \frac{-6}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\varphi_{1,2} = 0,289.$$

Interessant ist die außerordentlich gute Übereinstimmung mit der grafischen Ermittlung (Beispiel 5.2.2.).

5.3.3. Standardlösungen und deren Handhabung

Wie die vorangegangenen Beispiele deutlich zeigen, sind die Lösungen der Integrale sehr schwierig zu ermitteln. Es wurde deshalb eine Vielzahl von Lösungen erarbeitet und veröffentlicht. Umfassende Zusammenstellungen finden sich z. B. in [3], [16], [17]. Diese Berechnungsfälle gehen notwendigerweise von normierten geometrischen Gebilden aus, wobei meist versucht wird, durch dimensionslose Darstellungen eine größere Allgemeingültigkeit bei der Auswertung von Berechnungsergebnissen zu erreichen. Die bekannten Lösungen wurden teilweise weiterentwickelt und ergänzt. Sie sind nachfolgend wiedergegeben.

5.3.3.1. Einstrahlzahlen von Flächenelementen auf Flächen

Flächenelement 1 parallel zur Rechteckfläche 2

(dA_1 senkrecht unter Ecke A_2 ; Bild 5.3.-4)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (5.3.-7)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-1 ausgewertet.

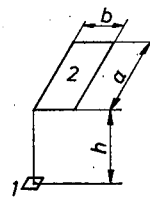


Bild 5.3.-4

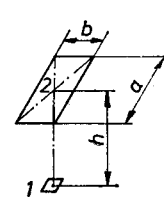


Bild 5.3.-5

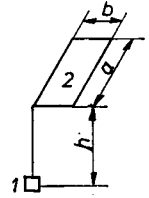


Bild 5.3.-6

Flächenelement 1 parallel zur Rechteckfläche 2

(dA_1 senkrecht unter Mitte A_2 ; Bild 5.3.-5)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2h}\right)^2 + 1}} + \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{2\sqrt{\left(\frac{b}{2h}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (5.3.-8)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-2 ausgewertet.

Flächenelement 1 senkrecht zur Rechteckfläche 2

(dA_1 senkrecht unter Ecke A_2 – Kante b ; Bild 5.3.-6)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{b}{h} \right) - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (5.3.-9)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-3 ausgewertet.

Flächenelement 1 senkrecht zur Rechteckfläche 2
(dA_1 senkrecht unter Mitte Kante b ; Bild 5.3.-7)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{b}{2h} \right) - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{2h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \right] \quad (5.3.-10)$$

Flächenelement 1 parallel zur Kreisfläche 2
(dA_1 senkrecht unter Kreismittelpunkt; Bild 5.3.-8)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2} \quad (5.3.-11)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-4 ausgewertet.

Flächenelement 1 parallel zur Kreisfläche 2
(dA_1 vom Kreismittelpunkt um a waagerecht versetzt; Bild 5.3.-9)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 - \left(\frac{r}{h}\right)^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^2 - 4 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{r}{h}\right)^2}} \right] \quad (5.3.-12)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-5 ausgewertet.

Flächenelement 1 senkrecht zur Kreisfläche 2
(dA_1 vom Kreismittelpunkt um a waagerecht versetzt; Bild 5.3.-10)

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2 \left(\frac{a}{h}\right)} \left[\frac{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^2 - 4 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{r}{h}\right)^2}} - 1 \right] \quad (5.3.-13)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-6 ausgewertet.

Flächenelement 1 auf der Mittelsenkrechten einer Kreisfläche 2 (Bild 5.3.-11)

$$\varphi_{1,2} = \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta \quad \text{mit} \quad (\alpha + \beta) \leq 90^\circ \quad (5.3.-14)$$

Flächenelement 1 senkrecht zu einer Halbkreisfläche 2
(dA_1 senkrecht unter dem Durchmesser; Bild 5.3.-12)

$$\varphi_{1,2} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\pi} \quad (5.3.-15)$$

Flächenelement 1 unter einem Zylinder 2
(dA_1 senkrecht unter Mittelpunkt der Stirnfläche; Bild 5.3.-13)

$$A = \frac{a}{r}; \quad B = \frac{h}{r}; \quad X = (1 + B)^2 + A^2;$$

$$Y = (1 - B)^2 + A^2$$

$$\varphi_{1,2} =$$

$$\frac{1}{\pi B} \arctan \frac{A}{\sqrt{B^2 - 1}} + \frac{A}{\pi} \left[\frac{X - 2B}{B \sqrt{XY}} \arctan \sqrt{\frac{X(B-1)}{Y(B+1)}} - \frac{1}{B} \arctan \sqrt{\frac{B-1}{B+1}} \right] \quad (5.3.-16)$$

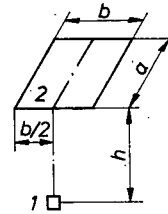


Bild 5.3.-7

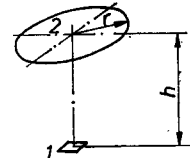


Bild 5.3.-8

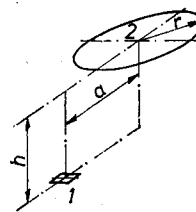


Bild 5.3.-9

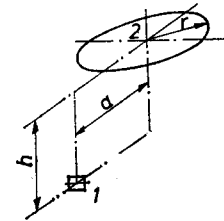


Bild 5.3.-10

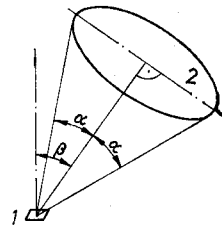


Bild 5.3.-11

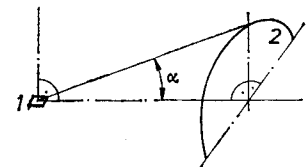


Bild 5.3.-12

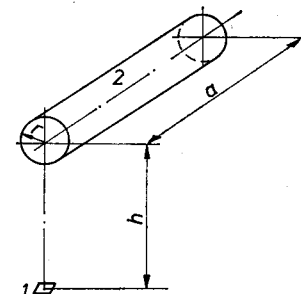


Bild 5.3.-13

5.3.3.2. Einstrahlzahlen von streifenförmigen Flächenelementen auf Flächen

Streifenförmiges Flächenelement 1 unter beliebiger Fläche 2 mit unendlicher Länge

(dA_1 und A_2 haben parallele Begrenzungen; Bild 5.3.-14)

$$\varphi_{1,2} = \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{2} \quad (5.3.-17)$$

Diese Gleichung kann auch aus Gl. (5.3.-18) für $b \rightarrow \infty$ gewonnen werden.

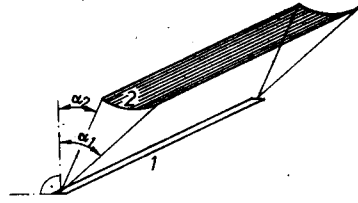


Bild 5.3.-14

Streifenförmiges Flächenelement 1 parallel unter Rechteckfläche 2 gleicher Länge

(dA_1 senkrecht unter Kante b ; Bild 5.3.-15)

$\varphi_{1,2} =$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{1}{\frac{b}{h}} \arctan \frac{a}{h} + \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}}{\frac{b}{h}} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}} \right] \quad (5.3.-18)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-50 ausgewertet.

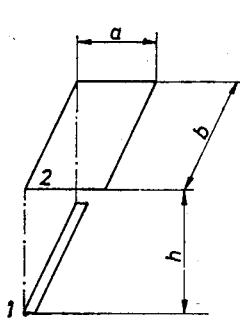


Bild 5.3.-15

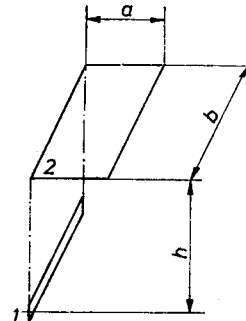


Bild 5.3.-16

Streifenförmiges Flächenelement 1 senkrecht unter Rechteckfläche 2 gleicher Länge

(dA_1 senkrecht unter Kante b ; Bild 5.3.-16)

$\varphi_{1,2} =$

$$\frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{b}{h} \right) - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{1}{\frac{b}{h}} \ln \frac{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right]}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \right] \quad (5.3.-19)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-51 ausgewertet.

5.3.3.3. Einstrahlzahlen von kugelförmigen Elementen auf Flächen

Kugelförmiges Element 1 senkrecht unter der Ecke einer Rechteckfläche 2 (Bild 5.3.-17)

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}^\circ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}}{\left(\frac{a}{h}\right) \left(\frac{b}{h}\right)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\left(\frac{a}{h}\right) \left(\frac{b}{h}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (5.3.-20)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-52 ausgewertet.

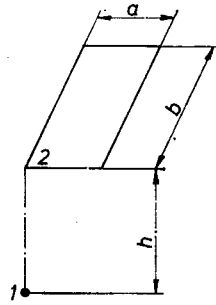


Bild 5.3.-17

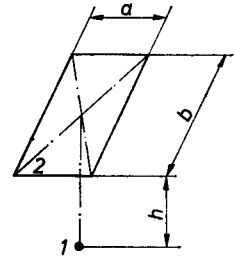


Bild 5.3.-18

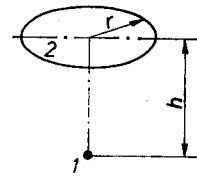


Bild 5.3.-19

Kugelförmiges Element 1 senkrecht unter Mitte einer Rechteckfläche 2 (Bild 5.3.-18)

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}^\circ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2 + 1}}{\left(\frac{a}{2h}\right) \left(\frac{b}{2h}\right)} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\left(\frac{a}{2h}\right) \left(\frac{b}{2h}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (5.3.-21)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-53 ausgewertet.

Kugelförmiges Element 1 senkrecht unter Mitte einer Kreisfläche 2 (Bild 5.3.-19)

$$\varphi_{1,2}^\circ = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1}} \right] \quad (5.3.-22)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-54 ausgewertet.

5.3.3.4. Einstrahlzahlen von Flächen auf Flächen

Parallele gleiche Rechteckflächen (Bild 5.3.-20)

$$\Phi_{1,2} = \frac{2}{\pi \left(\frac{a}{h}\right) \left(\frac{b}{h}\right)} \left[\frac{a}{h} \sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{a}{h} \arctan \left(\frac{a}{h}\right) + \frac{b}{h} \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} \right. \\ \left. - \frac{b}{h} \arctan \frac{b}{h} - \frac{1}{2} \ln \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1\right] \left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1\right]} \right]. \quad (5.3.-23)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-97 ausgewertet.

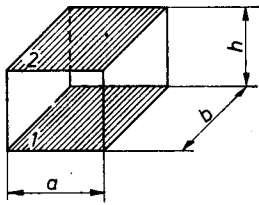


Bild 5.3.-20

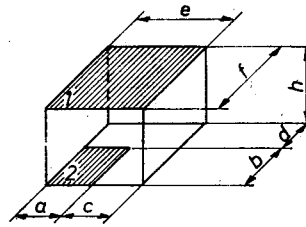


Bild 5.3.-21

Parallele nicht gleiche Rechteckflächen (Bild 5.3.-21)

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2\pi \left(\frac{e}{h}\right) \left(\frac{f}{h}\right)} \left\{ \frac{f}{h} \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{f}{h}}{\sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{f}{h} \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{f}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{f}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} \right. \\ \times \arctan \frac{\frac{f}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2}} - \frac{f}{h} \arctan \left(\frac{f}{h}\right) + \frac{e}{h} \sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{e}{h}}{\sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{e}{h} \sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1} \\ \times \arctan \frac{\frac{e}{h}}{\sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{e}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{e}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}} - \frac{e}{h} \arctan \frac{e}{h} + \frac{a}{h} \sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1} \\ \times \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{a}{h} \sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{a}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}} \\ - \frac{a}{h} \arctan \frac{a}{h} - \frac{d}{h} \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{d}{h}}{\sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{d}{h} \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{d}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{d}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} \\ \times \arctan \frac{\frac{d}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2}} + \frac{d}{h} \arctan \frac{d}{h} + \frac{b}{h} \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{b}{h} \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \\ \times \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{b}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2}} - \frac{b}{h} \arctan \frac{b}{h} - \frac{c}{h} \sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{c}{h}}{\sqrt{\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c}{h} \sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{c}{h}}{\sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1}} - \frac{c}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{c}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}} + \frac{c}{h} \arctan \frac{c}{h} \\
& + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1 \right]} \right. \\
& \times \left. \frac{\left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{d}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2 \right]} \right] \Bigg\} \quad (5.3.-24)
\end{aligned}$$

Senkrechte gleichlange Rechteckflächen (Bild 5.3.-22)

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,2} = \frac{1}{\pi} & \left\{ \arctan \frac{b}{h} + \frac{a}{h} \arctan \frac{b}{a} - \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} \arctan \frac{\frac{b}{h}}{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}} + \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2}{4 \frac{b}{h}} \ln \frac{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{a}{h}\right)^2}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 \right]} \right. \\
& \left. - \frac{b}{h} \ln \frac{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{b}{h}\right)^2}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{1}{4 \frac{b}{h}} \ln \frac{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right]}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1 \right]} \right\} \quad (5.3.-25)
\end{aligned}$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-98 ausgewertet.

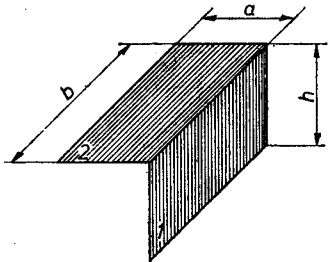


Bild 5.3.-22

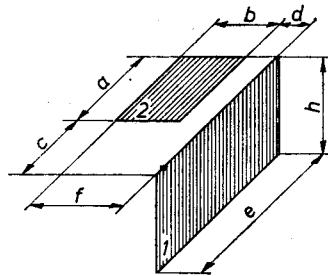


Bild 5.3.-23

Senkrechte nicht gleiche Rechteckflächen (Bild 5.3.-23)

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} & \left\{ \frac{f}{h} \arctan \frac{e}{f} + \frac{a}{e} \frac{f}{h} \arctan \frac{a}{f} - \frac{c}{e} \frac{f}{h} \arctan \frac{c}{f} - \frac{d}{h} \arctan \frac{e}{d} - \frac{a}{e} \frac{d}{h} \arctan \frac{a}{d} \right. \\
& + \frac{c}{e} \frac{d}{h} \arctan \frac{c}{d} - \sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{e}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{e}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2}} \\
& - \frac{a}{e} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2}} + \frac{a}{e} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2}} \\
& \left. + \frac{c}{e} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{c}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2}} - \frac{c}{e} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2} \arctan \frac{\frac{c}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4h} \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{e}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{e}{h}\right)^2\right]} - \frac{1}{4} \frac{a}{h} \frac{a}{e} \ln \frac{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]} \\
& + \frac{1}{4} \frac{f}{h} \frac{f}{e} \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{e}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left(\frac{f}{h}\right)^2}{\left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{e}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right]} \\
& - \frac{1}{4} \frac{d}{h} \frac{d}{e} \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{d}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left(\frac{d}{h}\right)^2}{\left[\left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right]} \\
& + \frac{1}{4} \frac{h}{e} \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{e}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{e}{h}\right)^2 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2\right]} \\
& + \frac{1}{4} \frac{c}{h} \frac{c}{e} \ln \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{d}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \left[\left(\frac{f}{h}\right)^2 + \left(\frac{c}{h}\right)^2\right]} \quad (5.3.-26)
\end{aligned}$$

Parallele gleiche Flächenstreifen unendlicher Länge
(Bild 5.3.-24)

$$\Phi_{1,2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1} - 1}{\frac{a}{h}} \quad (5.3.-27)$$

Die Gleichung ist im Bild 5.5.-99 ausgewertet.

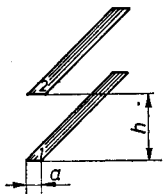


Bild 5.3.-24

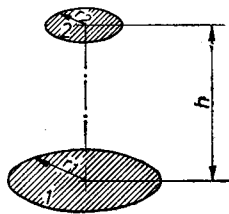


Bild 5.3.-25

Parallele Kreisflächen mit gemeinsamer Mittelsenkrechten
(Bild 5.3.-25)

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,2} = & \frac{1}{2 \left(\frac{r_1}{h}\right)^2} \left\{ 1 + \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h}\right)^2 \right. \\
& \left. - \sqrt{\left[1 + \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h}\right)^2\right]^2 - 4 \left(\frac{r_1}{h}\right)^2 \left(\frac{r_2}{h}\right)^2} \right\} \quad (5.3.-28)
\end{aligned}$$

Sonderfall: $r_1 = r_2 = r$

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2 \left(\frac{r}{h}\right)^2} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{r}{h}\right)^2 - \sqrt{\left[1 + 4 \left(\frac{r}{h}\right)^2\right]} \right\} \quad (5.3.-29)$$

Die Gleichungen sind im Bild 5.5.-100 ausgewertet.

Kleine Flächen beliebiger Lage mit großem Abstand zueinander (Bild 5.3.-26)

$$\Phi_{1,2} = \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi r^2} A_2 = \frac{n_1 n_2}{\pi r^4} A_2 \quad (5.3.-30)$$

Die Beziehung gilt auch für räumliche Gebilde, wenn β der Winkel zwischen der jeweiligen Flächennormalen n und der Verbindungsgeraden r ist.

Zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen im allgemeinen, räumlichen Fall gelten in Auswertung von vektoriellen Beziehungen (vgl. Gln. (5.4.-8) und (4.5.-9) für kartesische Koordinaten

$$\cos \beta_1 = \frac{(x_2 - x_1) n x_1 + (y_2 - y_1) n y_1 + (z_2 - z_1) n z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (5.3.-31)$$

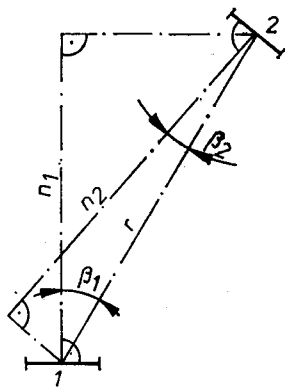
$$\cos \beta_2 = -\frac{(x_2 - x_1) n x_2 + (y_2 - y_1) n y_2 + (z_2 - z_1) n z_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (5.3.-32)$$

Die Wertepaare (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) charakterisieren die Lagen der Flächen 1 und 2. Die Koordinaten-tripel $(n x_1, n y_1, n z_1)$ und $(n x_2, n y_2, n z_2)$ stellen die Einsvektoren der Flächennormalen in Richtung des betrachteten Strahlungsaustausches dar.

Weiterhin ist es zweckmäßig, den Ursprung eines rechtsorientierten kartesischen Koordinatensystems in die Mitte der Fläche 1 zu legen, so daß $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $z_1 = 0$ und $n x_1 = 0$; $n y_1 = 0$; $n z_1 = 1$ gelten. Damit nehmen die Gln. (5.3.-31) und (5.3.-32) die Formen

$$\cos \beta_1 = \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \quad (5.3.-33)$$

$$\cos \beta_2 = -\frac{x_2 n x_2 + y_2 n y_2 + z_2 n z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (5.3.-34)$$



Sonderfall: r, n_1 und n_2 liegen in einer Ebene

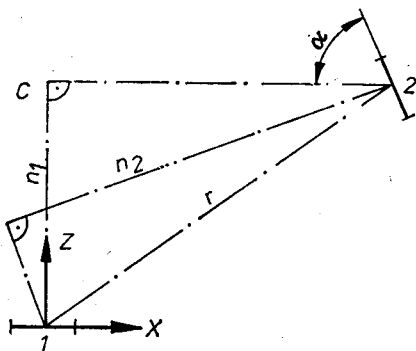
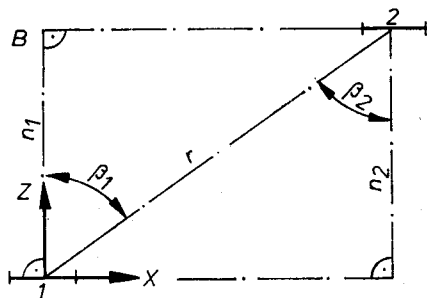
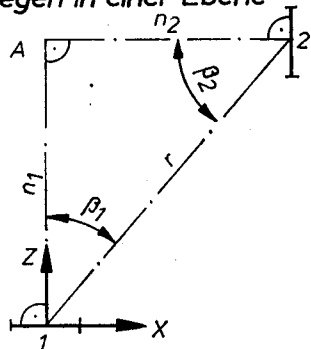


Bild 5.3.-26

an, so daß endgültig

$$\Phi_{1,2} = -\frac{A_2}{\pi} \frac{z_2(x_2 n x_2 + y_2 n y_2 + z_2 n z_2)}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \quad (5.3.-35)$$

geschrieben werden kann.

Die Lösungen der Sonderfälle führen zu weiteren Vereinfachungen.

Sonderfall A ($n x_2 = -1; n y_2 = 0; n z_2 = 0$)

$$\Phi_{1,2}^* = \frac{A_2}{\pi} \frac{z_2 x_2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}}, \quad (5.3.-36)$$

Sonderfall B ($n x_2 = 0; n y_2 = 0; n z_2 = -1$)

$$\Phi_{1,2}^{**} = \frac{A_2}{\pi} \frac{z_2^2}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}}, \quad (5.3.-37)$$

Sonderfall C ($n x_2 = -\sin \alpha, n y_2 = 0; n z_2 = -\cos \alpha$)

$$\Phi_{1,2} = \frac{A_2}{\pi} \frac{z_2(x_2 \sin \alpha + z_2 \cos \alpha)}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}}. \quad (5.3.-38)$$

Man kann diese Einstrahlzahl auch nach der Beziehung

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}^* \sin \alpha + \Phi_{1,2}^{**} \cos \alpha \quad (5.3.-39)$$

berechnen. Diese Beziehung gilt grundsätzlich für kleine Flächen bei verhältnismäßig großem Abstand. Die Darstellung hat den Vorteil, daß man die Einstrahlzahl für senkrechte und waagerechte Flächenanordnung zunächst getrennt — meist unter Verwendung von Diagrammen — ermitteln und anschließend die Zusammenfassung unter Beachtung des Neigungswinkels vornehmen kann.

Konzentrische Zylinder gleicher Länge (Bild 5.3.-27)

$$A = \frac{r_1}{r_2}; \quad B = \frac{h}{r_2}$$

Einstrahlzahl des Außenzylinders auf sich selbst

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{2}{\pi A} \arctan \left(\frac{2\sqrt{A^2 - 1}}{B} \right) \\ + \frac{B}{2\pi A} \left\{ \arcsin \frac{A^2 - 2}{A^2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{4A^2 + B^2}}{B} - 1 \right) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{4A^2 + B^2}}{B} \arcsin \left[\frac{4(A^2 - 1) + \frac{B^2}{A^2}(A^2 - 2)}{B^2 + 4(A^2 - 1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.3.-40)$$

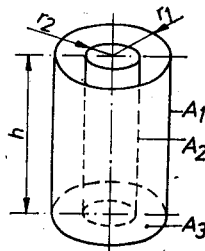


Bild 5.3.-27

Einstrahlzahl des Außenzylinders auf den Innenzylinder

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{\pi A} \left\{ \arccos \frac{B^2 - A^2 + 1}{B^2 + A^2 - 1} \right. \\ - \frac{1}{2B} \left[\sqrt{(A^2 + B^2 + 1)^2 - 4A^2} \arccos \frac{B^2 - A^2 + 1}{A(A^2 + B^2 - 1)} \right. \\ \left. \left. + (B^2 - A^2 + 1) \arcsin \frac{1}{A} - \frac{\pi}{2} (A^2 + B^2 - 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.3.-41)$$

Einstrahlzahl des Außenzylinders auf die Bodenfläche

$$\Phi_{1,3} = \frac{1}{2} (1 - \Phi_{1,1} - \Phi_{1,2}). \quad (5.3.-42)$$

Parallele Rohre mit gleichem Durchmesser und unendlicher Länge (Bild 5.3.-28)

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\left(\frac{h}{2r}\right)^2 - 1} - \frac{h}{2r} + \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2r}{h} \right) \quad (5.3.-43)$$

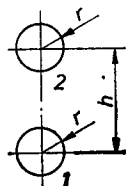


Bild 5.3.-28

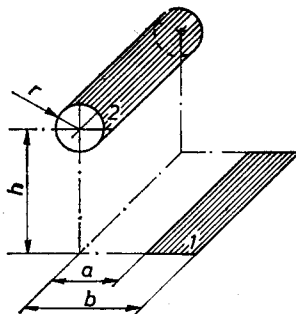


Bild 5.3.-29

Zylinder und parallele Rechteckfläche unendlicher Länge (Bild 5.3.-29)

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{\frac{b}{r} - \frac{a}{r}} \left(\arctan \frac{b}{h} - \arctan \frac{a}{h} \right). \quad (5.3.-44)$$

5.3.3.5. Handhabung der Standardlösungen

Alle bisherigen Lösungen zeigen, daß sie auf ganz spezielle Fälle zugeschnitten sind. In der Regel sind die praktischen Fälle bezüglich der vorhandenen Geometrie jedoch komplizierter. Über verschiedene Kunstgriffe ist es möglich, die Anwendungsgrenzen der vorhandenen Lösungen zu erweitern. Dabei handelt es sich um die Anwendung der Fundamentalgleichungen (5.1.-4) bis (5.1.-7). Nachfolgende Prinzipbeispiele geben Anregung für die mögliche Handhabung der vorhandenen Standardlösungen.

Beispiel 1 (Bild 5.3.-30)

Zur Berechnung der Einstrahlzahl $\varphi_{1,2}$ ist die Summation

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2'} + \varphi_{1,2''} \quad (5.3.-45)$$

zu bilden. Die Summanden sind nach Gl. (5.3.-7) bestimmbar.

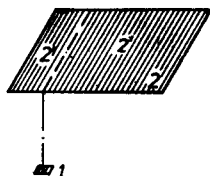


Bild 5.3.-30

Beispiel 2 (Bild 5.3.-31)

Analog zu Beispiel 1 gilt

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2'} + \varphi_{1,2''} + \varphi_{1,2'''} + \varphi_{1,2''''}, \quad (5.3.-46)$$

wobei die einzelnen Summanden wiederum mit Hilfe von Gl. (5.3.-7) berechnet werden können.

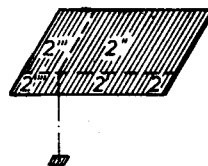


Bild 5.3.-31

Beispiel 3 (Bild 5.3.-32)

Es liegt wiederum Analogie zu den vorherigen Beispielen vor

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2'} + \varphi_{1,2''}, \quad (5.3.-47)$$

lediglich ist Gl. (5.3.-9) als Basisbeziehung zu verwenden.

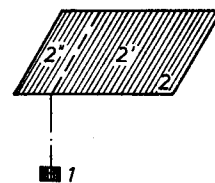


Bild 5.3.-32

Beispiel 4 (Bild 5.3.-33)

Um die Einstrahlzeit $\varphi_{1,2}$ zu berechnen, kann unter Bezug auf Gl. (5.3.-9)

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2'} - \varphi_{1,2''} \quad (5.3.-48)$$

gesetzt werden. Dabei stellt 2' die Gesamtfläche, bestehend aus 2' und 2, dar.

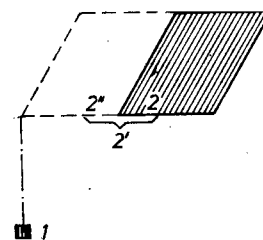


Bild 5.3.-33

Beispiel 5 (Bild 5.3.-34)

Zur Ermittlung der Einstrahlzahl $\varphi_{1,2}$ steht lediglich die Grundgleichung (5.3.-7) zur Verfügung. Man berechnet zunächst die Einstrahlzahl auf die gesamte Fläche $\varphi_{1,2'}$. Anschließend werden die Einstrahlzahlen der Flächen-

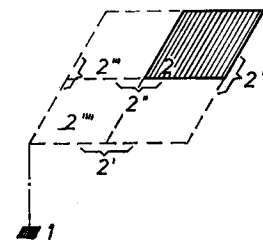


Bild 5.3.-34

streifen $\varphi_{1,2''}$ und $\varphi_{1,2'''}$ subtrahiert und $\varphi_{1,2''''}$ addiert, so daß nur noch der Bezug auf die Fläche 2 übrigbleibt. Zusammenfassend kann man schreiben

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2'} - \varphi_{1,2''} - \varphi_{1,2'''} + \varphi_{1,2''''}. \quad (5.3.-49)$$

In vollkommen ähnlicher Weise können auch die Einstrahlzahlen von kugelförmigen oder streifenförmigen Elementen auf Flächen berechnet werden.

Beispiel 6 (Bild 5.3.-35)

Die Berechnung der Einstrahlzahl $\Phi_{1,2}$ kann nach Gl. (5.3.-24) vorgenommen werden, wobei beispielsweise $d = 0$ zu setzen ist.

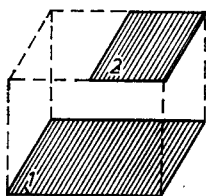


Bild 5.3.-35

Beispiel 7 (Bild 5.3.-36)

Die Einstrahlzahl $\Phi_{1,2}$ ergibt sich zu

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2'} - \Phi_{1,2''}, \quad (5.3.-50)$$

wobei unter $2'$ die gesamte Fläche — bestehend aus 2 und $2''$ — zu verstehen ist.

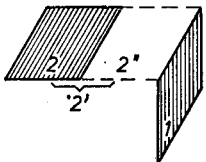


Bild 5.3.-36

Beispiel 8 (Bild 5.3.-37)

Um die Einstrahlzahl $\Phi_{1,2}$ zu ermitteln, sollte zunächst $\Phi_{1',2}$ nach Gl. (5.3.-26) für $d = 0$ berechnet werden. Davon ist $\Phi_{1'',2}$ nach Gl. (5.3.-25) unter Beachtung der Flächenverhältnisse zu subtrahieren. Es muß die Bilanz

$$\Phi_{1,2}A_1 = \Phi_{1',2}A_{1'} - \Phi_{1'',2}A_{1''} \quad (5.3.-51)$$

gelten, woraus

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1'',2} \frac{A_{1''}}{A_1} \quad (5.3.-52)$$

folgt. Die Produkte aus Einstrahlzahl und zugehöriger Fläche sind dann zu bilden, wenn die Bezugsfläche nicht gleich bleibt (hier A_1 , $A_{1'}$ und $A_{1''}$).

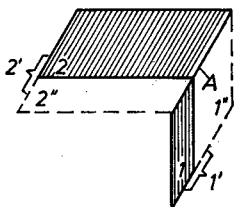


Bild 5.3.-37

Das vorliegende Problem wäre zum Beispiel auch nach

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2'} - \Phi_{1,2''} \quad (5.3.-53)$$

lösbar. Während $\Phi_{1,2'}$ nach Gl. (5.3.-25) sofort berechnet werden kann, ist $\Phi_{1,2''}$ nach Gl. (5.3.-26) für $d = 0$ über den Umweg $\Phi_{1,2''} = \Phi_{2',1} \frac{A_{2'}}{A_1}$ zu bestimmen. Damit wird

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{2',1} \frac{A_{2'}}{A_1} - \Phi_{1,2''}. \quad (5.3.-54)$$

Für den Sonderfall, daß die Kante A symmetrisch geteilt ist, gelten $A_1 = A_{1'}$ und $A_2 = A_{2'}$. Damit vereinfacht sich die Berechnungsgleichung 5.3.-52 zu

$$\Phi_{1,2} = 2\Phi_{1',2} - \Phi_{1'',2}. \quad (5.3.-55)$$

Aus Symmetriegründen muß weiterhin

$$2\Phi_{1',2} = \Phi_{1',2'} \quad (5.3.-56)$$

gelten, so daß Gl. (5.3.-55) die Form

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2'} - \Phi_{1'',2} \quad (5.3.-57)$$

annimmt. Zum gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch, wenn von Gl. (5.3.-54) ausgegangen wird. Da $\Phi_{1,2'} = \Phi_{1'',2'}$ im vorliegenden Sonderfall gilt, muß auch

$$\Phi_{1,2'} = \Phi_{1'',2'} = \Phi_{1',2'} \quad (5.3.-58)$$

sein. Damit lautet

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2'} - \Phi_{1,2''}. \quad (5.3.-59)$$

Aus Symmetriegründen gilt $\Phi_{1,2''} = \Phi_{1'',2}$.

Beispiel 9 (Bild 5.3.-38)

Grundlage der Berechnung ist die Gl. (5.3.-26) mit $c = 0$. Es kann die Bilanz

$$\Phi_{1,2}A_1 = \Phi_{1',2}A_{1'} - \Phi_{1'',2}A_{1''} \quad (5.3.-60)$$

formuliert werden, woraus

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1'',2} \frac{A_{1''}}{A_1} \quad (5.3.-61)$$

folgt.

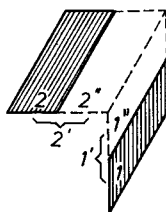


Bild 5.3.-38

Die manuelle Berechnung ist einfacher, wenn die Gl. (5.3.-25) als Basis verwendet wird, da für deren Auswertung ein Diagramm existiert. Die Bilanzgleichung hat dann folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}A_1 &= \Phi_{1',2}A_{1'} - \Phi_{1',2''}A_{1''} \\ &\quad - \Phi_{1'',2'}A_{1''} + \Phi_{1'',2''}A_{1''}. \end{aligned} \quad (5.3.-62)$$

Die Einstrahlzeit stellt sich abschließend als

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2'} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1',2''} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1'',2'} \frac{A_{1''}}{A_1} + \Phi_{1'',2''} \frac{A_{1''}}{A_1} \quad (5.3.-63)$$

dar.

Beispiel 10 (Bild 5.3.-39)

Die Einstrahlzahl kann direkt durch Anwenden der Gl. (5.3.-26) für $d = 0$ berechnet werden.

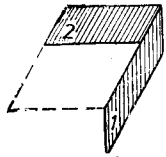


Bild 5.3.-39

Beispiel 11 (Bild 5.3.-40)

Dieser komplizierte Fall ist durch wiederholtes Anwenden der Gl. (5.3.-26) lösbar. Es gilt die Bilanz

$$\Phi_{1,2} A_1 = \Phi_{1',2'} A_{1'} - \Phi_{1',2''} A_{1'} - \Phi_{1'',2'} A_{1''} + \Phi_{1'',2''} A_{1''}, \quad (5.3.-64)$$

woraus

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{1',2'} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1',2''} \frac{A_{1'}}{A_1} - \Phi_{1'',2'} \frac{A_{1''}}{A_1} + \Phi_{1'',2''} \frac{A_{1''}}{A_1} \quad (5.3.-65)$$

folgt. Die Identität mit Gl. (5.3.-63) ist rein formal.

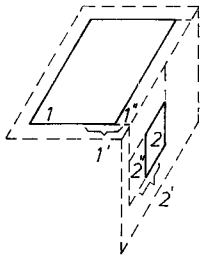


Bild 5.3.-40

Die Beispielserie könnte beliebig fortgesetzt werden. Es zeigt sich deutlich, daß man relativ komplizierte Probleme lösen kann, die rechentechnische Bearbeitung jedoch einen enorm großen Aufwand erfordert.

5.3.4. Beispiel

Die praktische Anwendung der analytischen Standardlösung soll nachfolgend gezeigt werden. Um eine Vergleichbarkeit der Werte zu haben, wird auf das Bild 5.2.-2 bezogen. Die Einstrahlzahl kann durch vierfache Anwendung der Gl. (5.3.-7) ermittelt werden. Es gelten die Zahlenwerte

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{5}{5}}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1}} \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\frac{5}{5}}{\sqrt{\left(\frac{5}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\left(\frac{5}{5}\right)^2 + 1}} \Bigg] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1}} \right. \\ &+ \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1}} \Bigg] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{5}{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 1}} \right. \\ &+ \frac{\frac{5}{5}}{\sqrt{\left(\frac{5}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{\left(\frac{5}{5}\right)^2 + 1}} \Bigg] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + 1}} \right. \\ &+ \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1}} \Bigg] \end{aligned}$$

$$\varphi_{1,2} = 0,289.$$

Es besteht Übereinstimmung mit dem Ergebnis nach dem grafischen Verfahren (5.2.2. Beispiel) und dem analytischen Verfahren (5.3.2. Beispiel 2).

Die Berechnung der Einstrahlzahl auf die Seitenwand 3 kann durch zweimaliges Anwenden der Gl. (5.3.-9) erfolgen. Zahlenmäßig gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,3} = & \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \left(\frac{5}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1}} \right. \\ & \left. + \arctan \left(\frac{1}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1}} \arctan \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1}} \right] \end{aligned}$$

$$\varphi_{1,3} = 0,0517.$$

Dieser Wert stimmt ebenfalls sehr gut mit dem Ergebnis des grafischen Verfahrens überein.

5.4. Numerische Ermittlung von Einstrahlzahlen

Wie die bisher beschriebenen Methoden zur Ermittlung der Einstrahlzahl zeigten, bereitet die aufwendige und komplizierte Berechnung erfahrungsgemäß sehr große Schwierigkeiten. Insbesondere ist zu bemerken, daß bisher relativ wenige und nur für geometrisch einfache Gebilde Berechnungsgleichungen oder Diagramme vorliegen. So findet man in der Regel keine Lösungen für beliebig orientierte Rechteck- und Kreisflächen, für schiefwinklig umrandete Trapez- oder Vieleckflächen usw. Des weiteren existieren keine Lösungen, die die Schattenwirkung von Bauteilen berücksichtigen, die zwischen den im Strahlungsaustausch befindlichen Oberflächen liegen. Dieses Problem tritt bereits beim Strahlungsaustausch zwischen einem Rohrregister und einer Wand auf. Zur Lösung derartiger Berechnungsfälle wurde bei gleichzeitiger Befreiung von manueller Arbeit ein Rechenprogramm entwickelt.

5.4.1. Mathematisches Modell des Strahlungsaustausches

Ausgehend von Berechnungsgleichungen für die Einstrahlzahl von

- einem Flächenteilchen dA_a auf eine endliche Fläche A_b

$$\varphi_{a,b} = \frac{1}{\pi} \int_{A_b} \frac{\cos \beta_a \cdot \cos \beta_b}{r^2} dA_b \quad (5.4.-1)$$

- von einer endlichen Fläche A_a auf eine endliche Fläche A_b

$$\begin{aligned} \Phi_{a,b} &= \frac{1}{A_a} \int_{A_a} \varphi_{a,b} dA_a \\ &= \frac{1}{\pi \cdot A_a} \int_{A_a} \int_{A_b} \frac{\cos \beta_a \cdot \cos \beta_b}{r^2} dA_b \cdot dA_a, \end{aligned} \quad (5.4.-2)$$

werden für die Lösung mit der digitalen Rechentechnik die obigen Gleichungen in eine Summendarstellung mit diskreter Schrittweite überführt. Damit ergeben sich

$$\varphi_{a,b} = \frac{1}{\pi} \sum_{A_b} \frac{\cos \beta_a \cdot \cos \beta_b}{r^2} \Delta A_b \quad (5.4.-3)$$

$$\Phi_{a,b} = \frac{1}{\pi \cdot A_a} \sum_{A_a} \left(\sum_{A_b} \frac{\cos \beta_a \cdot \cos \beta_b}{r^2} \Delta A_b \right) \Delta A_a. \quad (5.4.-4)$$

Die geometrische Deutung bei Anwendung der Vektorrechnung ist in Bild 5.4.-1 gegeben.

An die Form der Fläche wird lediglich die Forderung gestellt, daß sie im mathematischen Sinn ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet darstellt, welches keine derartigen Erhebungen oder Einsenkungen aufweist, daß der Strahlungsaustausch anderer Flächenelemente der gleichen Fläche dadurch unterbunden wird (Schattenwirkung). Abweichend von der bis-

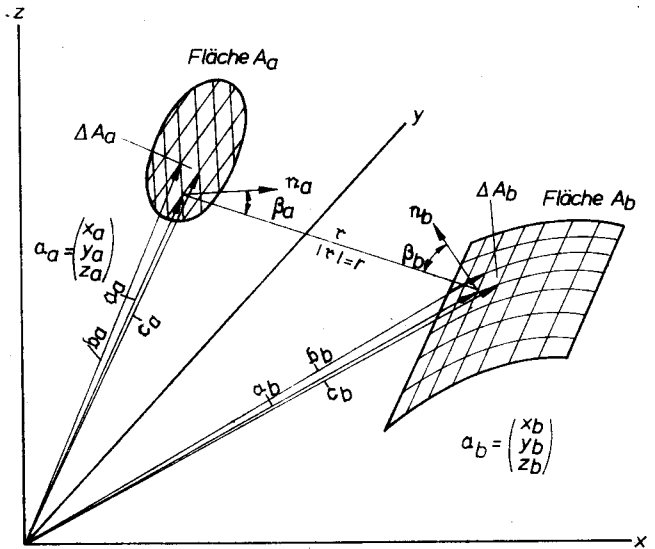


Bild 5.4.-1
Allgemeingültige vektorielle Darstellung zur Beschreibung der Flächenelemente und des Strahlungsaustausches zwischen zwei Elementen

herigen Kennzeichnung der Flächen mit 1 und 2, werden die Indizes a und b eingeführt. Dies war notwendig, um eine saubere Trennung zu den schatten-erzeugenden Bauteilen, die mit 1, ..., 5 charakterisiert werden, zu erhalten. Weiterhin vereinfacht sich dadurch die Programmgestaltung.

Im Rechenprogramm ist die Eingabe von Flächen 2. Ordnung in der Form

$$\begin{aligned} A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot y^2 + A_3 \cdot z^2 + A_4 \cdot x \cdot y + A_5 \cdot x \cdot z \\ + A_6 \cdot y \cdot z + A_7 \cdot x + A_8 \cdot y + A_9 \cdot z + A_{10} = 0 \end{aligned} \quad (5.4.-5)$$

möglich.

Für die Vektoren, die das Flächenelement ΔA aufspannen, gilt

$$(c - a) \quad \text{und} \quad (b - a).$$

Daraus folgt das Vektorprodukt

$$n = (c - a) \times (b - a), \quad (5.4.-6)$$

wobei $(c - a)$; $(b - a)$ und der Normalenvektor n ein Rechtssystem bilden. Von Hand ist anzugeben, welche Seite der Fläche im Strahlungsaustausch steht; das bedeutet, die Eingabe $(N = -1)$ kehrt die Richtung des Normalenvektors um. Der Betrag des Normalenvektors ist gleich dem Flächeninhalt des Flächenelementes

$$\Delta A = |n|. \quad (5.4.-7)$$

Der Einstrahlwinkel β wird zwischen dem Verbindungsvektor der im Strahlungsaustausch stehenden Flächen und der jeweiligen Flächennormalen gebildet. Ist der Einstrahlwinkel $\geq 90^\circ$, so liegt kein Strahlungsaustausch zwischen den Flächenelementen vor, das heißt, $\cos \beta \leq 0$ wird gleich Null gesetzt. Der auftretende Winkel wird dann exakt wiedergegeben, wenn die beiden Vektoren Verbindungsvektor r und Normalenvektor n von der Strahlungsfläche wegweisen. Der Normalenvektor wird so festgelegt, daß

diese Forderung erfüllt ist. Der Verbindungsvektor kann natürlich nur in einer Richtung orientiert sein, so daß das Vorzeichen in einem Fall umzukehren ist. So gilt für die Verhältnisse nach Bild 5.4.-1 durch Anwenden des Skalarprodukts

$$\cos \beta_a = \frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{n}_a| \cdot |\mathbf{r}|} \quad (5.4.-8)$$

$$\cos \beta_b = - \frac{\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{n}_b| \cdot |\mathbf{r}|} \quad (5.4.-9)$$

mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_b - \mathbf{a}_a. \quad (5.4.-10)$$

Damit sind alle Größen für die Auswertung der Gln. (5.4.-3) und (5.4.-4) formal bereitgestellt. Vereinfachte Darstellungen von speziellen Flächen werden später noch betrachtet.

5.4.2. Mathematische Formulierung der Flächenbegrenzungen

Für im Strahlungsaustausch stehende Flächen werden folgende Begrenzungsmöglichkeiten vorgesehen (E_1 bis E_{16} sind beliebige Konstanten):

Variante I

Flächen, die auf die x,y -Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$x_{\min} = E_1; \quad x_{\max} = E_2 \quad (5.4.-11)$$

$$y_{\min} = E_3 + E_4x; \quad y_{\max} = E_5 + E_6x \quad (5.4.-12)$$

$$z_{\min} = E_7 + E_8x + E_9y; \quad z_{\max} = E_{10} + E_{11}x + E_{12}y \quad (5.4.-13)$$

Variante II

Flächen, die auf die y,z -Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$y_{\min} = E_1; \quad y_{\max} = E_2 \quad (5.4.-14)$$

$$z_{\min} = E_3 + E_4y; \quad z_{\max} = E_5 + E_6y \quad (5.4.-15)$$

$$x_{\min} = E_7 + E_8y + E_9z; \quad x_{\max} = E_{10} + E_{11}y + E_{12}z \quad (5.4.-16)$$

Variante III

Flächen, die auf die z,x -Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$z_{\min} = E_1; \quad z_{\max} = E_2 \quad (5.4.-17)$$

$$x_{\min} = E_3 + E_4z; \quad x_{\max} = E_5 + E_6z \quad (5.4.-18)$$

$$y_{\min} = E_7 + E_8z + E_9x; \quad y_{\max} = E_{10} + E_{11}z + E_{12}x \quad (5.4.-19)$$

Variante IV

Flächen beliebiger Orientierung

$$(x - E_{13})^2 + (y - E_{14})^2 + (z - E_{15})^2 \leq E_{16}^2 \quad (5.4.-20)$$

Im allgemeinen Fall steht eine der Varianten I bis III und zusätzlich Variante IV zur Verfügung.

Diese Möglichkeiten dürften ausreichend sein, um den gegebenen praktischen Fällen stets Rechnung zu tragen. Zur Demonstration sind drei Beispiele näher erläutert:

Beispiel 1

Eine im Raum liegende Trapezfläche A (Bild 5.4.-2) soll mit minimalstem Aufwand begrenzt werden. Man sieht sofort, daß dies bei der Projektion auf die y,z -Ebene (Variante II) am einfachsten durchführbar ist. Die Gln. (5.4.-14) und (5.4.-15) sind dazu ausreichend, um durch die Ebenen ①, ②, ③, ④, die alle senkrecht auf der y,z -Ebene stehen, die Fläche A zu begrenzen. Im Rechenprogramm wird dann in Δy - und Δz -Schritten die Projektionsfläche abgearbeitet. Da diese exakt durch die Punkte I'', II'', III'', IV'' wiedergegeben wird, entfallen zusätzliche Tests bezüglich der minimalen und maximalen Höhe über der betrachteten Projektionsebene Gl. (5.4.-16). Da dieser Test aber fest im Rechenprogramm eingebaut ist, werden zweckmäßigerweise $E_8 = E_9 = E_{11} = E_{12} = 0$ und $E_7 < x_{\min}$ sowie $E_{10} > x_{\max}$ gesetzt. Eine zusätzliche Begrenzung nach Variante IV entfällt.

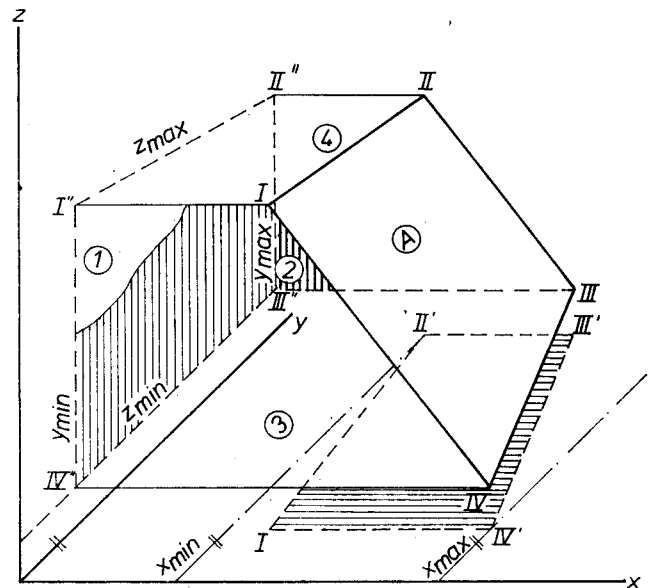


Bild 5.4.-2

Darstellung der Begrenzungen einer schräg im Raum liegenden Rechteckfläche

Beispiel 2

Eine Kreisfläche A im Raum soll dargestellt werden (Bild 5.4.-3). Zunächst wird die Gleichung der Ebene B , in der die Kreisfläche liegt, aufgestellt. Im Mittelpunkt M der Kreisfläche wird eine Kugel ① mit gleichem Radius aufgespannt. Des weiteren entsteht durch Eingabe von Gl. (5.4.-11) und Gl. (5.4.-12) der maximale Definitionsbereich I', II', III', IV'. Im Rechenprogramm wird dann in diskreten Δx - und Δy -Schritten diese Projektionsfläche abgearbeitet, und die zugehörigen z -Werte, die Elemente der Fläche B sind, werden ermittelt. Sind dies gleichzeitig auch

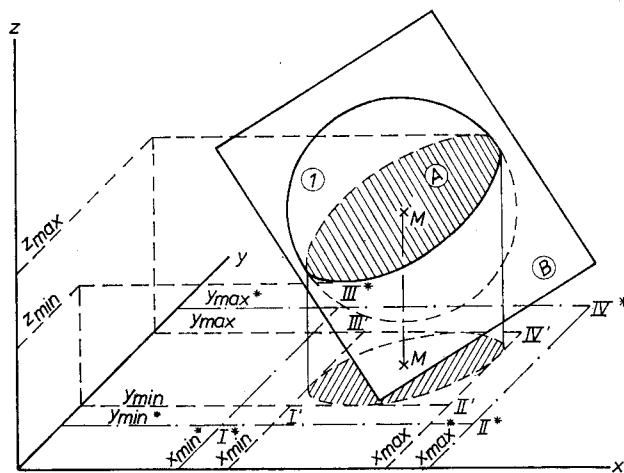


Bild 5.4.-3
Darstellung der Begrenzung einer schräg im Raum liegenden Kreisfläche.

Elemente der Kugel ① nach Gl. (5.4.-20), so liegt ein Element der Kreisfläche A vor und wird in der Berechnung der Einstrahlzahl betrachtet, andernfalls wird ein Schritt Δy oder Δx weitergegangen.

Es kann mitunter schwierig sein, die Projektionsfläche I' , II' , III' , IV' durch Tangenten an die Kreisprojektion aufzustellen. Diese manuelle Arbeit kann einfach umgangen werden, wenn die Begrenzungsflächen nach den Gln. (5.4.-11) und (5.4.-12) jeweils nach außen verschoben werden, so daß der Definitionsbereich I^* , II^* , III^* , IV^* entsteht. Die Rechenzeit verlängert sich natürlich durch die größere Zahl der Tests etwas. Die Begrenzung nach Gl. (5.4.-13) ist in diesem Fall nicht erforderlich. Da dieser Test jedoch grundsätzlich im Rechenprogramm eingebaut ist, werden die Koeffizienten $E_8 = E_9 = E_{11} = E_{12} = 0$ gesetzt und $E_7 < z_{\min}$ sowie $E_{10} > z_{\max}$ gestellt.

Beispiel 3

Eine Fläche 2. Ordnung A (Bild 5.4.-4) soll durch Ebenen der Gln. (5.4.-11) bis (5.4.-19) begrenzt werden. Die dargestellte Fläche ergibt Projektionen auf die Tafel Ebenen x, y ; y, z und x, z . Da krummlinige Begrenzungsflächen nicht darstellbar sind, empfiehlt

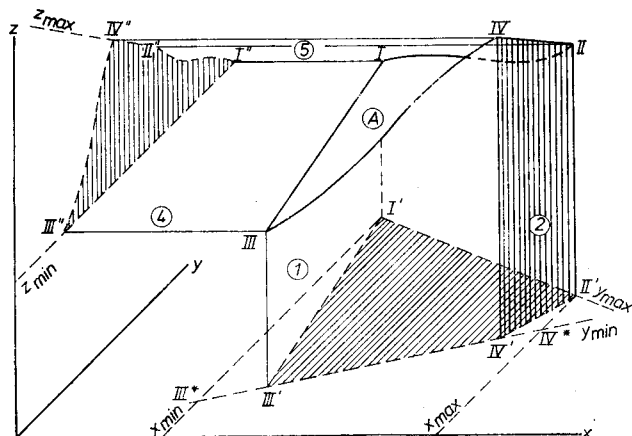


Bild 5.4.-4
Darstellung der Begrenzungen einer Fläche zweiten Grades

sich folgendes Vorgehen. Durch Gl. (5.4.-12) werden die Ebenen ① und ② definiert. In Verbindung mit Gl. (5.4.-11) ergeben sich die Punkte I' und II' bzw. die Originalpunkte I und II auf der Fläche A . Die weiteren Begrenzungen werden durch die Ebenen ④ und ⑤ nach Gl. (5.4.-13) gegeben, wobei im Schnitt mit der Ebene ① auch die Punkte III und IV auf der Fläche A entstehen. Im Rechenprogramm würde dann der Bereich, der durch die Projektion I' , II' , III' , IV' gegeben ist, in Δx - und Δy -Schritten abgearbeitet. Durch die Testung bezüglich der Gl. (5.4.-13) erfolgt dann automatisch die Reduzierung auf den wirklichen Bereich I' , II' , III' , IV' .

5.4.3. Mathematisches Modell schattenerzeugender Bauteile

Zwischen den im Strahlungsaustausch stehenden Körpern befinden sich in der Praxis oft wärmestrahlen- und durchlässige Körper endlicher Abmessungen. Dies sind in der Regel Rohre, Säulen, Zwischenwände usw. Um diese Körper auf einfache und einheitliche Weise darzustellen, werden elliptische Zylinder der Form

- Zylinderachse parallel zur z -Achse (Kennzahl $P = 1$)

$$\frac{(x - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(y - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \quad (5.4.-21)$$

- Zylinderachse parallel zur x -Achse (Kennzahl $P = 2$)

$$\frac{(y - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(z - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \quad (5.4.-22)$$

- Zylinderachse parallel zur y -Achse (Kennzahl $P = 3$)

$$\frac{(z - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(x - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \quad (5.4.-23)$$

verwendet (Bild 5.4.-5). Sind beide Halbachsen gleich $H_3 = H_4$, so geht der elliptische Zylinder in einen Kreiszylinder über, und Rohre, Säulen usw. sind abbildbar. Sind die beiden Halbachsen sehr unterschied-

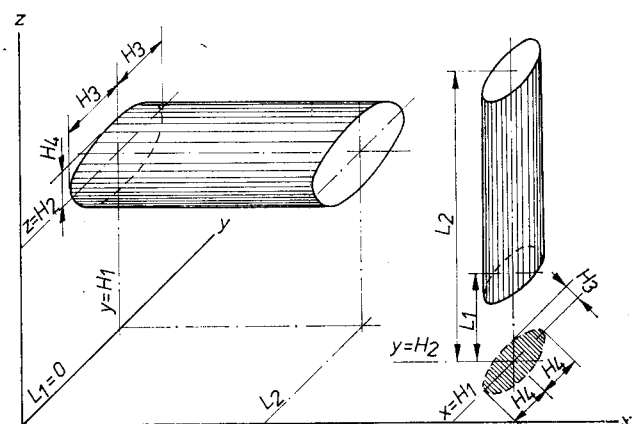


Bild 5.4.-5
Allgemeingültige Darstellung eines schattenerzeugenden Bauteils

lich ($H_3 \ll H_4$ oder $H_4 \ll H_3$), so können damit näherungsweise Zwischenwände, Strahlungsschirme usw. dargestellt werden. Das schattenerzeugende Bauteil wird des weiteren noch durch zusätzliche Eingaben in der Höhe begrenzt. So stellt L_1 die untere und L_2 die obere Begrenzung — gemessen von der jeweiligen Tafelebene aus — dar. Der Aufbau des Rechenprogramms läßt insgesamt die Eingabe von fünf derartigen Hindernissen zu. Bei der Rechnung ist jeweils zu ermitteln, ob die Verbindungsgerade zwischen den betrachteten Flächenelementen ein Hindernis schneidet. Da die Zylinderachsen parallel den Koordinatenachsen liegen, genügt es, die Projektion auf die jeweiligen Grundebenen zu beziehen. Denn wird ein Zylinder von einer im Raum aufgespannten Geraden geschnitten, dann wird auch die Projektion dieser Geraden den Zylindergrundkreis schneiden. Die Ableitung erfolgt für einen Zylinder, der auf der x,y -Ebene steht. Für die Gerade gilt

$$y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x - x_a) \quad (5.4.-24)$$

und Substitution in Gl. (5.4.-21) liefert

$$\frac{(x - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{\left(y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x - x_a) - H_2\right)^2}{H_4^2} = 1. \quad (5.4.-25)$$

Mit den Abkürzungen

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}; \quad \varrho = -H_2 + y_a - x_a m \quad (5.4.-26)$$

folgt nach einiger Zwischenrechnung

$$x_{1/2} = -\frac{\frac{\varrho \cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{\varrho \cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}}\right)^2 - \frac{\frac{H_1^2}{H_3^2} + \frac{\varrho^2}{H_4^2} - 1}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}}}. \quad (5.4.-27)$$

Sobald eine Doppelwurzel die Lösung darstellt (Radikand gleich Null), bedeutet dies, daß der Verbindungsvektor das Hindernis tangiert. Für diesen Fall sei noch ein Strahlungsaustausch angenommen. Ist der Radikand positiv, so existieren zwei Lösungen im Reellen, das heißt, die Verbindungsgerade schneidet das Hindernis, ein Strahlungsaustausch entfällt. Für diesen Fall muß gelten:

$$\left(\frac{\varrho \cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}\right)^2 > \left(\frac{H_1^2}{H_3^2} + \frac{\varrho^2}{H_4^2} - 1\right) \left(\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}\right). \quad (5.4.-28)$$

Des weiteren muß geprüft werden, ob das Hindernis auf Grund seiner Höhe im Strahlengang liegt. Zu diesem Zweck wird die Projektion der Verbindungsgeraden auf die x,z -Ebene betrachtet und die z -Koordi-

nate an der Stelle $x = H_1$ nach

$$z = z_a + \frac{H_1 - x_a}{x_b - x_a} (z_b - z_a) \quad (5.4.-29)$$

berechnet. Gilt gleichzeitig

$$L_1 < z < L_2 \quad (5.4.-30)$$

und Gl. (5.4.-28), so findet kein Strahlungsaustausch statt. Der Einfachheit halber wurde der Höhentest nur für eine Ebene $x = H_1$ durchgeführt. Eventuell hervorstehende Kanten bleiben unberücksichtigt.

Anmerkung

Um einen Zahlenüberlauf durch unerlaubte Division durch Null in den Gln. (5.4.-26) und (5.4.-29) zu vermeiden, das vorliegende Programm aber nicht noch weiter zu komplizieren, sind die Anordnung der Flächen oder deren Teilungen so zu wählen, daß es keine Verbindungsgerade gibt, für die $x_a = x_b$ gilt. In zyklischer Vertauschung der Koordinaten erhält man die Aussagen und Ableitungen analog.

5.4.4. Mathematisches Modell spezieller Strahlungsflächen

5.4.4.1. Flächenelement und kugelförmiges Element

Entsprechend Bild 5.4.-6 sind die Koordinaten des Elementes

$$x = A_1; \quad y = A_2; \quad z = A_3 \quad (5.4.-31)$$

und der zugehörige Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix} \quad (5.4.-32)$$

in der Form eines Einsvektors ($\sqrt{nx^2 + ny^2 + nz^2} = 1$) einzugeben. Die Angabe $N = +1$ oder $N = -1$ kennzeichnet die Richtung des Normalenvektors. Ist die Richtung mit der in Bild 5.4.-1 gezeichneten Richtung identisch (man beachte dabei stets Fläche a oder b), dann gilt $N = +1$, sonst $N = -1$.

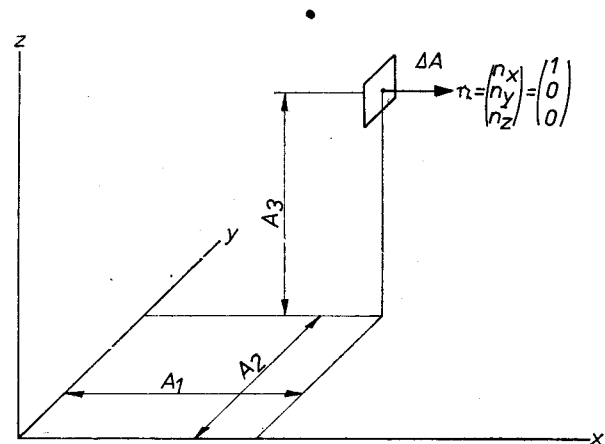


Bild 5.4.-6
Darstellung eines im Strahlungsaustausch befindlichen Flächenelementes im Koordinatensystem

Werden die Komponenten des Normalenvektors $nx_a = 0$; $ny_a = 0$; $nz_a = 0$ und $N_a = 0$ gesetzt, dann erfolgt die mathematische Abarbeitung für ein kugelförmiges Element. Programmintern wird dann $\cos \beta_a = 0,25$ gestellt, so daß die Ursprungsbeziehung Gl. (5.1.-1) in Gl. (5.1.-3) übergeht.

5.4.4.2. Fläche 2. Ordnung

Gemäß Gl. (5.4.-5) werden die Koeffizienten A_1 bis A_{10} , für das Gleichungssystem Gln. (5.4.-11) bis (5.4.-20) die Koeffizienten E_1 bis E_{16} , die Richtung des Normalenvektors N sowie die Schrittweite Δx und Δy eingegeben. Die schrittweise Abarbeitung der Projektionsfläche erfolgt nach folgendem Schema (Bild 5.4.-7).

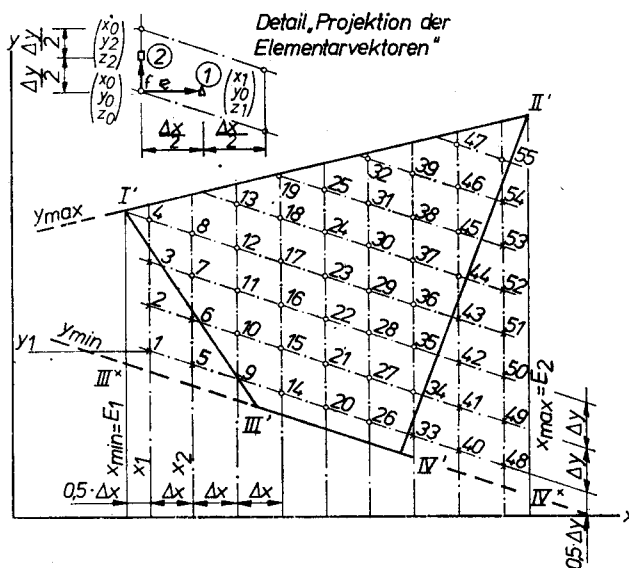


Bild 5.4.-7
Abarbeitung der Flächenelemente einer Fläche zweiten Grades an Hand eines auf der Projektionsfläche erzeugten Rasters

Ausgehend von

$$x_{\min} = E_1; \quad y_{\min,1} = E_3 + E_4 x_1$$

wird

$$x_1 = x_{\min} + 0,5\Delta x; \quad y_1 = y_{\min,1} + 0,5\Delta y$$

für den ersten Berechnungsschritt gesetzt. Insgesamt werden in diesem Beispiel 55 Berechnungspunkte bearbeitet, wobei die mit „Stern“ dargestellten Punkte auf Grund der Begrenzung nach Gl. (5.4.-13) ausscheiden. Dies geschieht durch den Test

$$E_{10} + E_{11}x + E_{12}y > z > E_7 + E_8x + E_9y$$

mit

$$z = -\frac{A_5x + A_6y + A_9}{2A_3} + \sqrt{\left(\frac{A_5x + A_6y + A_9}{2A_3}\right)^2 + \frac{A_1x^2 + A_2y^2 + A_4xy + A_7x + A_8y + A_{10}}{A_3}}$$

Wird die Begrenzung durch Gl. (5.4.-20) nicht benötigt, so ist $E_{16} = 0$ einzugeben.

Um die Berechnung des Normalenvektors nach Gl. (5.4.-6) möglichst einfach zu gestalten, wurde zu rechtwinklig aufeinanderstehenden Elementarvektoren (Bild 5.4.-7, Detail) übergegangen. Damit ergeben sich für diese Elementarvektoren die Koordinatenvektoren

$$e = \begin{pmatrix} 0,5\Delta x \\ 0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5\Delta y \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix} \quad (5.4.-33)$$

und deren Vektorprodukt

$$e \times f = \begin{pmatrix} -0,5\Delta y(z_1 - z_0) \\ -0,5\Delta x(z_2 - z_0) \\ 0,25\Delta x \Delta y \end{pmatrix} \quad (5.4.-34)$$

mit dem Betrag

$$|e \times f| = \sqrt{[0,5\Delta y(z_1 - z_0)]^2 + [0,5\Delta x(z_2 - z_0)]^2 + [0,25\Delta x \Delta y]^2} \quad (5.4.-35)$$

Das Vierfache dieses Betrages ist zahlenmäßig gleich dem Inhalt des Flächenelementes

$$\Delta A = 4 \cdot |e \times f|. \quad (5.4.-36)$$

Der Normalenvektor als „Einsvektor“ lautet weiterhin

$$n = \frac{e \times f}{|e \times f|} \quad (5.4.-37)$$

Er steht senkrecht auf dem Flächenelement und weist nach „oben“ in z-Richtung (Rechtssystem).

5.4.4.3. Ebene

Ausgehend von der allgemeinen Form einer Ebenengleichung

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0, \quad (5.4.-38)$$

ist das Rechenprogramm für die Darstellung in der Hesseschen Normalform vorbereitet, so daß Gl. (5.4.-38) durch den Betrag

$$s = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (5.4.-39)$$

dividiert mit

$$A_1 = \frac{a_1}{s}; \quad A_2 = \frac{a_2}{s}; \quad A_3 = \frac{a_3}{s}; \quad A_4 = \frac{a_4}{s}$$

folgt

$$A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0. \quad (5.4.-40)$$

Somit sind die Koeffizienten A_1 bis A_4 , für die Begrenzungen E_1 bis E_{16} , die Richtung des Normalenvektors N , sowie die Schrittweiten Δx und Δy einzugeben.

Da die Ebenengleichung in der Hesseschen Normalform gewählt wurde, ergibt sich der Normalenvektor

zu ermitteln. Beim Übergang zur Differenzform erhält man unter Berücksichtigung der Höhe Δz

$$\Delta A = \sqrt{A_3^2 \sin^2 \varphi + A_4^2 \cos^2 \varphi} \Delta \varphi \frac{\pi}{180^\circ} \Delta z. \quad (5.4.-52)$$

Setzt man $A_3 = A_4$, so ergeben sich die für den Kreiszylinder gültigen Werte.

Die Begrenzungen, die Abarbeitung der diskreten Punkte auf der Mantelfläche und die Eingaben sind dem Kreiszylinder vollkommen analog. Bei der Eingabe werden lediglich vier Koeffizienten A_1 bis A_4 gemäß Gln. (5.4.-48) und (5.4.-49) erforderlich.

5.4.4.6. Kugel

Die transformierte Parameterdarstellung für eine Kugel lautet

$$x = A_1 + A_4 \cos \varphi \sin \vartheta \quad (5.4.-53)$$

$$y = A_2 + A_4 \sin \varphi \sin \vartheta \quad (5.4.-54)$$

$$z = A_3 + A_4 \cos \vartheta. \quad (5.4.-55)$$

Somit sind die Koeffizienten A_1 bis A_4 , die Koeffizienten E_1 bis E_{12} , die Schrittweiten $\Delta \varphi$ und $\Delta \vartheta$ sowie die Normalenrichtung N einzugeben.

Der Normalenvektor als Einsvektor ergibt sich zu

$$n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (5.4.-56)$$

Der Inhalt des Flächenelementes kann anschaulich dem Bild 5.4.-9 entnommen werden. Es gilt

$$\Delta A = A_4^2 \Delta \vartheta \Delta \varphi \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right)^2 \sin \vartheta. \quad (5.4.-57)$$

Ausgehend von $\varphi_1 = 0,5\Delta\varphi$ und $\vartheta_1 = 0,5\Delta\vartheta$ werden alle um $\Delta\varphi$ und $\Delta\vartheta$ erhöhten Werte bis $\varphi = 360^\circ$ und

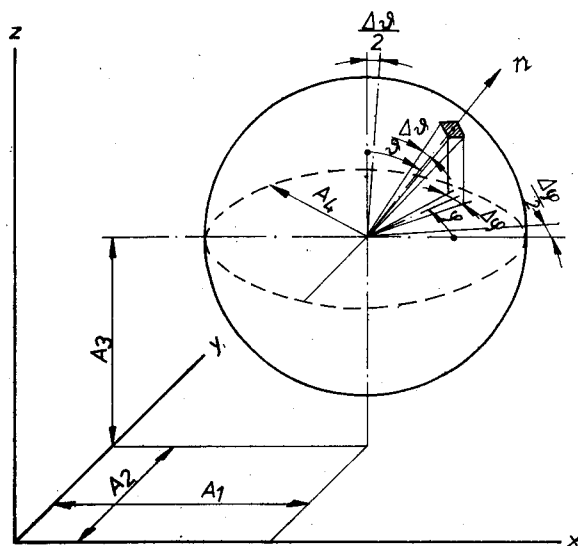


Bild 5.4.-9
Darstellung eines Flächenelementes einer Kugeloberfläche

$\vartheta = 180^\circ$ abgearbeitet und die sich daraus ergebenden Koordinatenwerte x, y, z mit den Begrenzungen verglichen.

5.4.5. Rechenprogramm für eine elektronische Datenverarbeitungsanlage

Es ist zweckmäßig, das Rechenprogramm zu unterteilen.

Hauptprogramm

Das Hauptprogramm enthält die Steuerung der Abarbeitung des diskreten Punkt-Netzes, die Ermittlung der Einstrahlwinkel und die summative Bestimmung der Einstrahlzahl unter Berücksichtigung möglicher Hindernisse im Strahlengang. Gemäß Bild 5.4.-1 muß für jedes Flächenteilchen auf der Fläche a der Durchgang für jedes Element der Fläche b erfolgen.

Die damit verbundene fortlaufende Rechnungswiederholung wird eingespart, wenn beim ersten Durchgang die charakteristischen Parameter gespeichert werden.

Diese Möglichkeit ist für den

- Normalenvektor (nx, ny, nz)
- Koordinatenvektor (x, y, z)
- Inhalt des Flächenelementes (ΔA)

gegeben (Steuerung durch $\text{Mag} = 1$).

Unterprogramme

Die Unterprogramme sind jeweils für eine Fläche a oder eine Fläche b gestaltet. Sie werden je nach benötigtem Flächentyp dem Hauptprogramm zugeordnet.

Die vorhandene Auswahl (siehe Eingabewerte) ist prinzipiell noch ergänzbar. Die üblichen praktischen Aufgaben dürften aber mit der vorliegenden Dokumentation ohne weiteres zu lösen sein.

Zur Unterscheidung, ob es sich um eine Fläche a oder eine Fläche b handelt, sind folgende Bezeichnungen zu verwenden:

	Fläche a	Fläche b
Koeffizienten der Fläche	A	B
Koeffizienten der Begrenzungen	E	F
Schrittweite Δx	Δxa	Δxb
Δy	Δya	Δyb
Δz	Δza	Δzb
$\Delta \varphi$	$\Delta \varphi a$	$\Delta \varphi b$
$\Delta \vartheta$	$\Delta \vartheta a$	$\Delta \vartheta b$
Normalenrichtung N	Na	Nb

5.4.5.1. Eingabewerte

Die Zusammenstellung der Eingabewerte findet sich im Formblatt 1 (Bild 5.4.-10). Die geometrische Bedeutung der Größen ist bereits im vorangegangenen Abschnitt erläutert worden.

	Einstrahlzahl	Formblatt 1	Blattnr.
① TGA	Betrieb	Bearbeiter	Ruf
	Objekt		
② Steuergrößen			
UP1 UP2 IE	MAG	SCH	
③ Daten für Schatten erzeugende Körper			
	H1(i)	H2(i)	H3(i)
	H4(i)	L1(i)	L2(i)
	P(i)		
	i = 1 i = 2 i = 3 i = 4 i = 5		
④ Daten der Fläche a			
	A(1)	A(2)	A(3)
	A(4)	E(5)	E(6)
	E(7)	E(8)	S1A
	E(9)	E(10)	E(11)
	E(12)	E(13)	E(14)
	E(15)	E(16)	NA
	S 3A		
⑤ Daten der Fläche b			
	B(1)	B(2)	B(3)
	B(4)	B(5)	B(6)
	B(7)	B(8)	B(9)
	B(10)	F(1)	F(2)
	F(3)	F(4)	F(5)
	F(6)	F(7)	F(8)
	F(9)	F(10)	F(11)
	F(12)	F(13)	F(14)
	F(15)	F(16)	NB

Bild 5.4.-10

Formblatt zum Rechenprogramm Einstrahlzahl

1. Block: Objektbezeichnung

Betrieb Bearbeiter Ruf Objekt		Es sind alphanumerische Zeichen zugelassen.
--	--	---

2. Block: Steuergrößen

UP 1		Nummer des anzuwendenden Unterprogramms für die Fläche a 1 — Flächenelement a oder kugelförmiges Element a 2 — Ebene a, die auf x,y-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 3 — Ebene a, die auf y,z-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 4 — Ebene a, die auf x,z-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 5 — Kreiszyylinder a parallel z-Achse 6 — Kreiszyylinder a parallel x-Achse 7 — Kreiszyylinder a parallel y-Achse 8 — Elliptischer Zylinder a parallel z-Achse 9 — Elliptischer Zylinder a parallel x-Achse 10 — Elliptischer Zylinder a parallel y-Achse 11 — Kugel a
UP 2		Nummer des anzuwendenden Unterprogramms für die Fläche b 1 — Fläche 2. Ordnung b, die auf die x,y-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt

2. Block (Fortsetzung)

UP 2		2 — Ebene b, die auf x,y-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 3 — Ebene b, die auf y,z-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 4 — Ebene b, die auf x,z-Ebene eine flächenförmige Projektion ergibt 5 — Kreiszylinder b parallel z-Achse 6 — Kreiszylinder b parallel x-Achse 7 — Kreiszylinder b parallel y-Achse 8 — Elliptischer Zylinder b parallel z-Achse 9 — Elliptischer Zylinder b parallel x-Achse 10 — Elliptischer Zylinder b parallel y-Achse 11 — Kugel b
IE		Diese Größe ist bei der Eingabe nach Formblatt 1 Null zu setzen. Zur Errechnung von Tabellen kann die Eingabe verkürzt werden. Dazu ist allerdings ein Formblatt 2 erforderlich. Es gilt dann $IE = 1$.
Mag		Mag = 0, wenn a ein Flächen- oder kugelförmiges Element ist Mag = 1, wenn a eine Fläche repräsentiert Spezielle Werte der Fläche b werden abgespeichert (z. B. auf ein Magnetband), um diese bei einem weiteren Element der Fläche a verfügbar zu haben.
SCH		Anzahl der schattenerzeugenden Körper, die den Strahlungsaustausch behindern ($Sch = 0 \dots 5$)

3. Block: Daten der schattenerzeugenden Körper

$H_1 [i]$ $H_2 [i]$	Längeneinheit	Koordinaten des Mittelpunktes der projizierten Zylindergrundfläche auf die Aufstellungsebene
$H_3 [i]$ $H_4 [i]$	Längeneinheit	Halbachsen der Zylinder
$L_1 [i]$ $L_2 [i]$	Längeneinheit	Höhe der Zylindergrund- und -deckfläche über der Aufstellungsebene
P [i]		Lage der Zylinderachse P = 1 parallel z-Achse P = 2 parallel x-Achse P = 3 parallel y-Achse

Zum besseren Verständnis vergleiche man auch die Gln. (5.4.-21) bis (5.4.-23). Die vorstehenden Werte sind nur bei $Sch \neq 0$ auszufüllen. Die Zahl i stellt die laufende Nummer des schattenerzeugenden Bauteils dar ($i_{\max} \equiv Sch \leq 5$).

4. Block: Daten der Fläche a

$A_1 \dots A_4$	Längeneinheit; (Längeneinheit) ⁻¹	Parameter der Fläche a nach den Gln. (5.4.-31); (5.4.-40); (5.4.-44/45); (5.4.-48/49); (5.4.-53/54/55)
$E_1; E_2; E_3; E_5; E_7; E_{10};$ $E_{13}; E_{14}; E_{15}; E_{16}$	Längeneinheit	Parameter der Flächenbegrenzungen nach den Gln. (5.4.-11) bis (5.4.-20)
$E_4; E_6; E_8; E_9; E_{11}; E_{12}$		

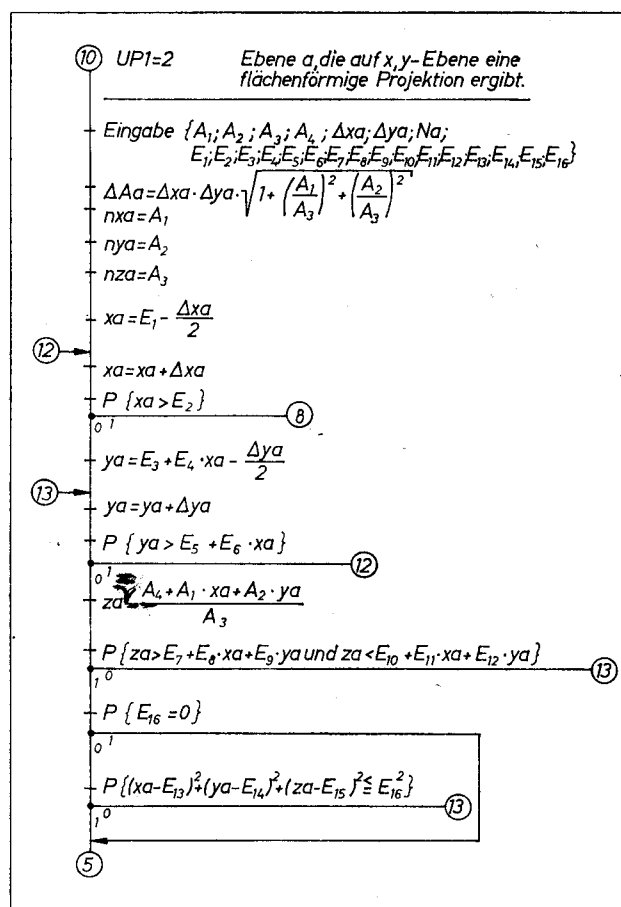
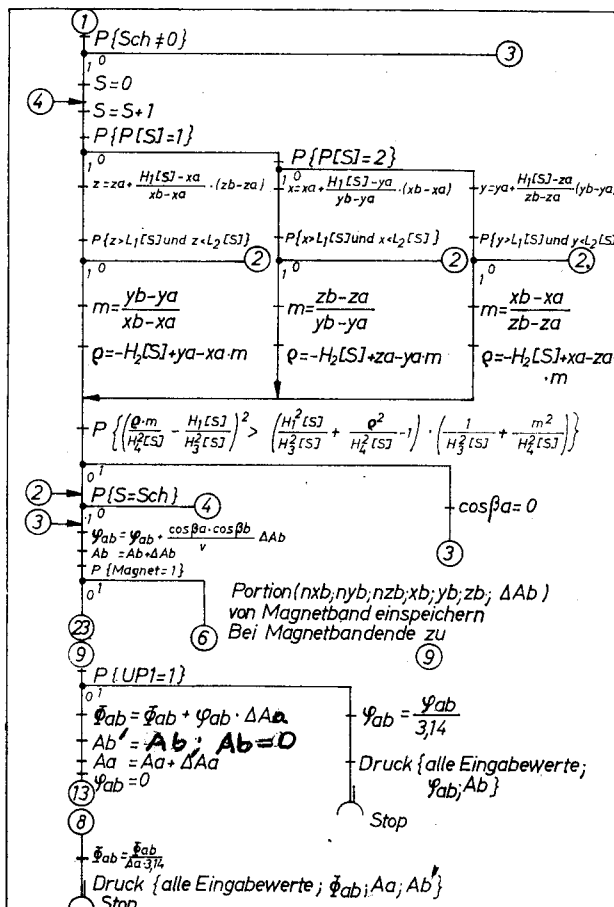
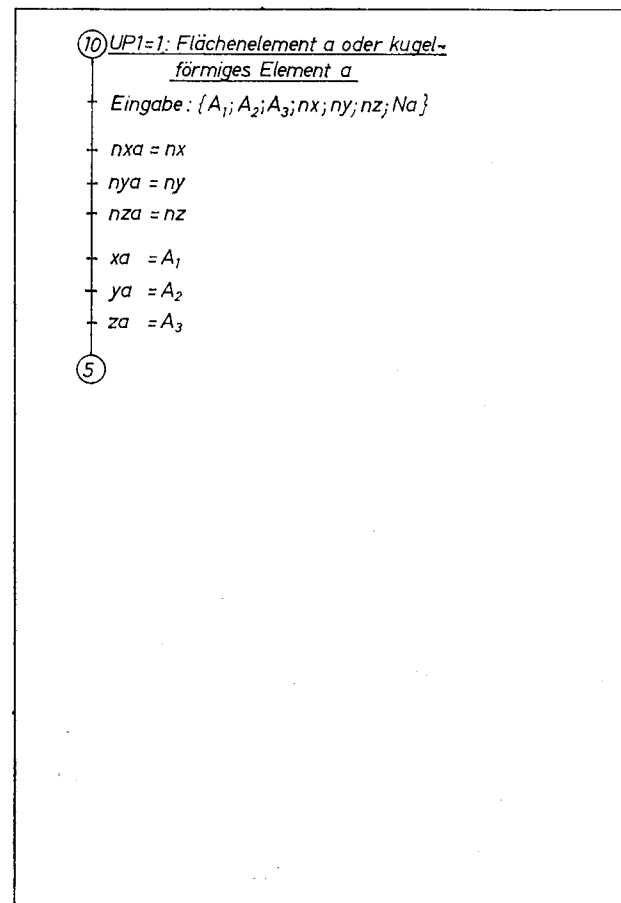
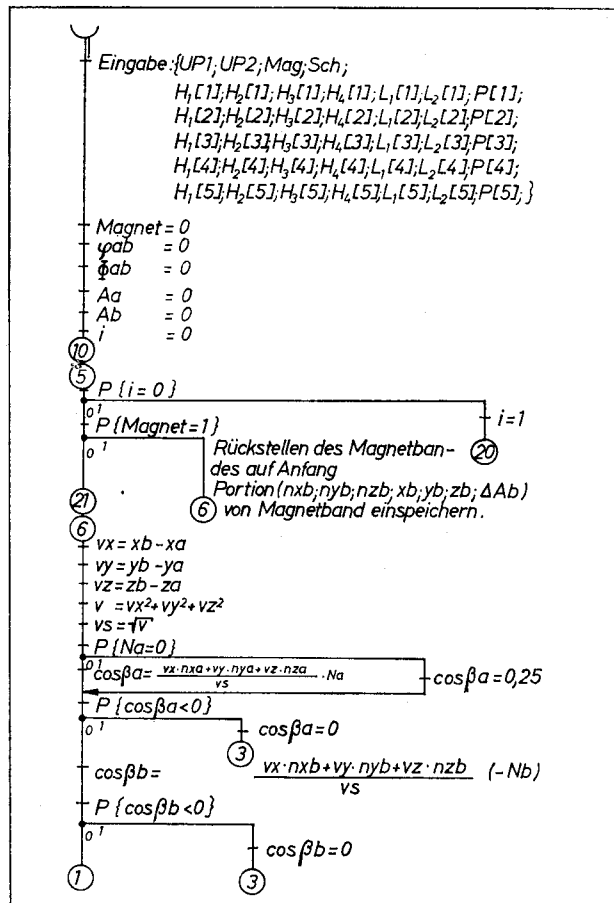
4. Block (Fortsetzung)

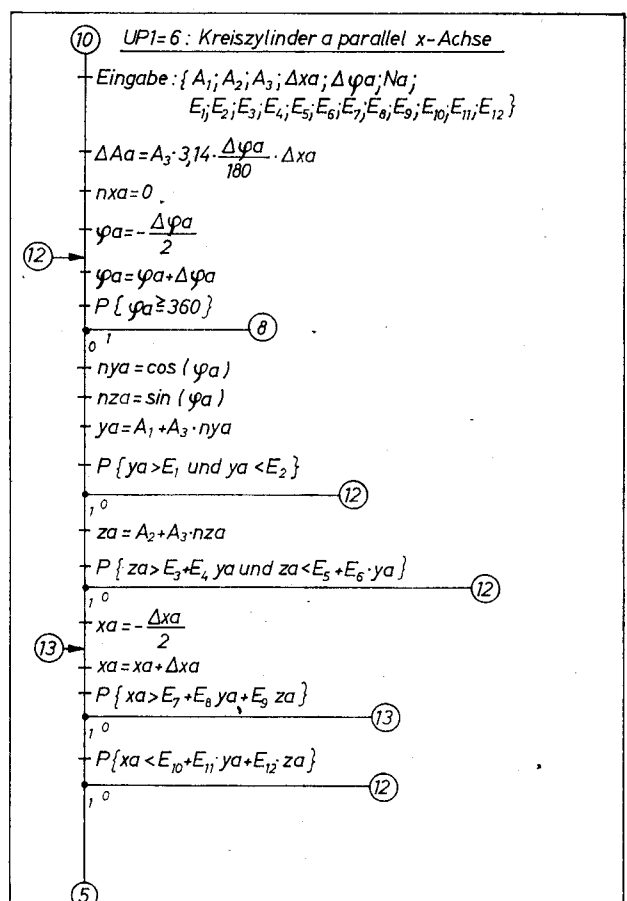
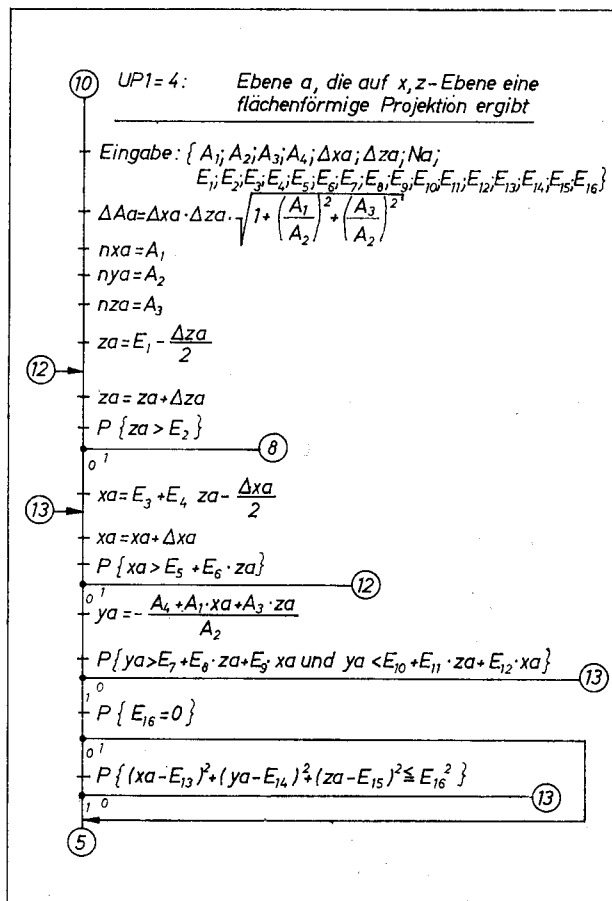
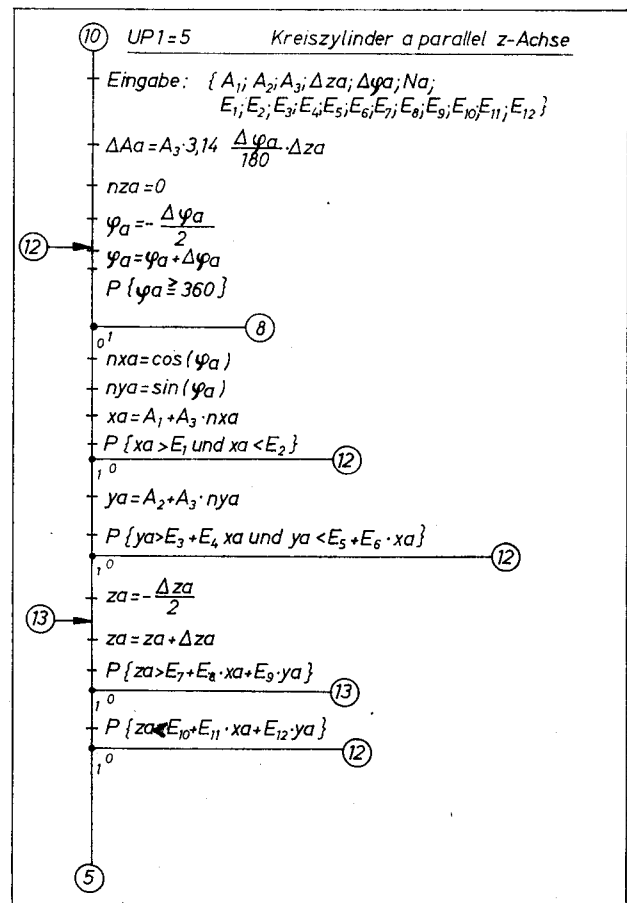
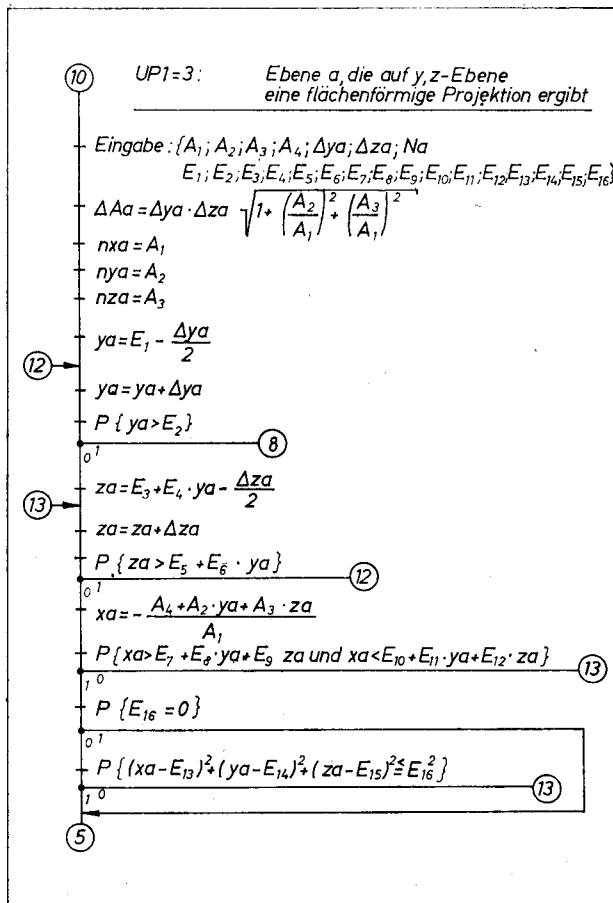
S 1 A S 2 A S 3 A	x, y, z in Längeneinheit φ, ϑ in Grad	Für UP 1 = 1 gilt: S 1 A = nx; S 2 A = ny; S 3 A = nz Für UP 1 = 2 gilt: S 1 A = Δx_a; S 2 A = Δy_a. Für UP 1 = 3 gilt: S 1 A = Δy_a; S 2 A = Δz_a. Für UP 1 = 4 gilt: S 1 A = Δz_a; S 2 A = Δx_a. Für UP 1 = 5 gilt: S 1 A = Δz_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 6 gilt: S 1 A = Δx_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 7 gilt: S 1 A = Δy_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 8 gilt: S 1 A = Δz_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 9 gilt: S 1 A = Δx_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 10 gilt: S 1 A = Δy_a; S 2 A = $\Delta \varphi_a$. Für UP 1 = 11 gilt: S 1 A = $\Delta \varphi_a$; S 2 A = $\Delta \vartheta_a$.
Na		Kennzeichnung, welche Seite einer Fläche im Strahlungsaustausch steht Na = 0 kugelförmige Elemente a Na = 1 Richtung des Normalenvektors nach den Gln. (5.4.-32); (5.4.-41); (5.4.-46); (5.4.-50); (5.4.-56) stimmt mit der Normalenrichtung nach Bild 5.4.-1 überein, sonst Na = -1. (Bei Zylinder- und Kugelflächen gilt Na = -1 nur dann, wenn die konkaven Flächen betrachtet werden sollen.)

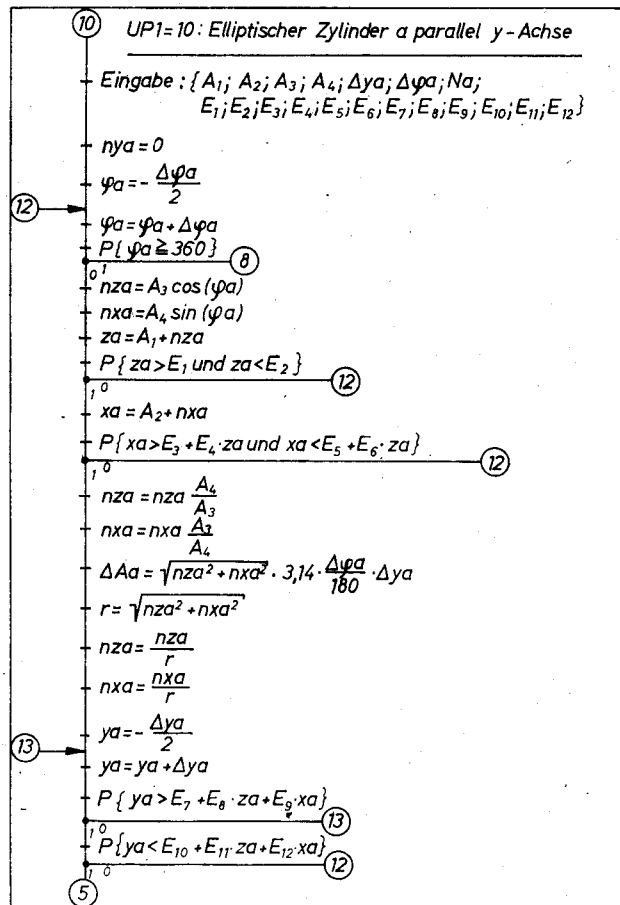
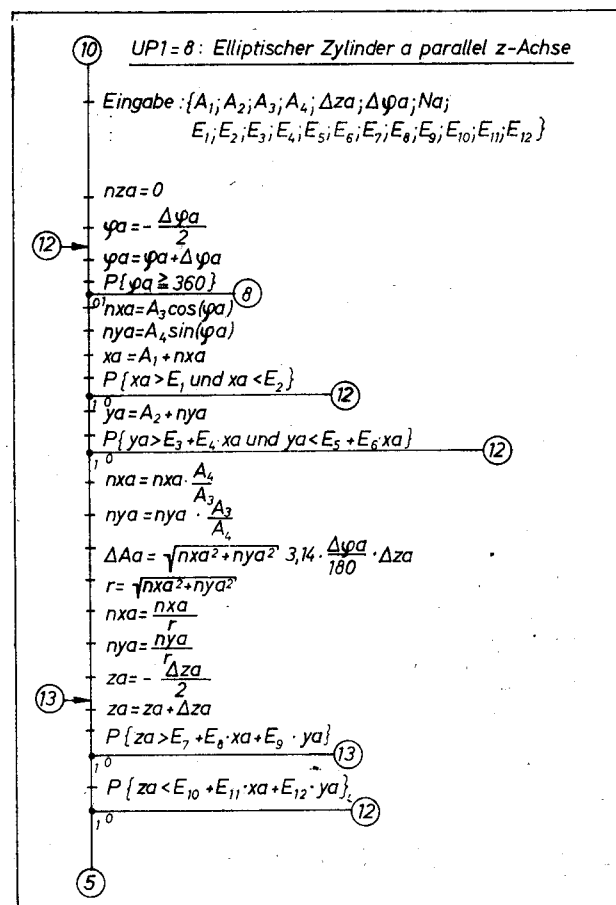
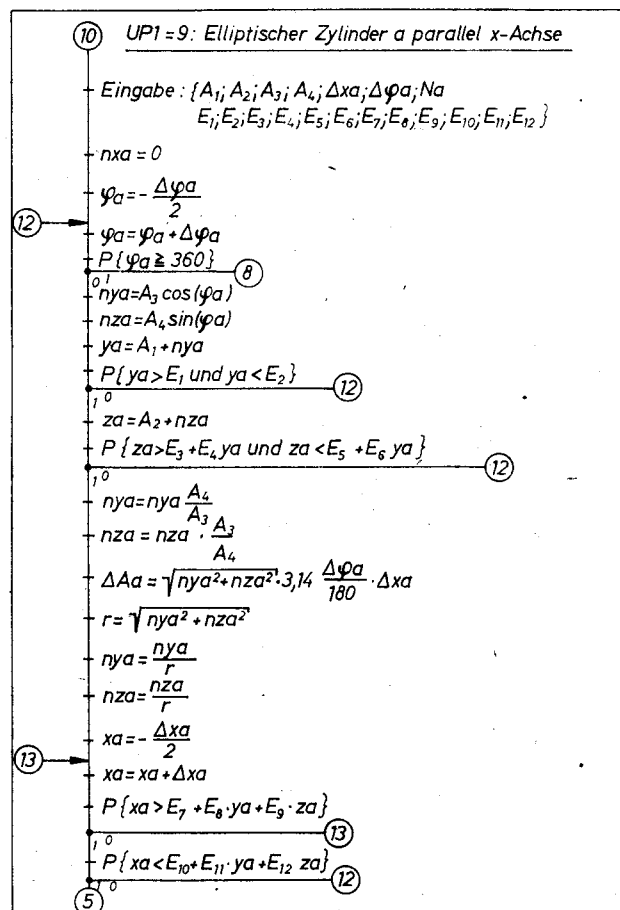
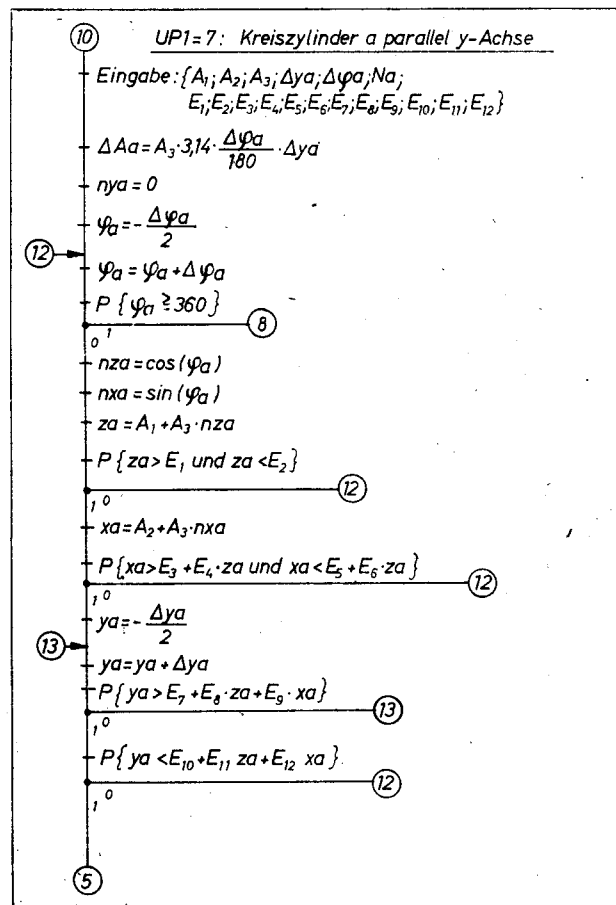
5. Block: Daten der Fläche b

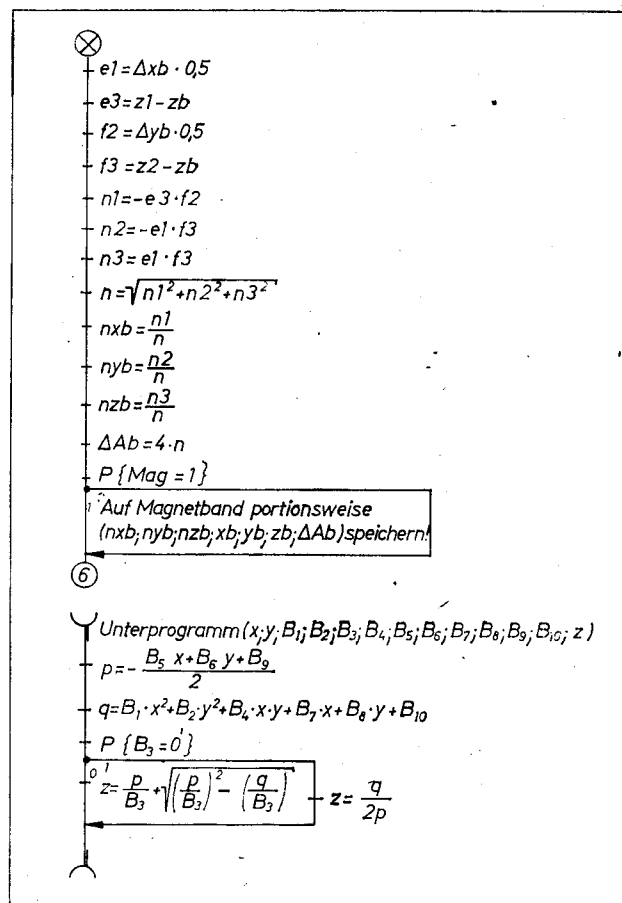
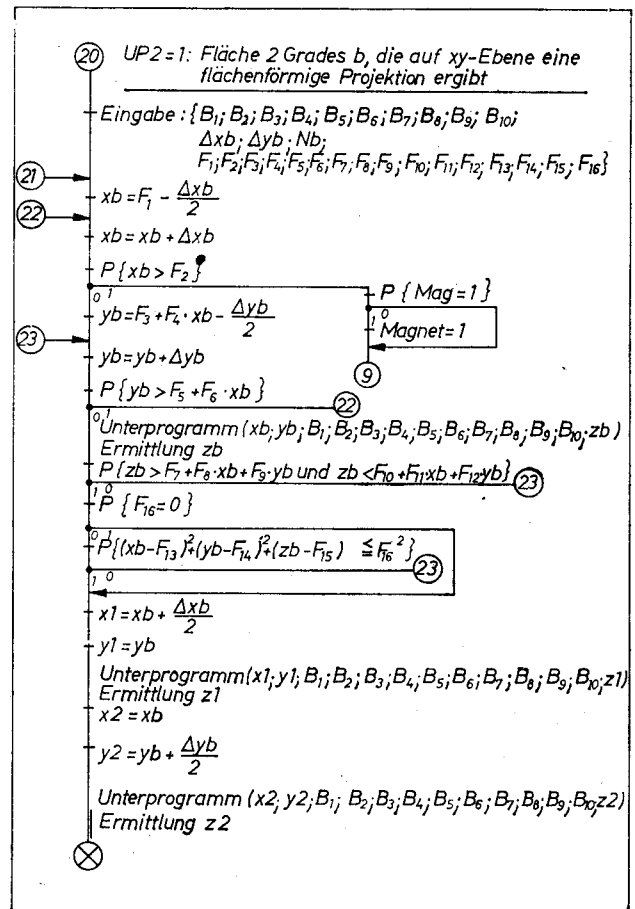
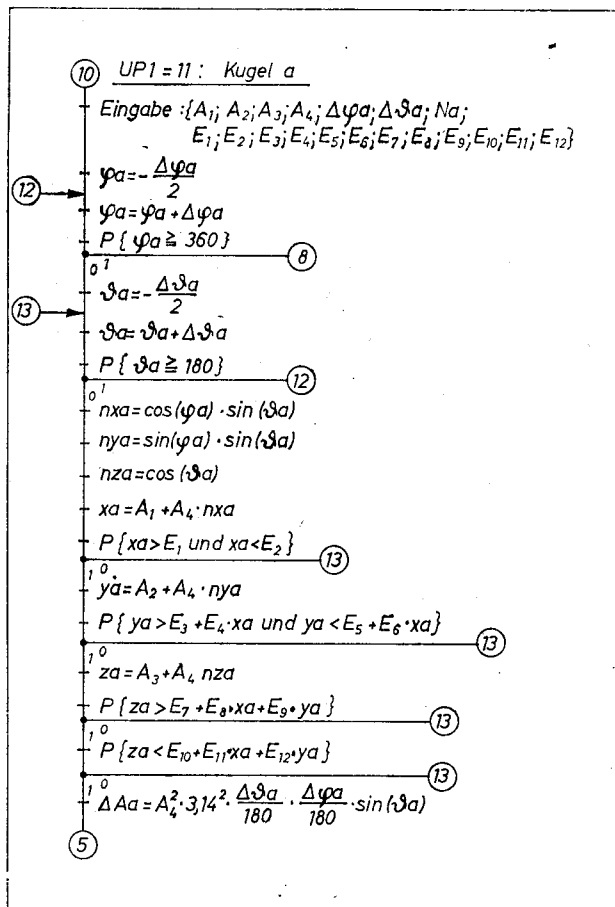
B ₁ ...B ₁₀	Längeneinheit; (Längeneinheit) ⁻¹ (Längeneinheit) ⁻²	Parameter der Fläche b nach den Gln. (5.4.-5); (5.4.-31); (5.4.-40); (5.4.-44/45); (5.4.-48/49); (5.4.-53/54/55)
F ₁ ; F ₂ ; F ₃ ; F ₅ ; F ₇ ; F ₁₀ ; F ₁₃ ; F ₁₄ ; F ₁₅ ; F ₁₆	Längeneinheit	Parameter der Flächenbegrenzungen analog Gln. (5.4.-11) bis (5.4.-20)
F ₄ ; F ₆ ; F ₈ ; F ₉ ; F ₁₁ ; F ₁₂		
S 1 B S 2 B S 3 B	x, y, z in Längeneinheiten φ, ϑ in Grad	Für UP 2 = 1 gilt: S 1 B = Δx_b; S 2 B = Δy_b. Für UP 2 = 2 gilt: S 1 B = Δx_b; S 2 B = Δy_b. Für UP 2 = 3 gilt: S 1 B = Δy_b; S 2 B = Δz_b. Für UP 2 = 4 gilt: S 1 B = Δz_b; S 2 B = Δx_b. Für UP 2 = 5 gilt: S 1 B = Δz_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 6 gilt: S 1 B = Δx_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 7 gilt: S 1 B = Δy_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 8 gilt: S 1 B = Δz_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 9 gilt: S 1 B = Δx_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 10 gilt: S 1 B = Δy_b; S 2 B = $\Delta \varphi_b$. Für UP 2 = 11 gilt: S 1 B = $\Delta \varphi_b$; S 2 B = $\Delta \vartheta_b$.
Nb		Kennzeichnung, welche Seite einer Fläche im Strahlungsaustausch steht. Nb = 0 kugelförmige Elemente b Nb = 1 Richtung des Normalenvektors nach den Gln. (5.4.-32); (5.4.-37); (5.4.-41); (5.4.-46); (5.4.-50); (5.4.-56) stimmt mit der Normalenrichtung nach Bild 5.4.-1 überein, sonst Nb = -1. (Bei Zylinder- und Kugelflächen gilt Nb = -1 nur dann, wenn die konkaven Flächen betrachtet werden sollen.)

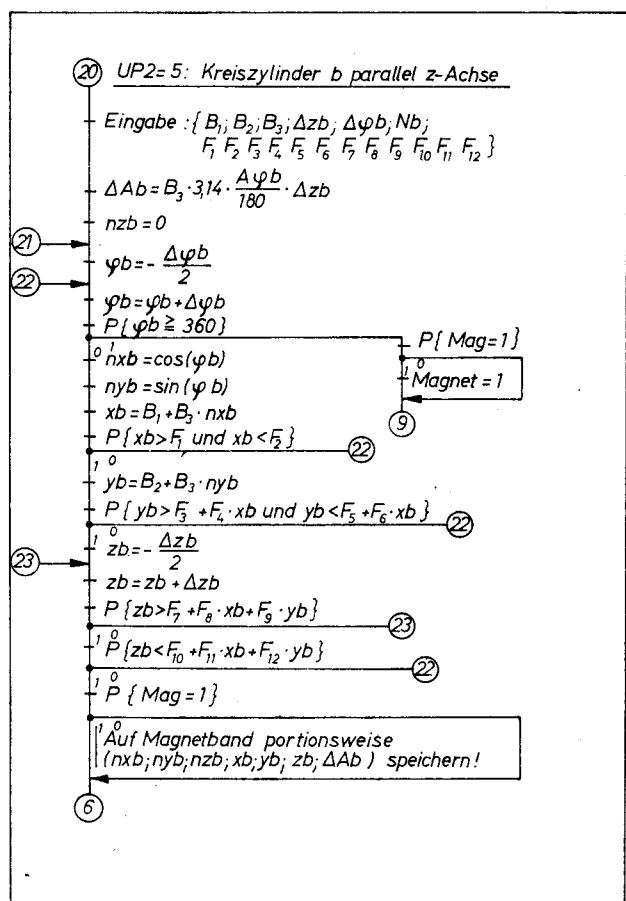
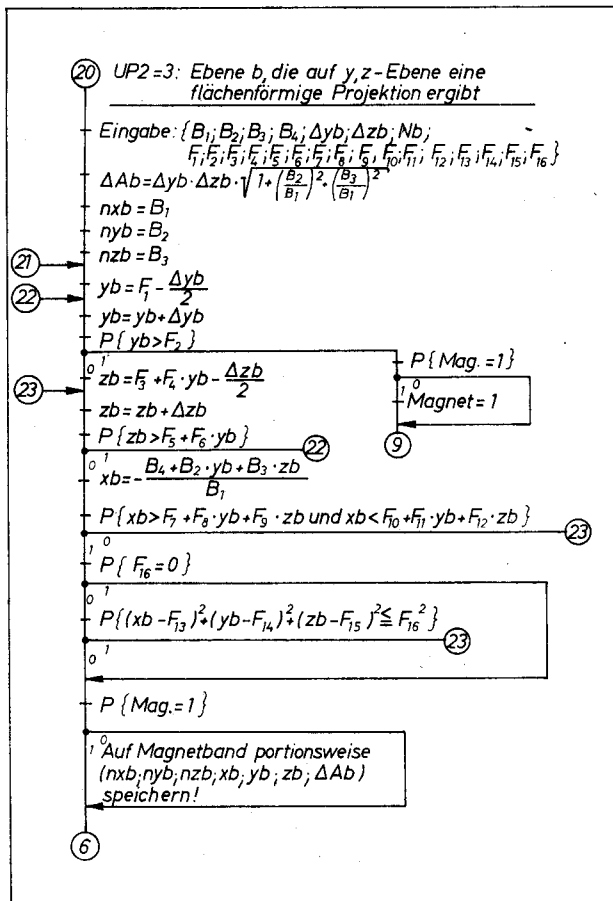
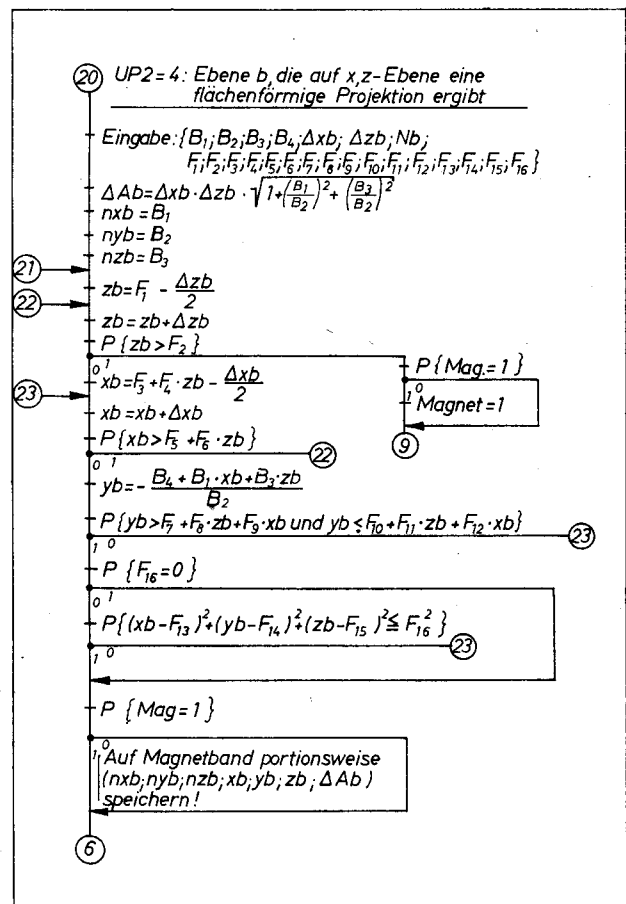
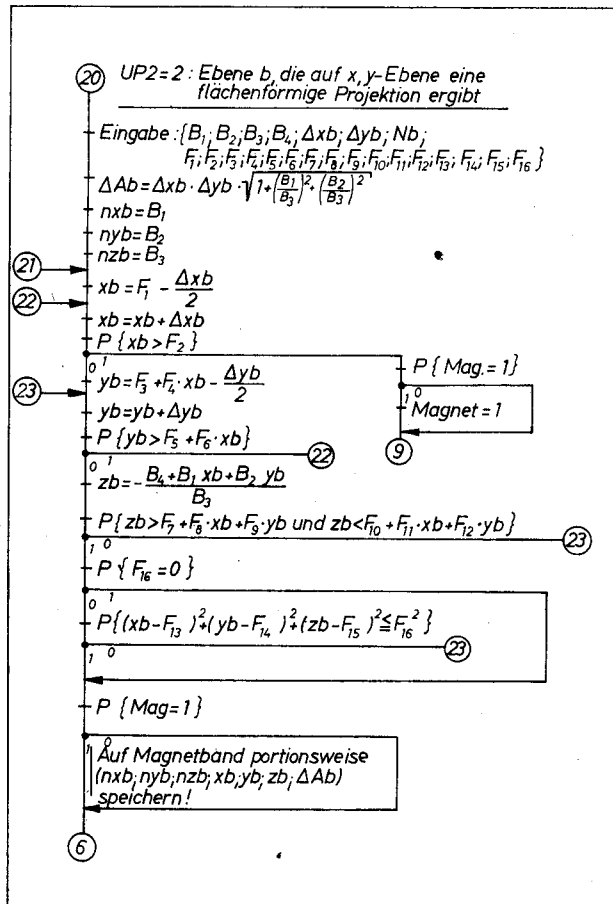
5.4.5.2. Algorithmus

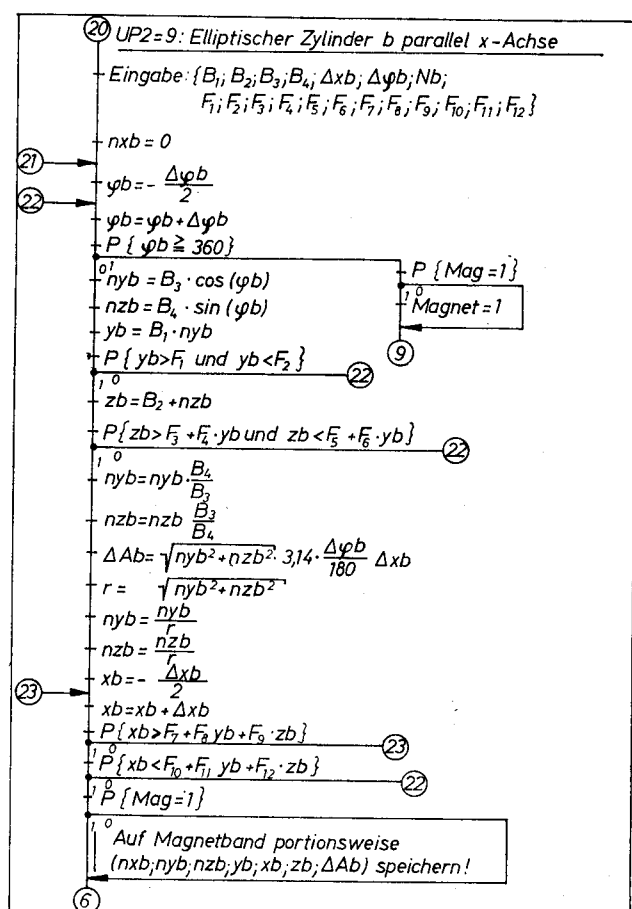
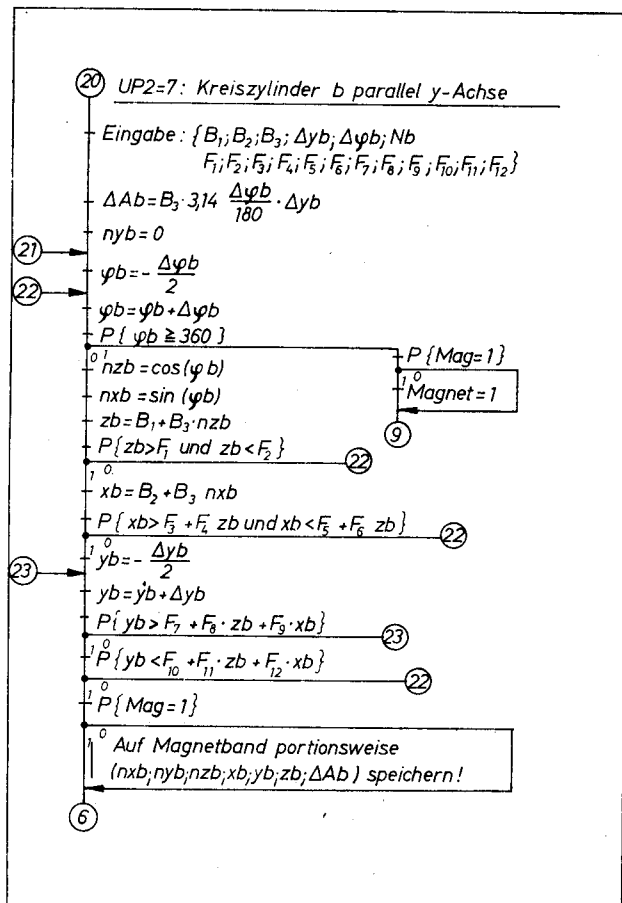
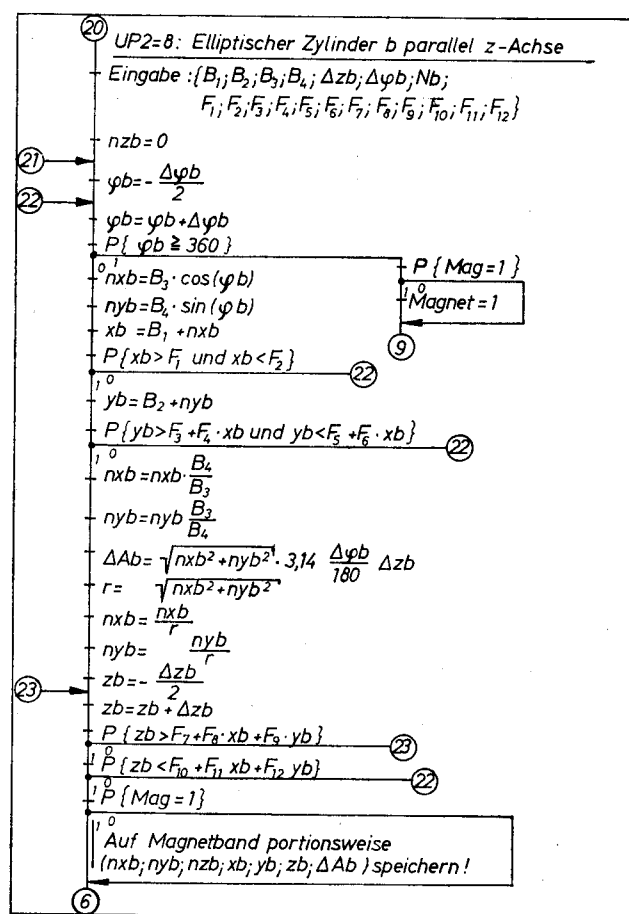
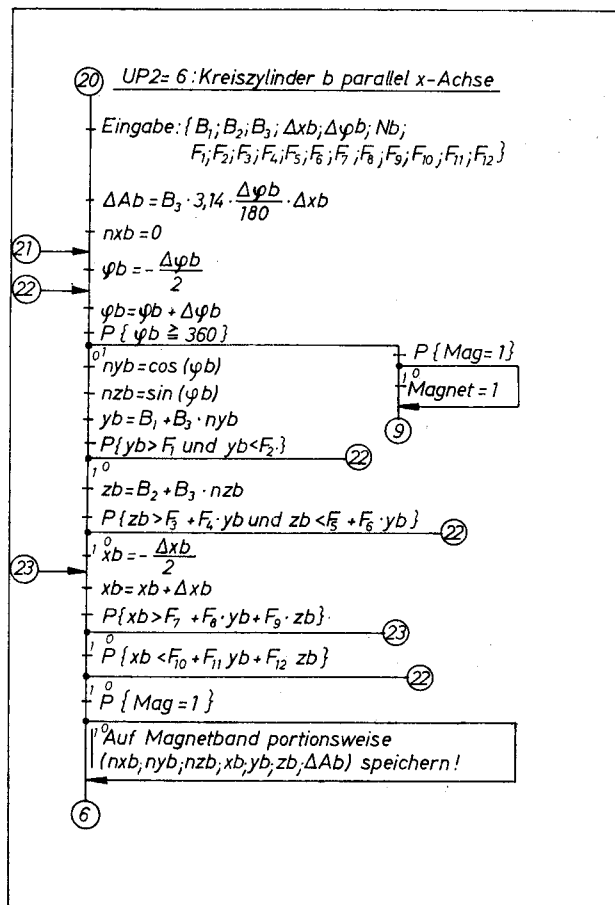


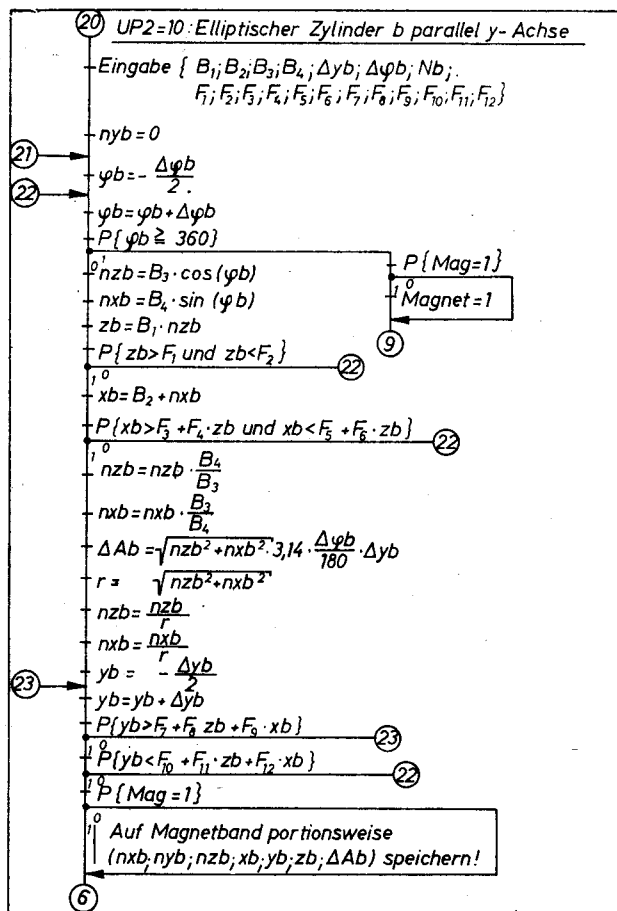












5.4.5.3. Ausgabewerte

Zur Kontrolle werden alle Eingabewerte in übersichtlicher Form ausgedruckt. Die eigentlichen Ergebnisse beschränken sich auf

Φ_{ab}, φ_{ab}	Einstrahlzahl
Aa	Flächeninhalt von A
Ab	Flächeninhalt von B
	Die errechnete Flächeneinheit entspricht dem Quadrat der eingegebenen Längeneinheit, das heißt, werden die Längen in m eingegeben, so erfolgt die Ausgabe der Fläche in m ² .

5.4.5.4. Anwendungsbeispiele

Wegen der unmittelbaren Anschaulichkeit wird auf die komplette Wiedergabe eines Anwendungsbeispiels verzichtet. Statt dessen werden nachfolgend berechnete Beispiele zusammengestellt (Bilder 5.4.-11 bis 5.4.-18).

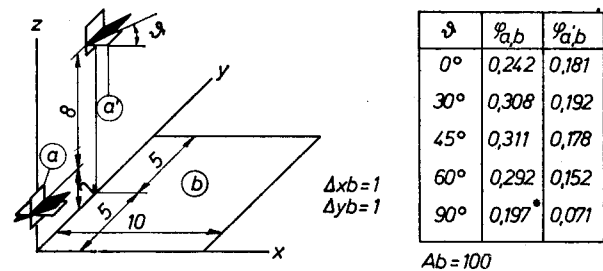


Bild 5.4.-11
Einstrahlzahl eines Flächenelementes a auf eine Rechteckfläche b bei verschiedenen Neigungswinkeln

Die Aufgabe * wurde bei veränderten Schrittweiten wiederholt:

Variante	$\Delta xb = \Delta yb$	φ_{ab}
1	0,5	0,195
2	1,0	0,197
3	2,0	0,207

Der exakte Wert beträgt $\varphi_{a,b} = 0,194$. Daraus ist ersichtlich, daß eine Vergrößerung der Schrittweite von 0,5 auf 2 eine Ungenauigkeit von etwa 6% zur Folge hat. Die Rechenzeit verringert sich auf 1/16.

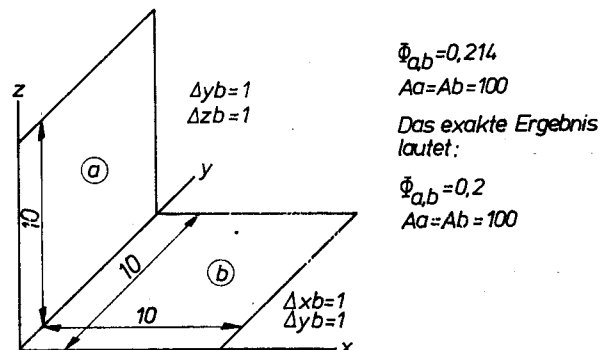
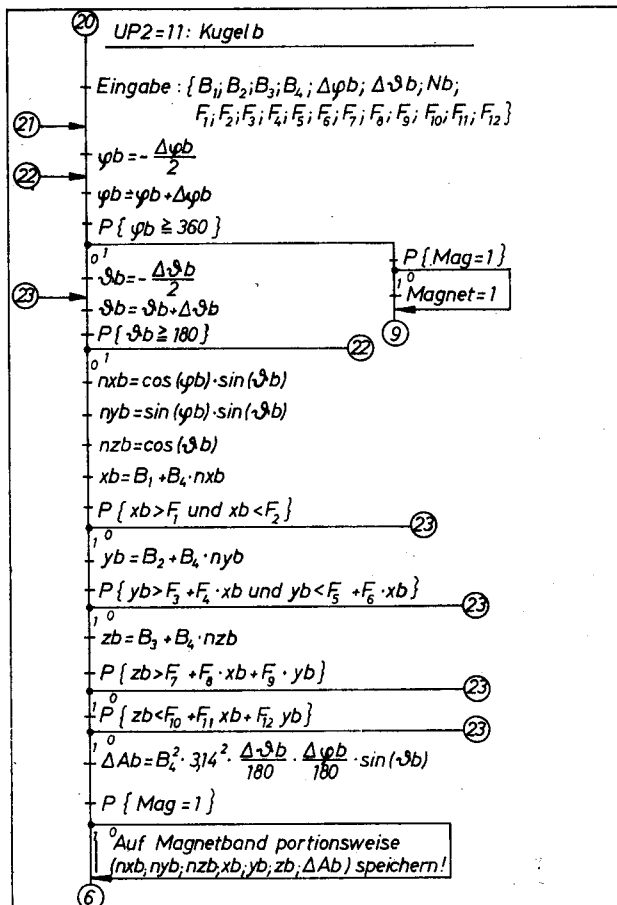


Bild 5.4.-12
Einstrahlzahl einer Fläche a auf eine Fläche b



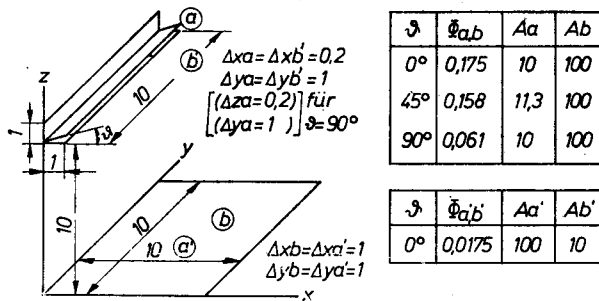


Bild 5.4.-13

Einstrahlzahl einer Fläche a auf eine Fläche b und deren Umkehrung bei verschiedenen Neigungswinkeln

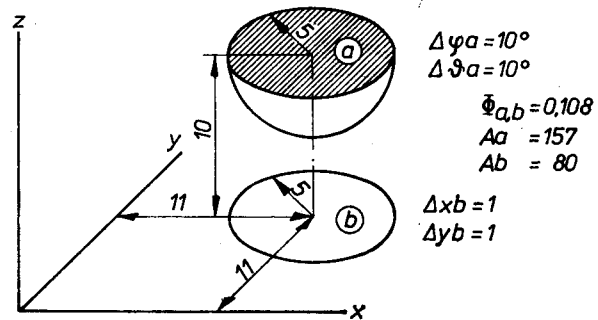


Bild 5.4.-16

Einstrahlzahl einer Kugel-Halbschale a auf eine Kreisfläche b

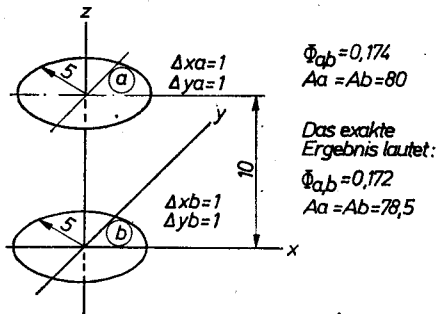


Bild 5.4.-14

Einstrahlzahl einer Kreisfläche a auf eine gleich große Kreisfläche b

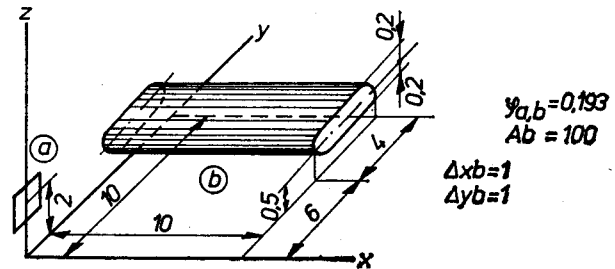


Bild 5.4.-17

Einstrahlzahl eines Flächenelementes a auf eine Rechteckfläche b unter Berücksichtigung eines schattenerzeugenden Bauteiles

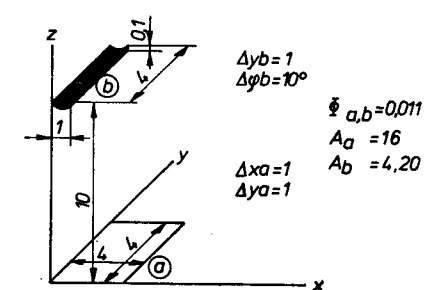
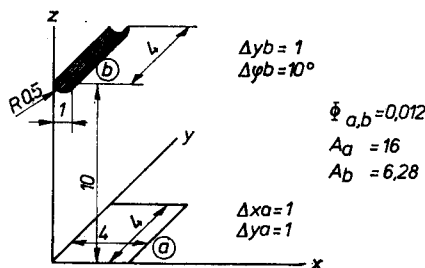
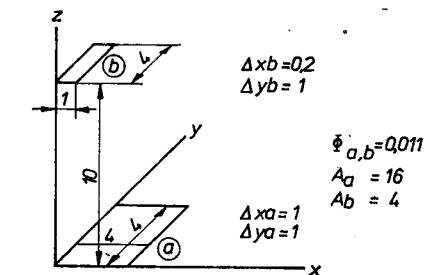


Bild 5.4.-15

Vergleich der Einstrahlzahlen zwischen einer Rechteckfläche a auf eine Rechteckfläche b, einer Kreiszyylinder-Halbschale b und einer elliptischen Zylinder-Halbschale b, die gleiche Projektionsflächen auf der Rechteckfläche a erzeugen

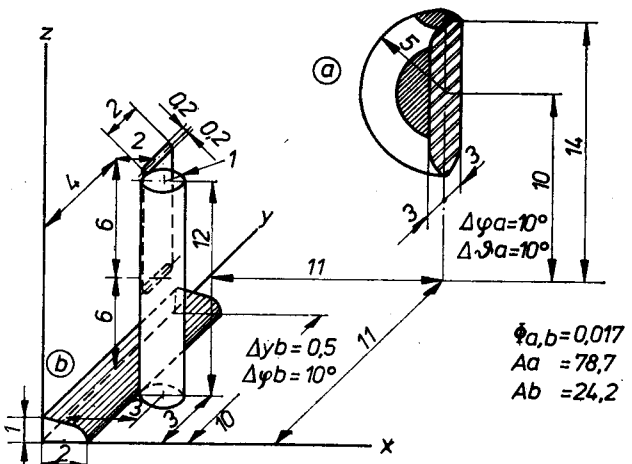


Bild 5.4.-18

Einstrahlzahl eines Teiles einer Kugeloberfläche a auf einen Abschnitt eines elliptischen Zylindermantels b unter Berücksichtigung von zwei schattenerzeugenden Bauteilen

5.5. Ergebnisse berechneter Einstrahlzahlen

Für die am häufigsten benötigten Standardfunktionen des Abschnittes 5.3.3. wurden zahlreiche Einstrahlzahlen berechnet und Diagramme aufgezeichnet. Weiterhin sind speziell für Strahlplatten der praktisch üblichen Abmessungen 1 m × 4 m und 1 m × 6 m mit Hilfe des im Abschnitt 5.4.5. vorgestellten Rechenprogramms zahlreiche Diagramme aufgestellt worden. Die Strahlplatten sind dabei parallel, senkrecht sowie unter 45° angeordnet. Sollten in Ausnahmefällen nicht berechnete Schräglagen der Platten vorkommen, so ist mit den gegebenen Werten eine Umrechnung auf jede beliebige Neigung mit Gl. (5.3.-39) möglich.

Für die eindeutige Fixierung der geometrischen Lage der Mitte der Strahlplatten wurde ein rechtwinkliges Koordinatensystem benutzt. Im Ursprungspunkt befindet sich jeweils das infinitesimal kleine Flächenelement oder kugelförmige Element. Auf der Abszisse ist der Abstand Y der Strahlplatte in y -Richtung aufgetragen, während der Abstand in x -Richtung durch entsprechende Parameterkurven X im doppellogarithmischen Netz dargestellt wird (Ausnahme: zwischen $Y = 0 \dots 2$ m lineare Teilung).

Die Kurven wurden punktweise für annähernd geometrisch abgestufte X und Y mit 0; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 36; 50 m errechnet. Da im Falle senkrecht stehender Strahlplatten bei Anordnung $X = Y = 0$ m kein Strahlungsaustausch mit dem darunterliegenden Element auftritt, wurden für diese Diagramme nur Werte $X \geq 0$ m und $Y \geq 1$ m gewählt.

Für die z -Koordinate, die die mittlere Höhe der Strahlplatte über dem Flächenelement symbolisiert, wurden die Werte 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16 m festgelegt und dafür jeweils ein gesondertes Diagramm aufgestellt. Damit ist die Interpolation von Zwischenwerten im x, y -Bereich ohne jegliche manuelle Rechnung möglich. Für Zwischenwerte in bezug auf die z -Koordinate ist die Ablesung in zwei Diagrammen erforderlich mit anschließender Interpolation. In der Praxis genügt jedoch allgemein eine Abschätzung mit den jeweils ungünstigeren Werten.

Bezüglich der Berechnungsgrundlagen sind noch die gewählten Schrittweiten mitzuteilen:

Platte parallel der x, y -Ebene

$$\Delta x_b = 0,5 \text{ m}; \quad \Delta y_b = 0,2 \text{ m}$$

Platte parallel der x, z -Ebene

$$\Delta x_b = 0,5 \text{ m}; \quad \Delta z_b = 0,2 \text{ m}$$

Platte unter 45° zur x, y -Ebene

$$\Delta x_b = 0,5 \text{ m}; \quad \Delta y_b = 0,1414 \text{ m}.$$

Die Wiedergabe der Einstrahlzahl wurde auf Werte $\varphi \geq 0,0001$ begrenzt.

5.5.1. Einstrahlzahlen von Flächenelementen auf Flächen

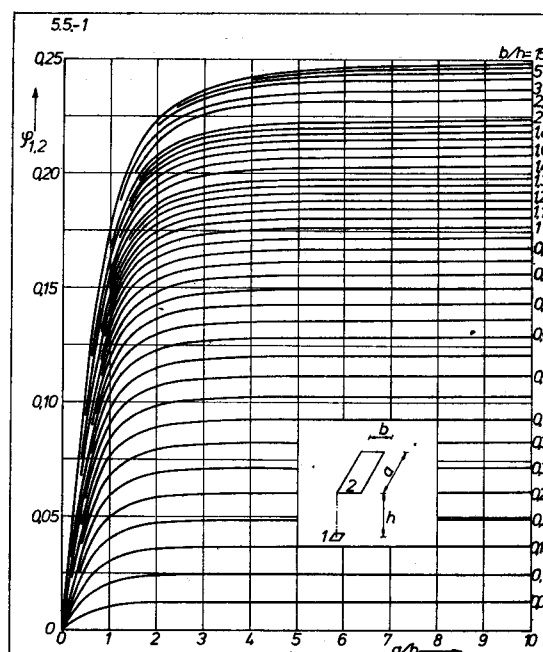


Bild 5.5.-1

Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu parallel liegende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-7); siehe auch Seite 500 (dA_1 unter Ecke A_1)

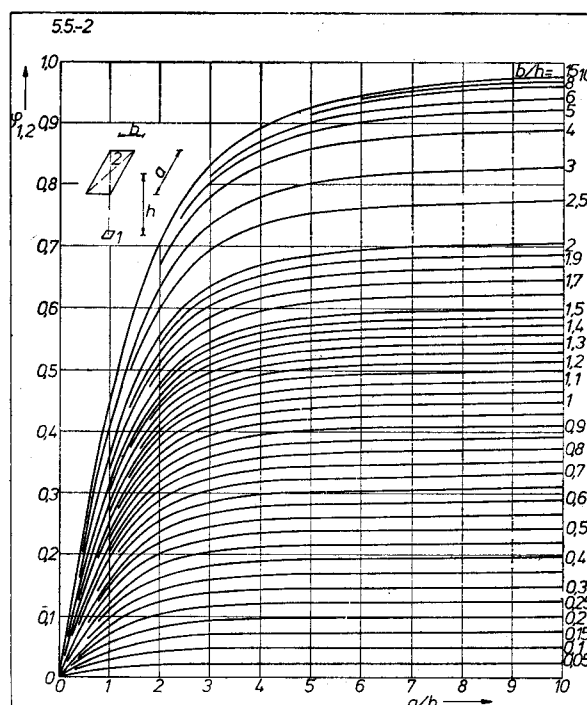


Bild 5.5.-2

Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu parallel liegende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-8); siehe auch Seite 500 (dA_1 unter Mitte A_1)

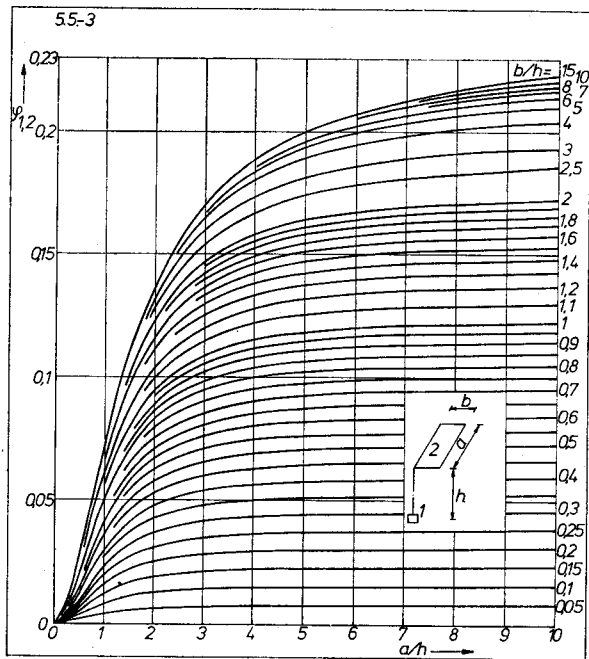


Bild 5.5.-3
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu senkrecht stehende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-9); siehe auch Seite 501
(dA₁ unter Ecke A₂ – Kante b)

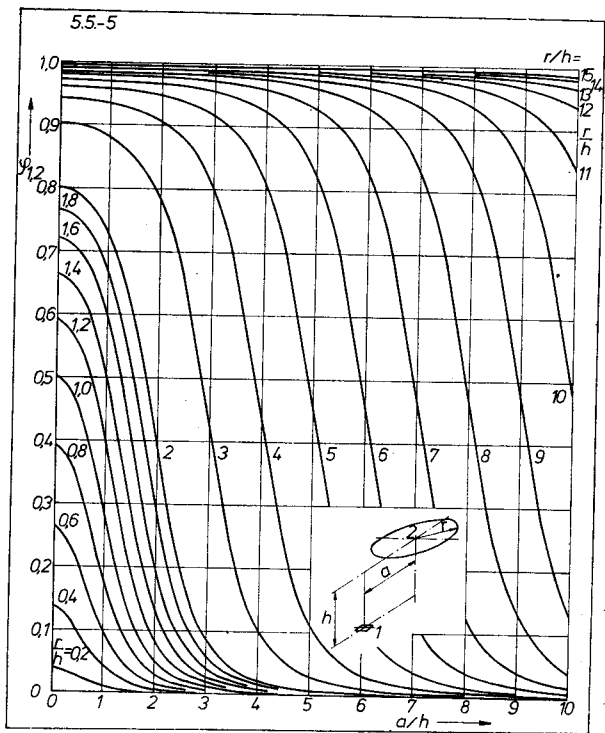


Bild 5.5.-5
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu parallel liegende Kreisfläche 2 nach Gl. (5.3.-12)
(dA₁ um \$a\$ von Mitte A₂ waagerecht versetzt)

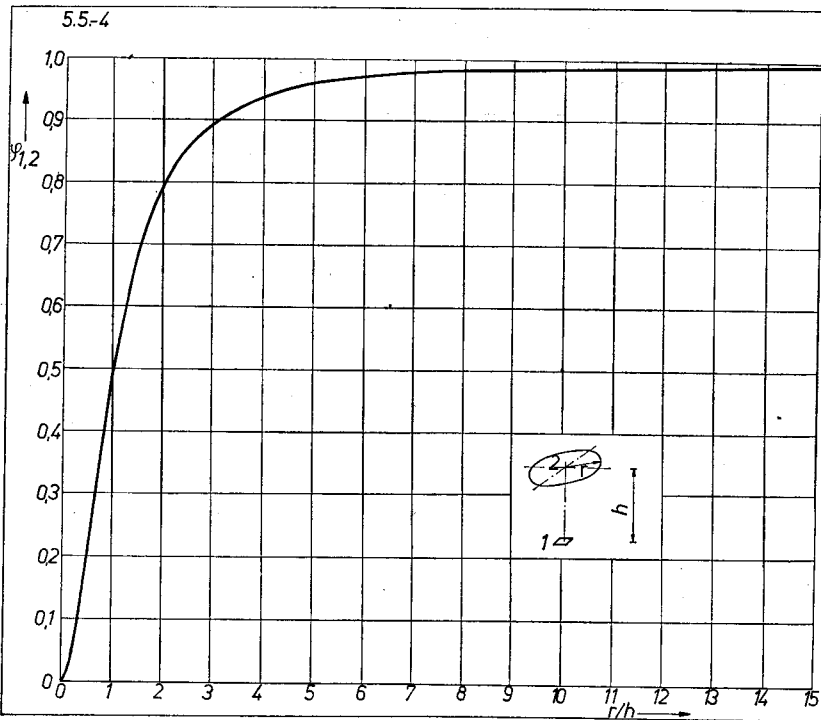
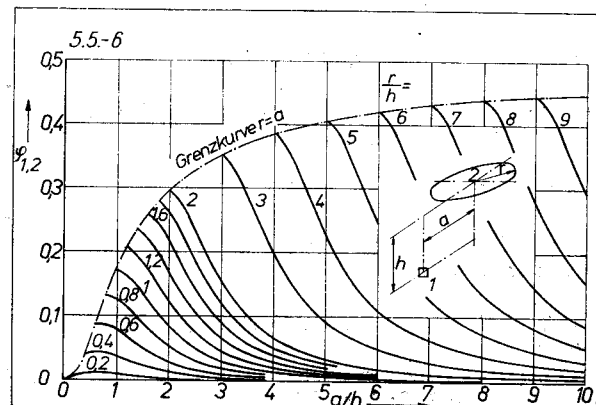


Bild 5.5.-4
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu parallel liegende Kreisfläche 2 nach Gl. (5.3.-11)
(dA₁ unter Mitte A₂)

Bild 5.5.-6
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu senkrecht stehende Kreisfläche 2 nach Gl. (5.3.-13)
(dA₁ um \$a\$ von Mitte A₂ waagerecht versetzt)



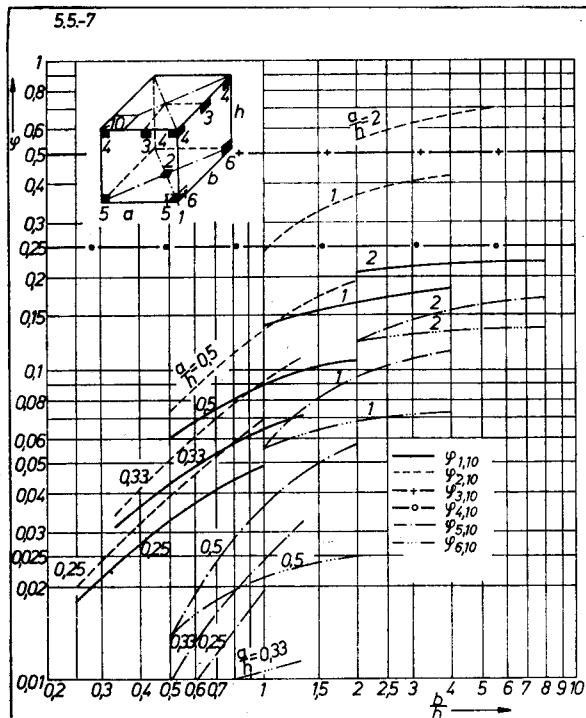
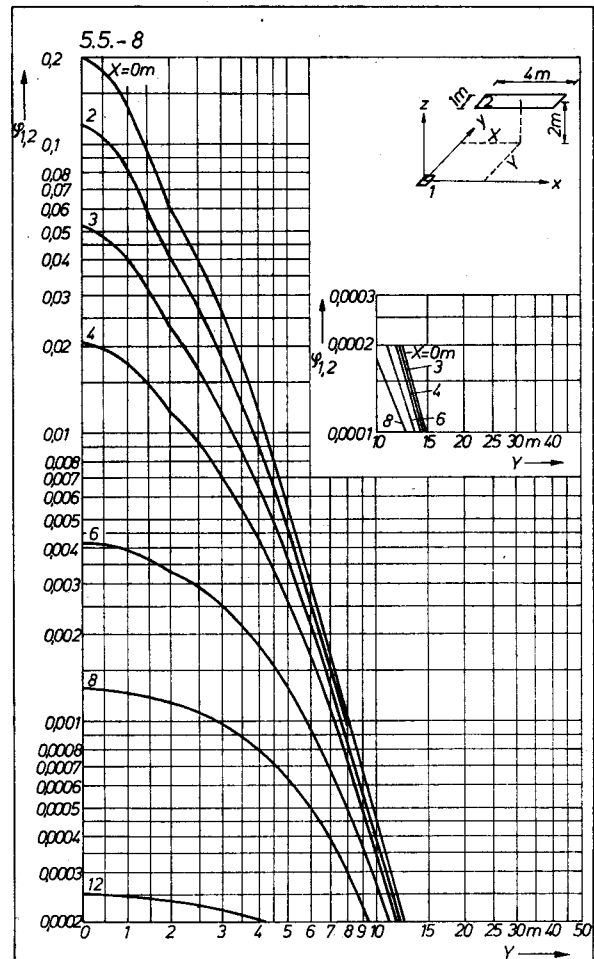


Bild 5.5.-7

Einstrahlzahlen von Flächenelementen 1 bis 6 auf dazu parallele oder senkrechte Rechteckfläche 10 eines Quaders nach Gl. (5.3.-7) und (5.3.-9)



Bildliste

Bild 5.5.-8 bis 5.5.-14 (S. 326 bis S. 328)

Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu waagerechte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 4\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-15 bis 5.5.-21 (S. 328 bis S. 329)

Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu senkrechte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 4\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-22 bis 5.5.-28 (S. 330 bis S. 331)

Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine unter 45° geneigte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 4\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-29 bis 5.5.-35 (S. 331 bis S. 333)

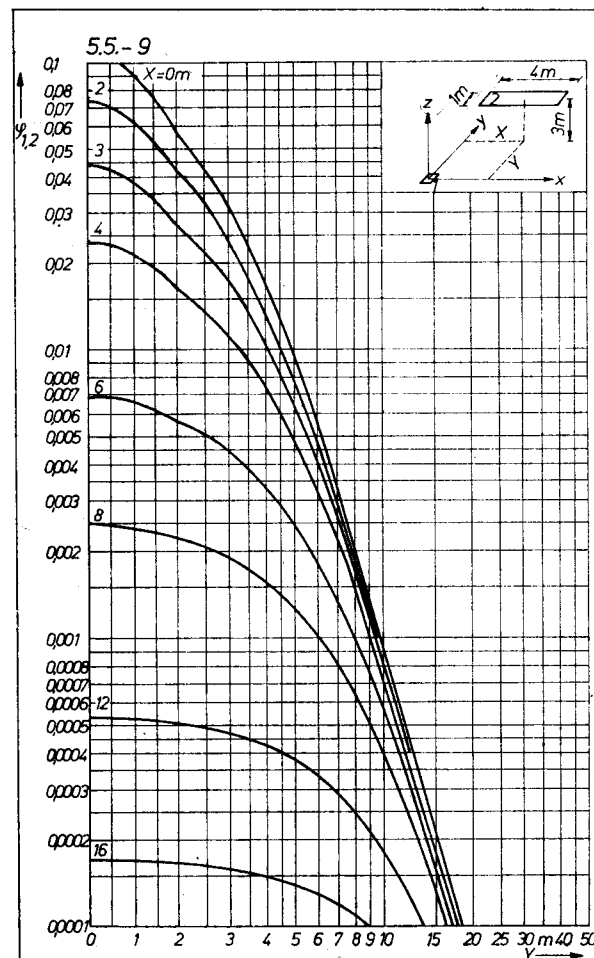
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu waagerechte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 6\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

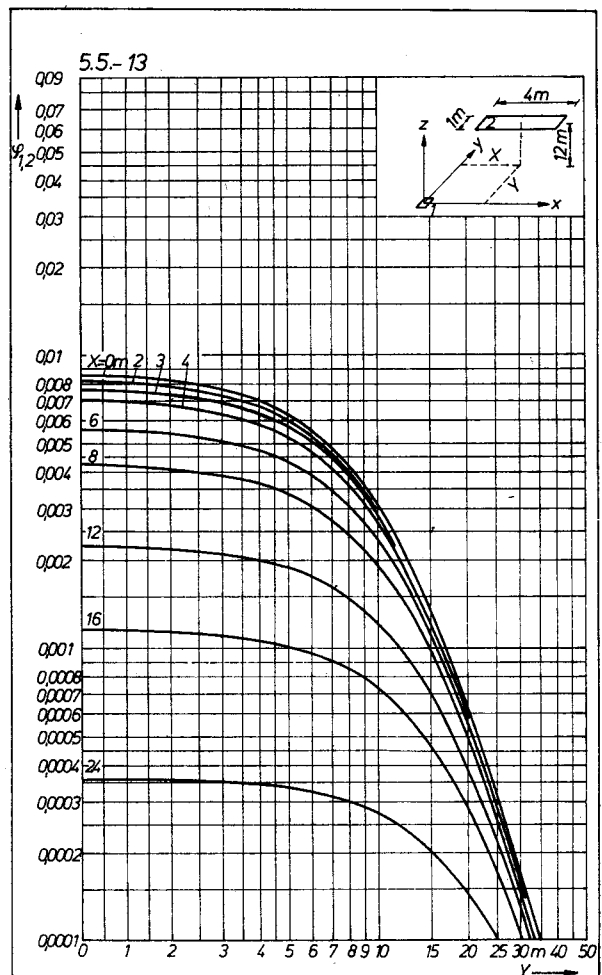
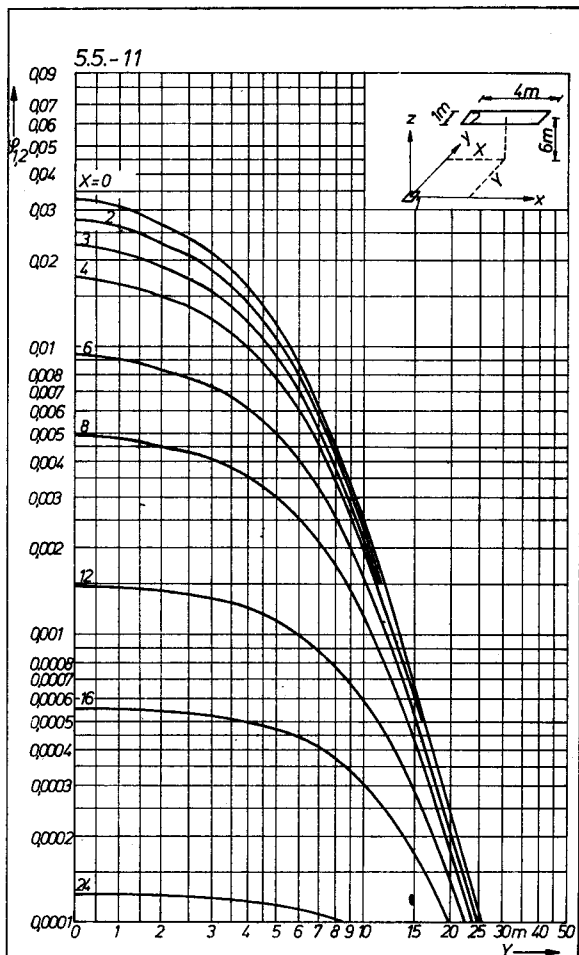
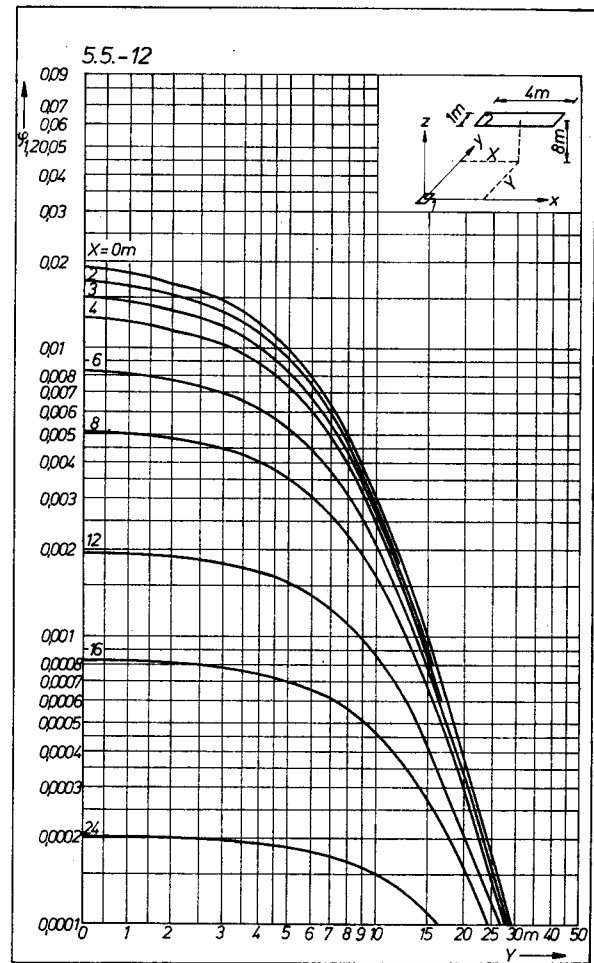
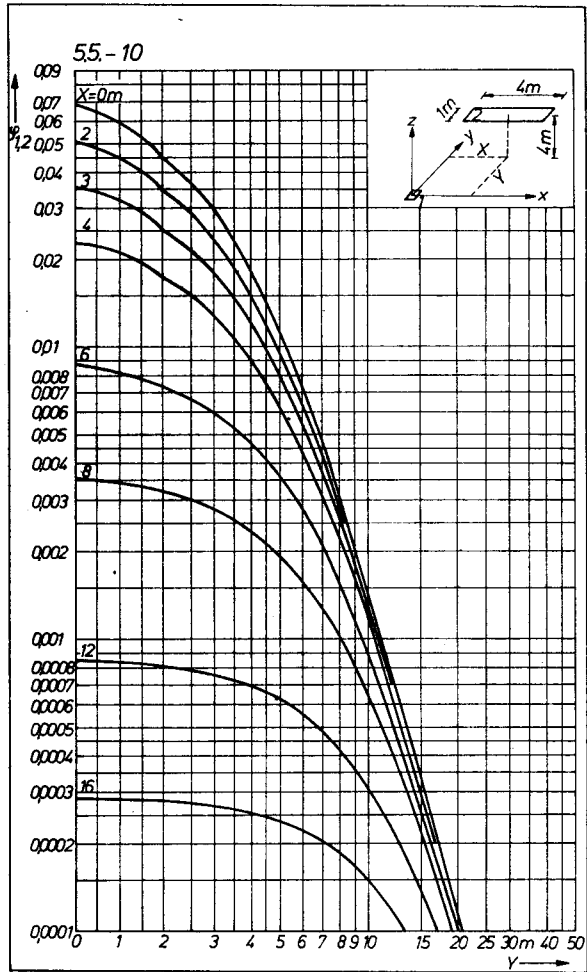
Bild 5.5.-36 bis 5.5.-42 (S. 333 bis S. 335)

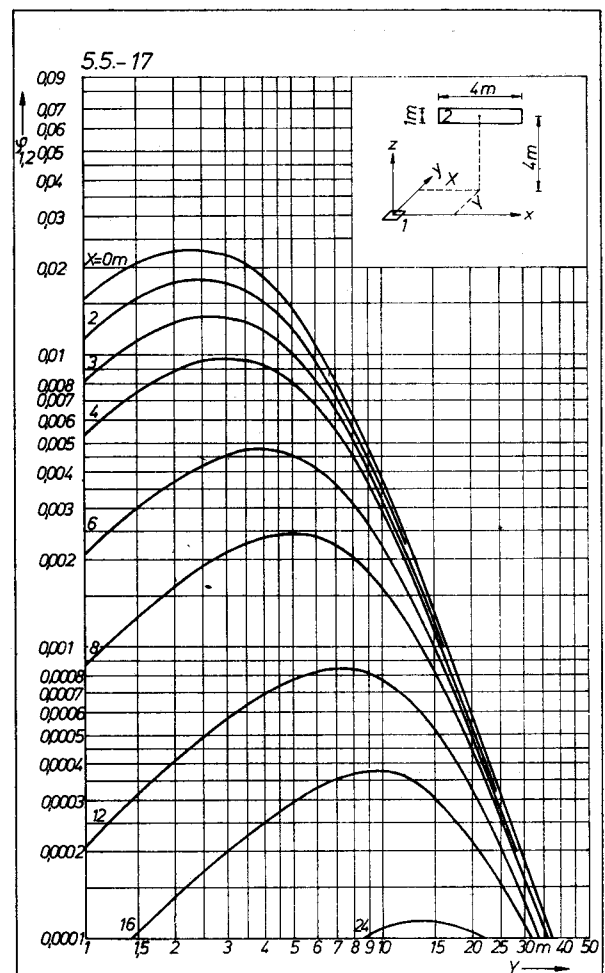
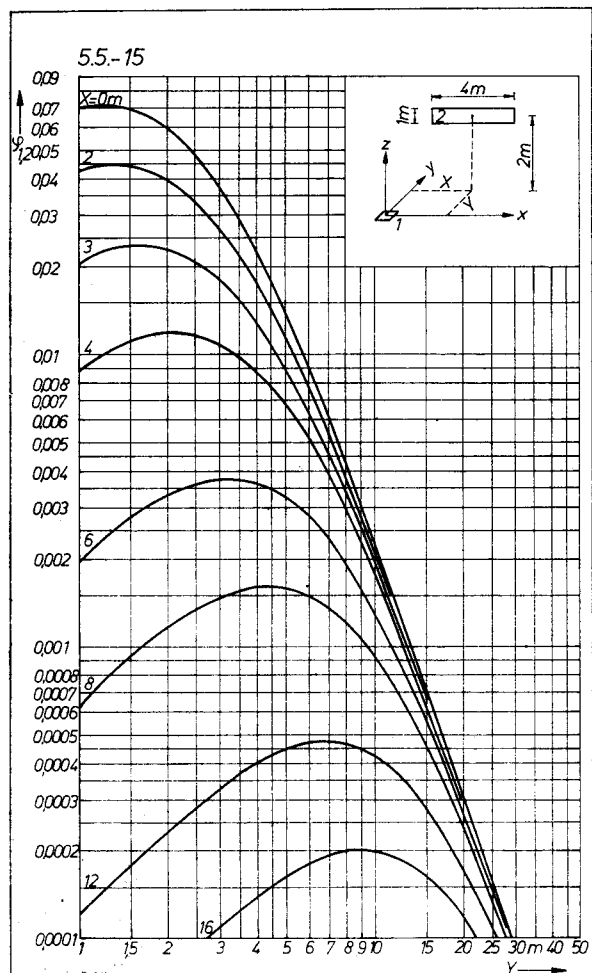
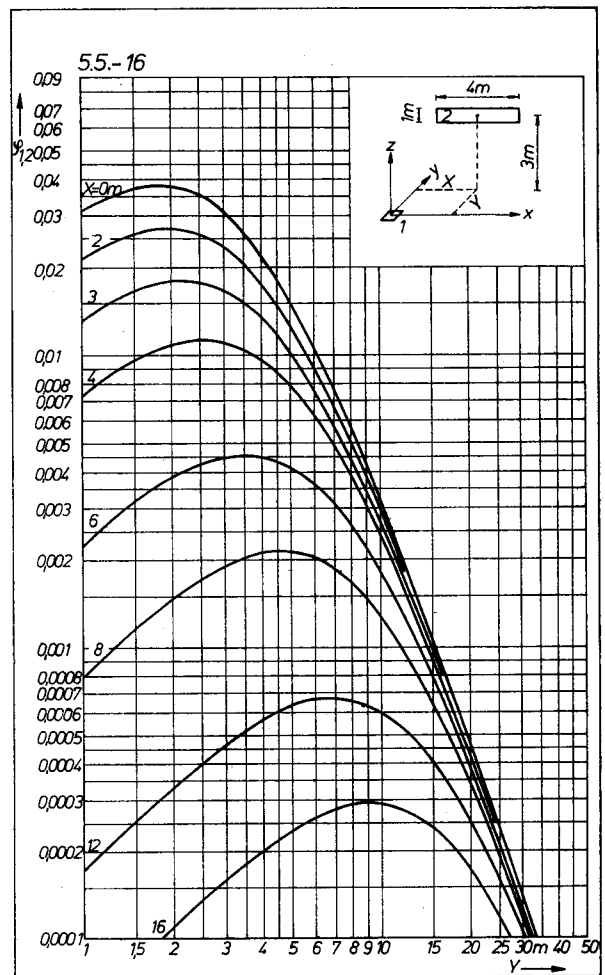
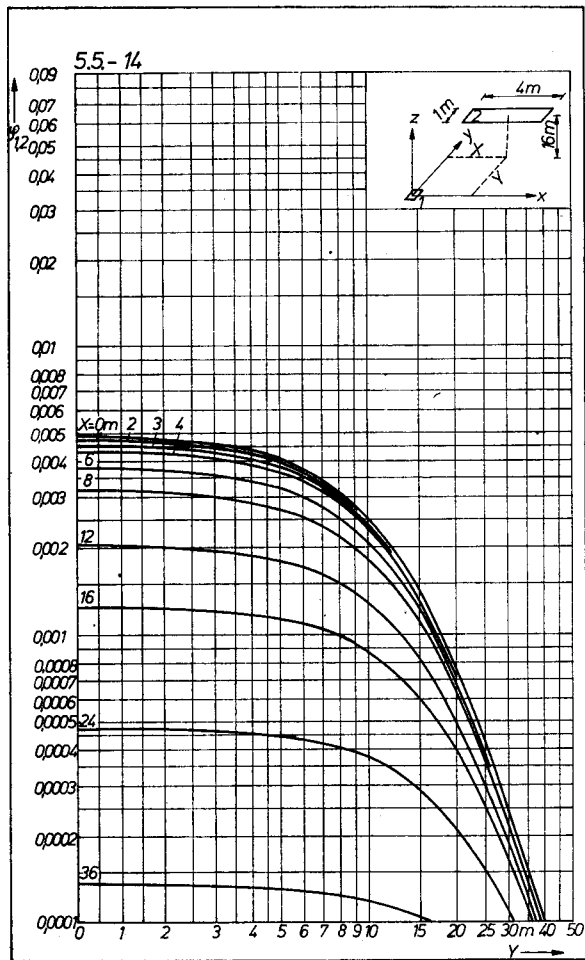
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine dazu senkrechte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 6\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

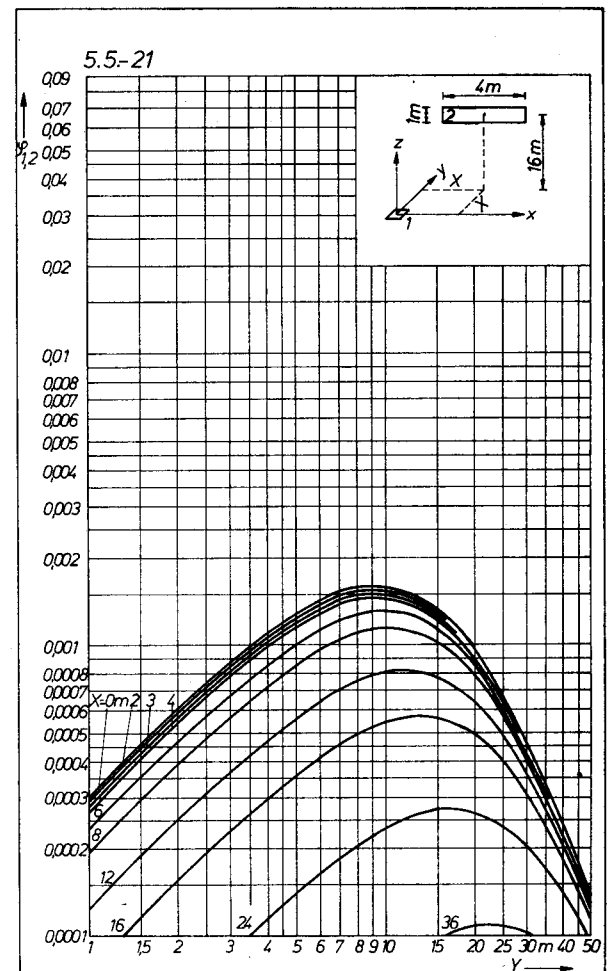
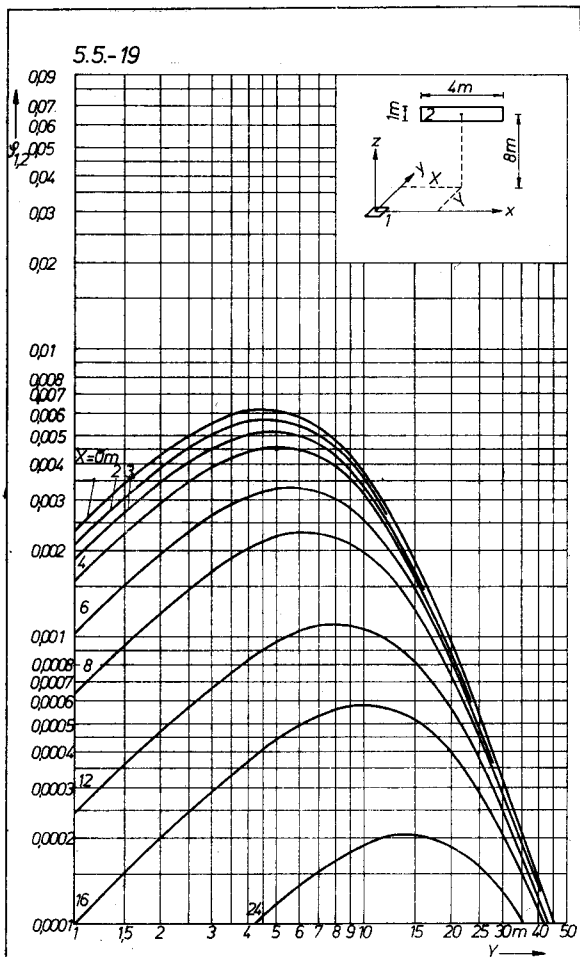
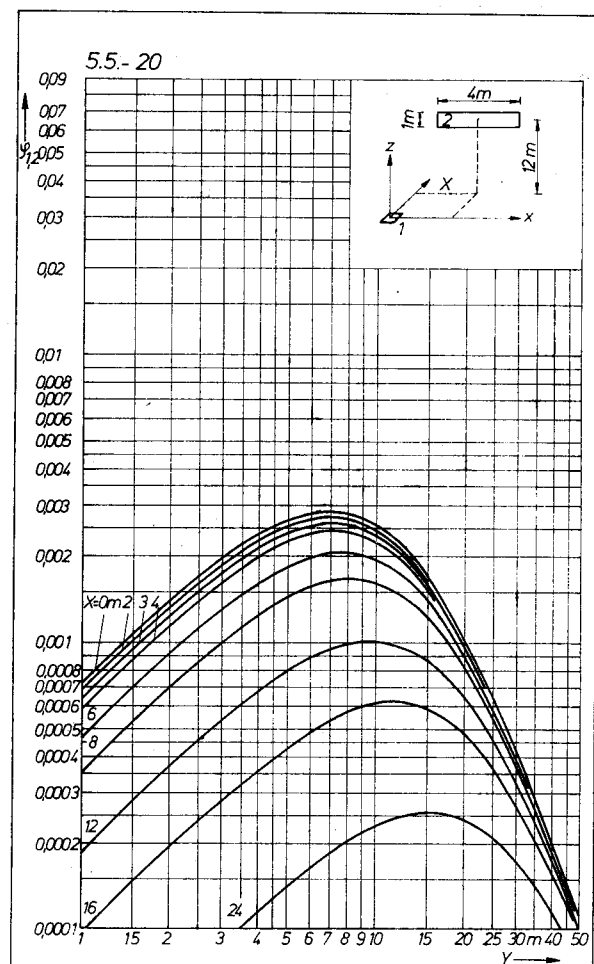
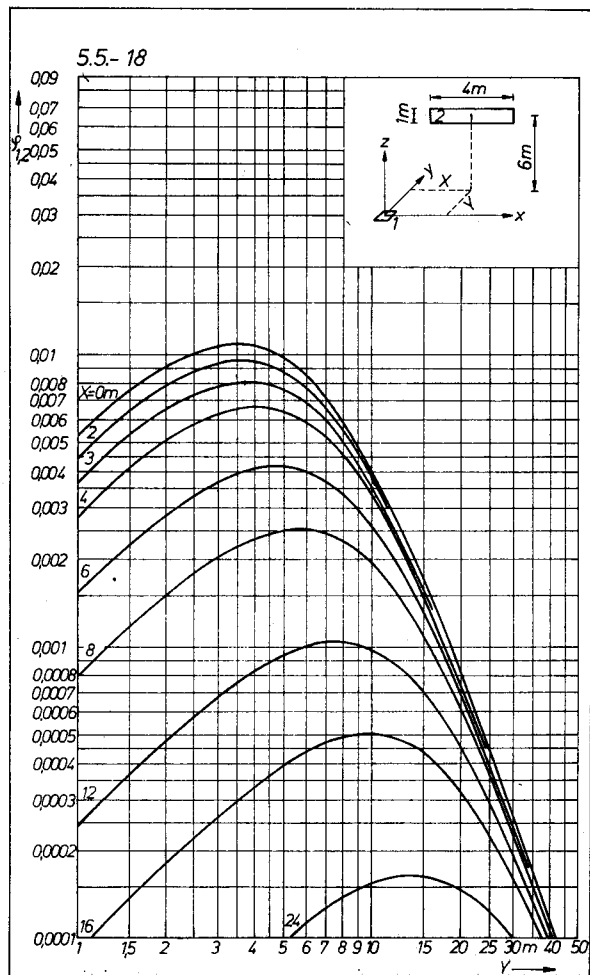
Bild 5.5.-43 bis 5.5.-49 (S. 335 bis S. 336)

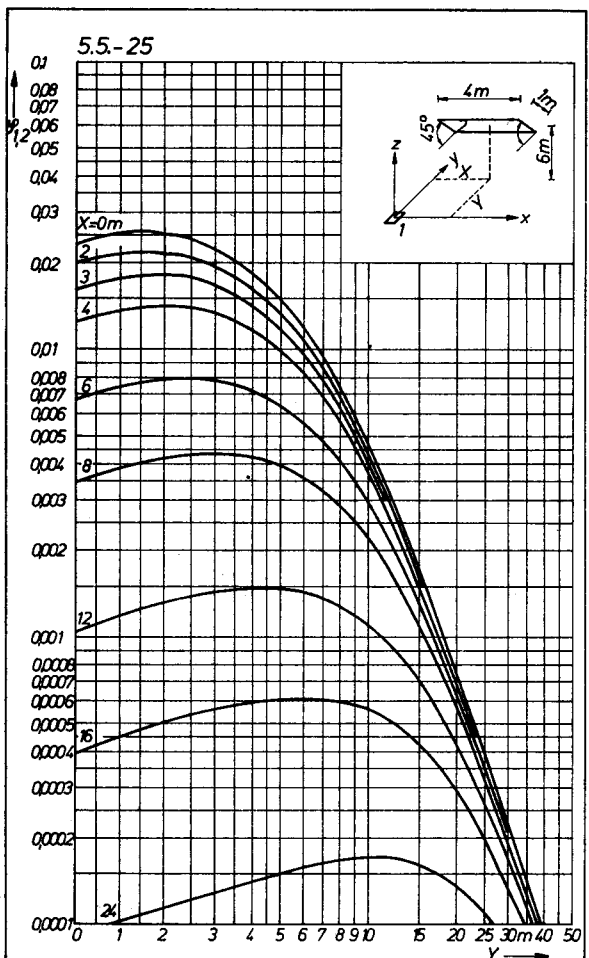
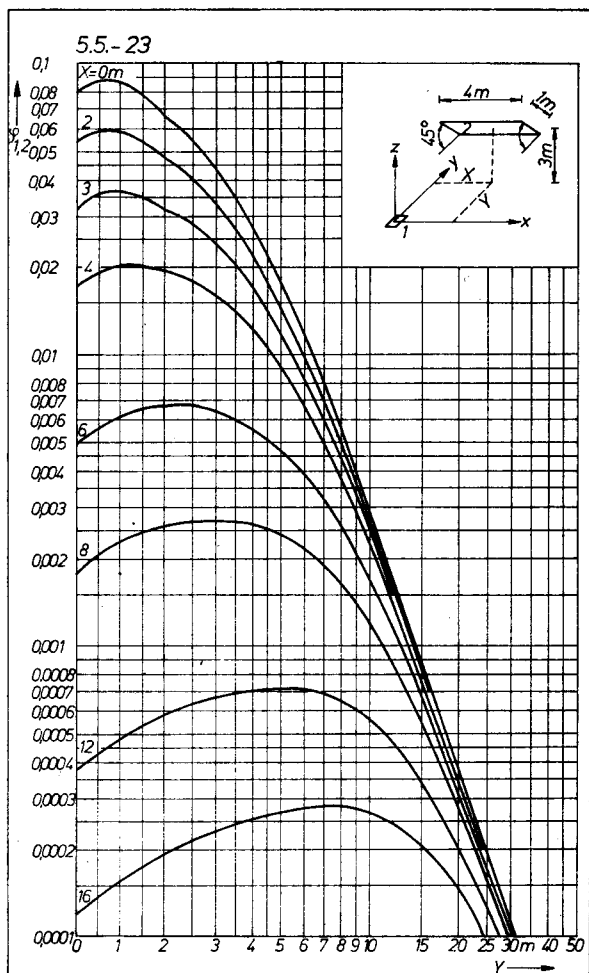
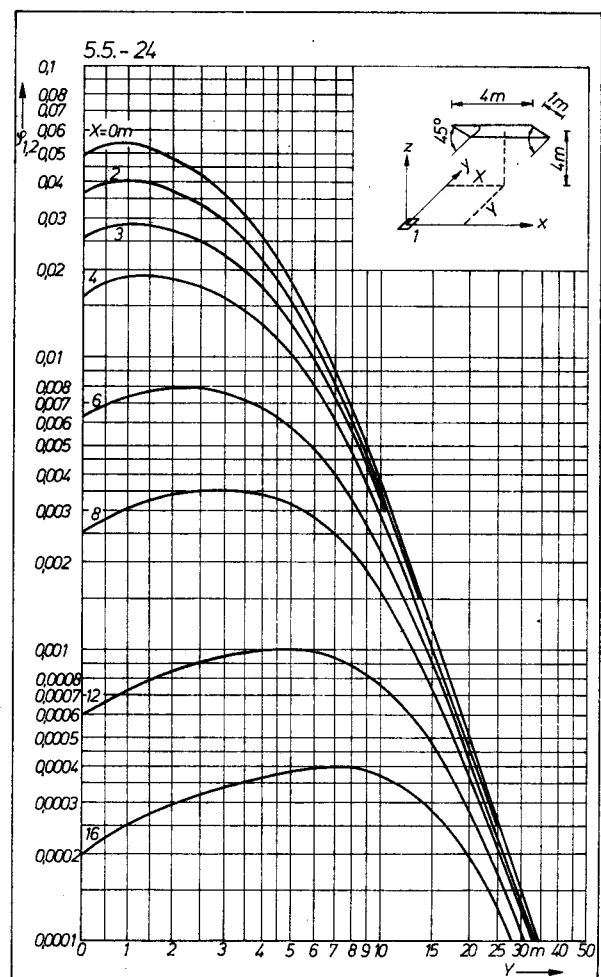
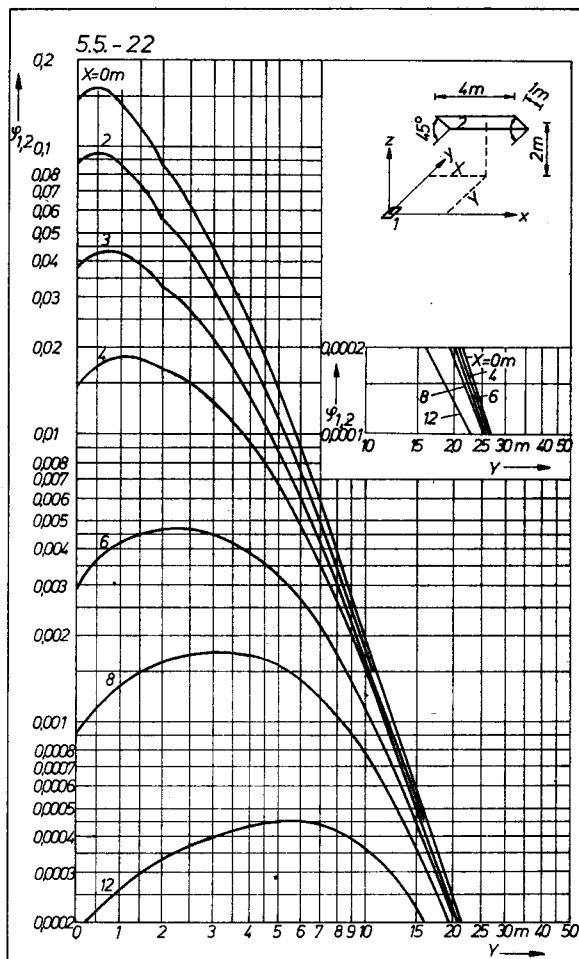
Einstrahlzahl eines Flächenelementes 1 auf eine unter 45° geneigte Strahlplatte 2 der Abmessungen $1\text{ m} \times 6\text{ m}$ bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

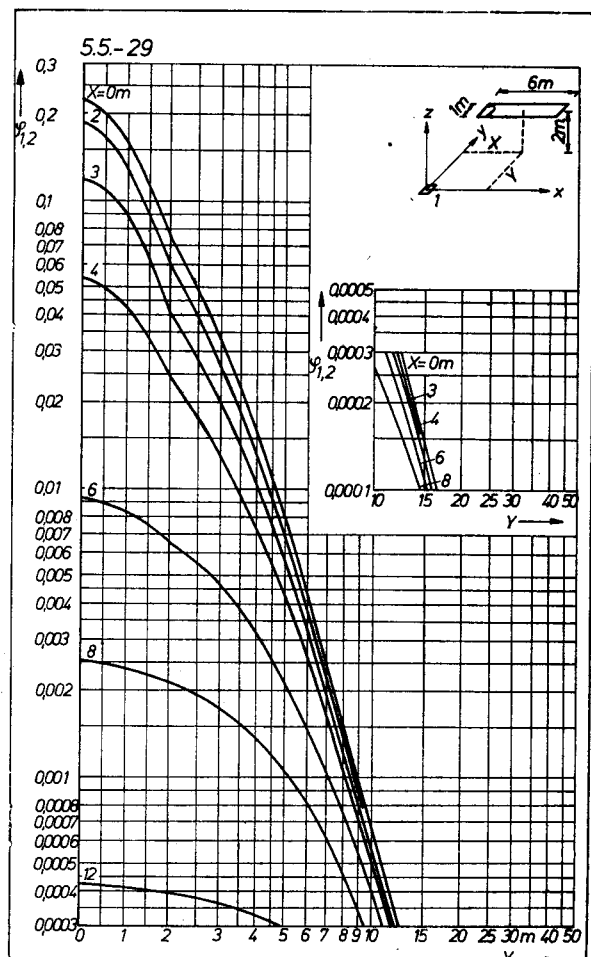
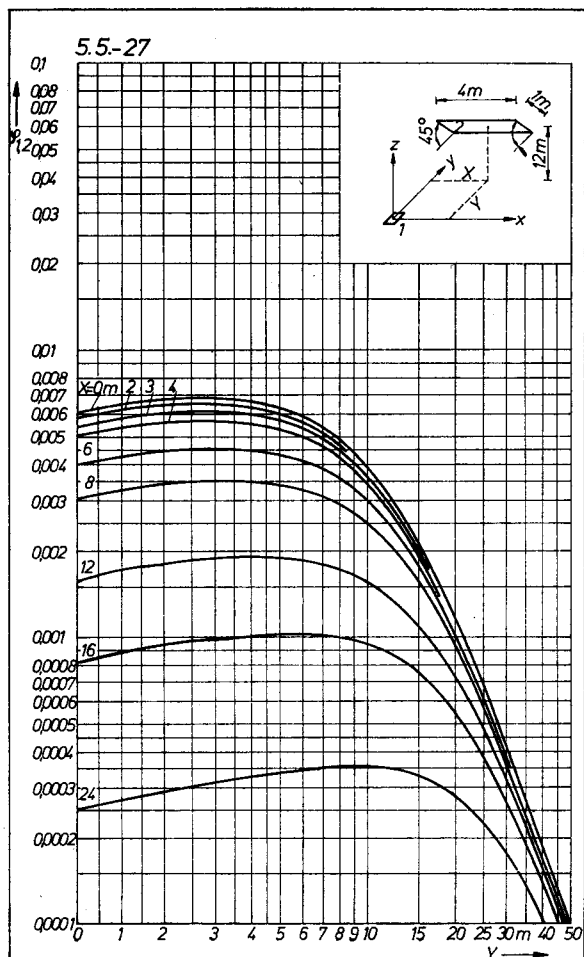
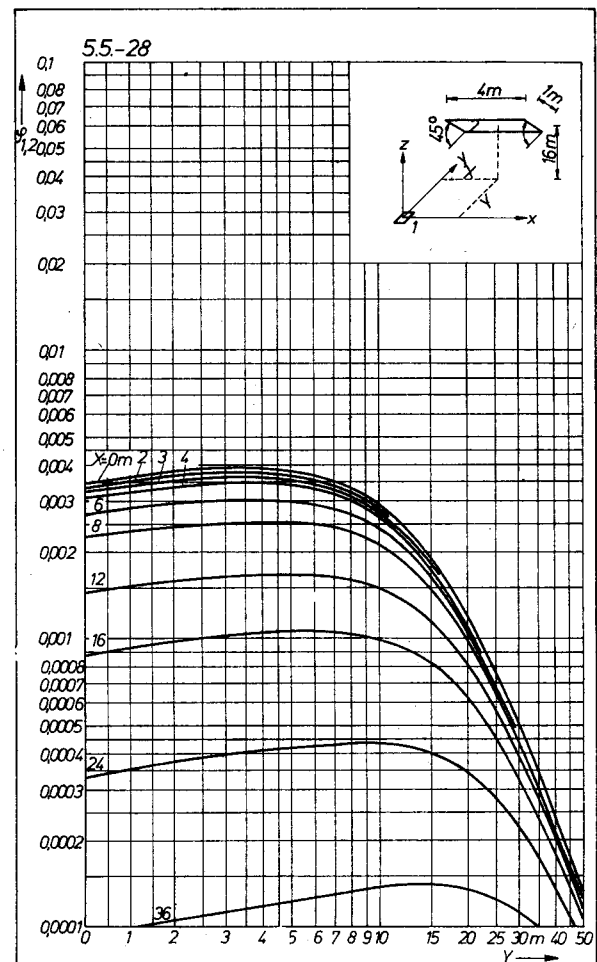
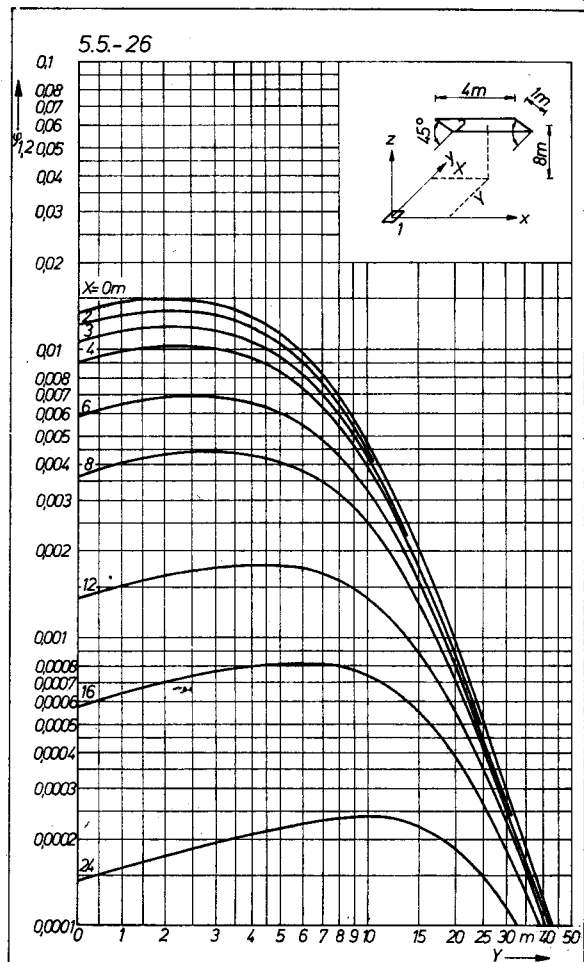


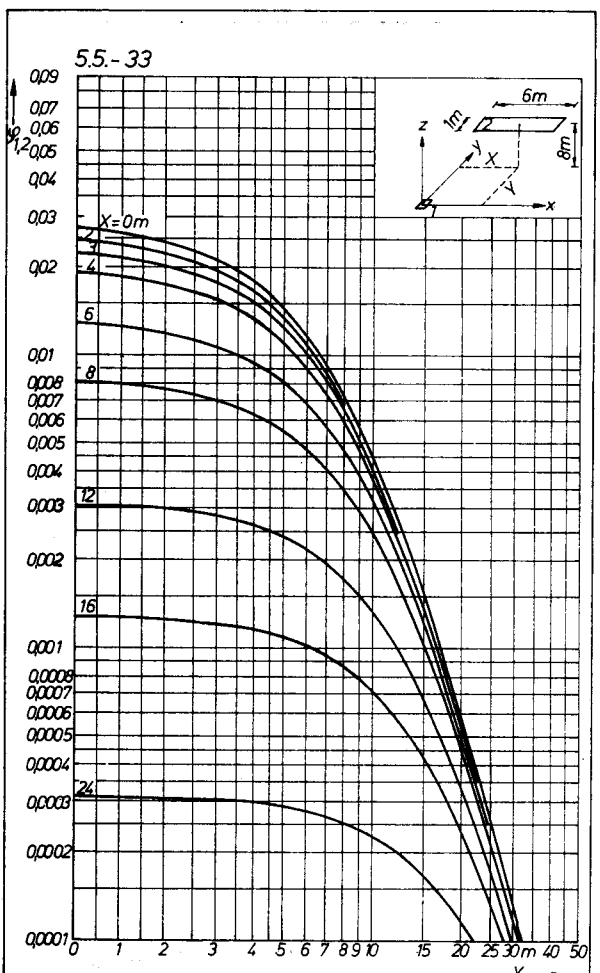
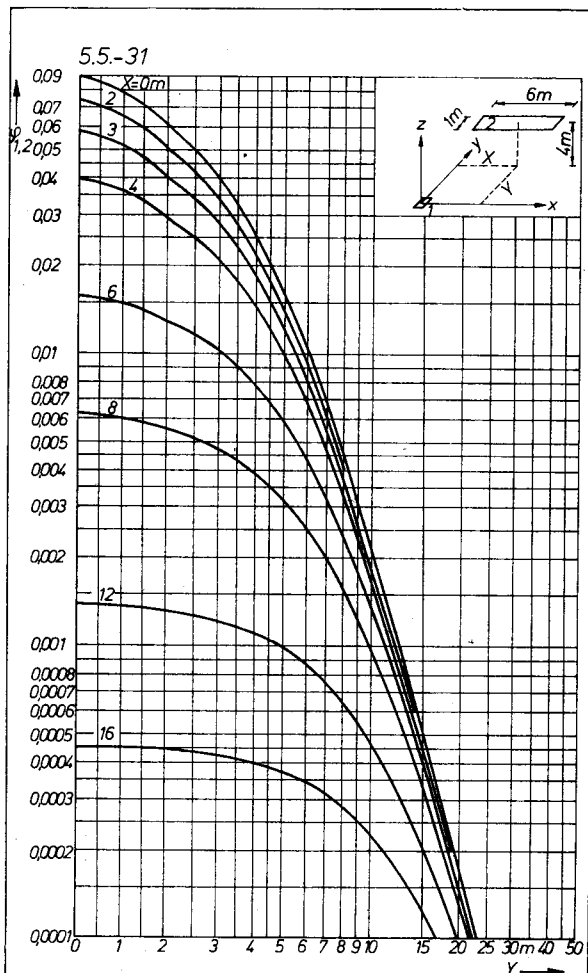
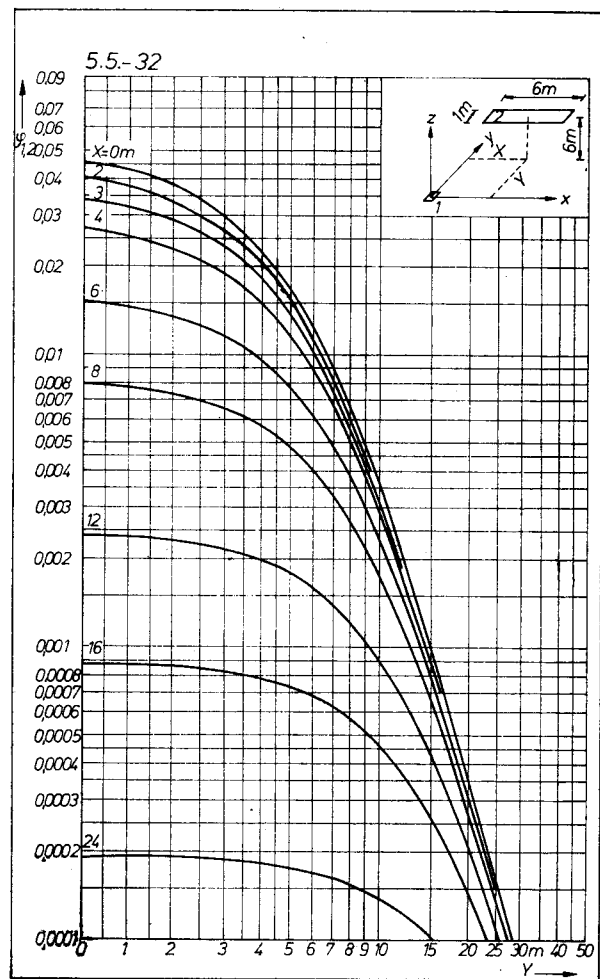
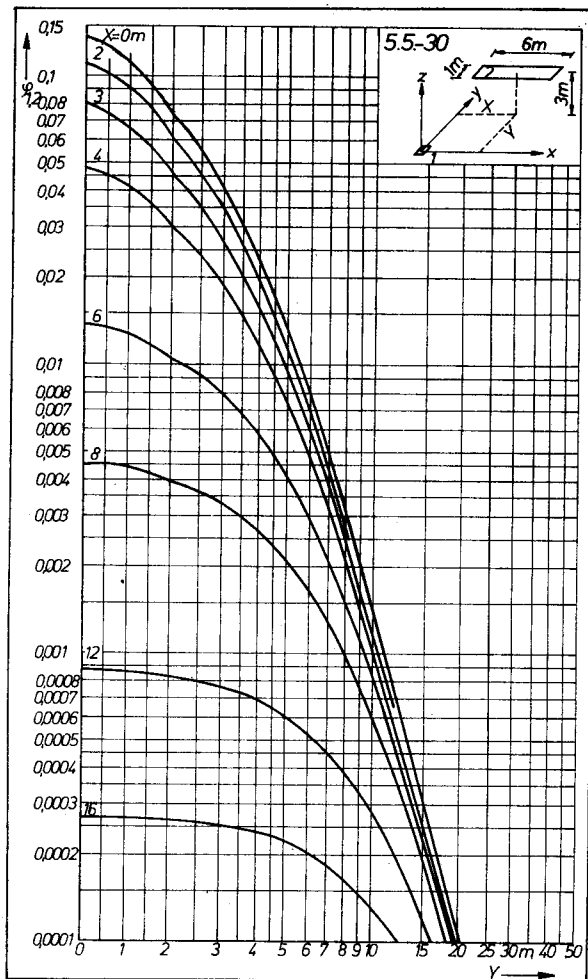


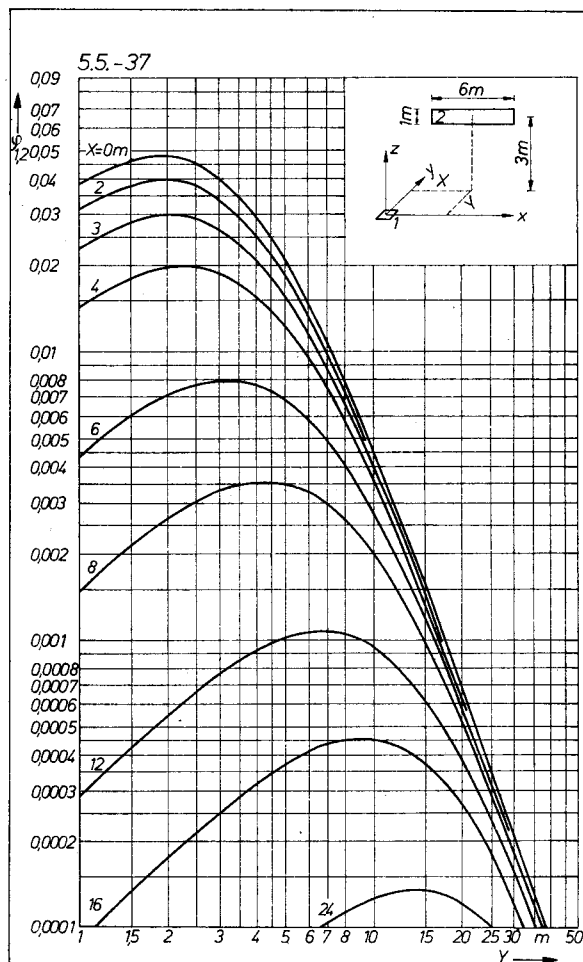
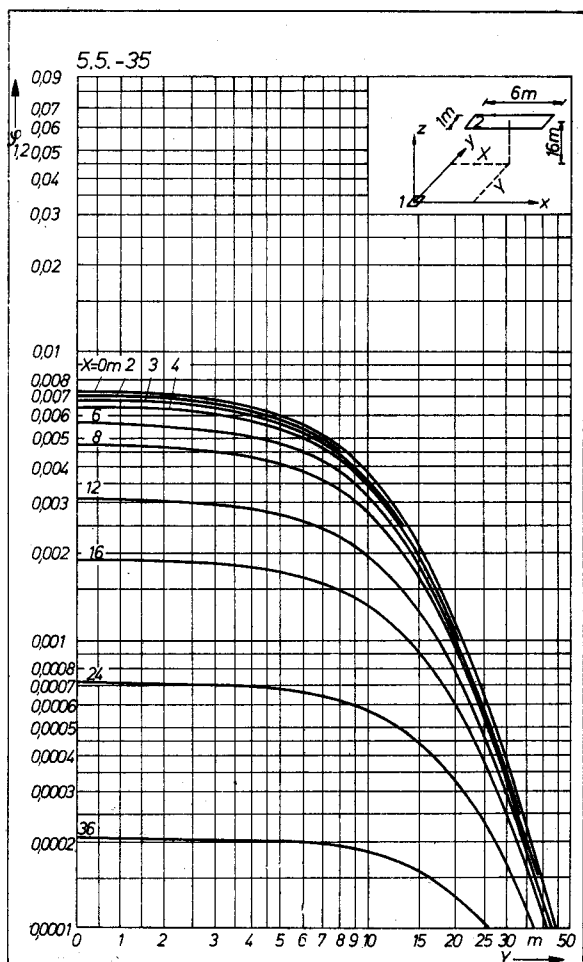
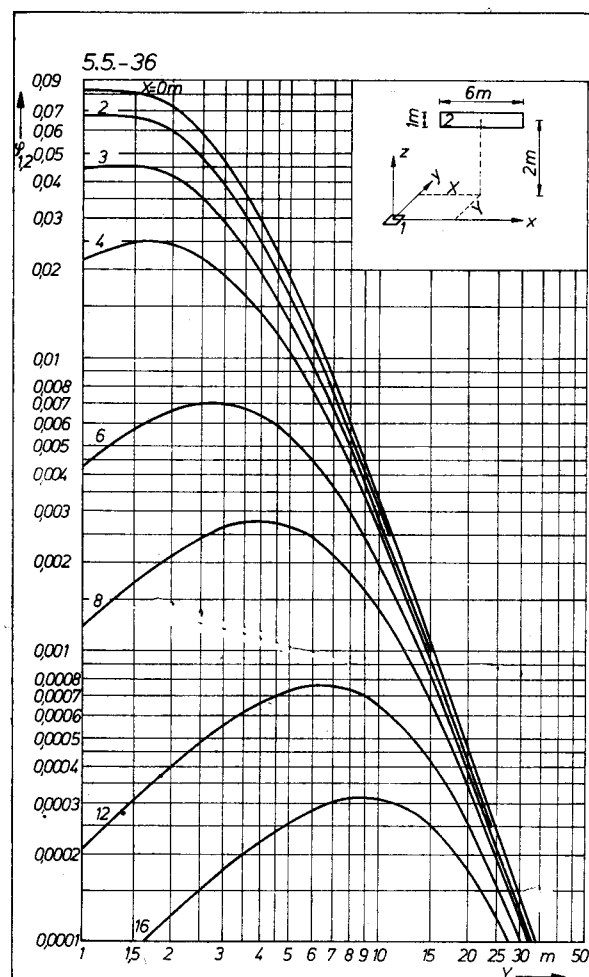
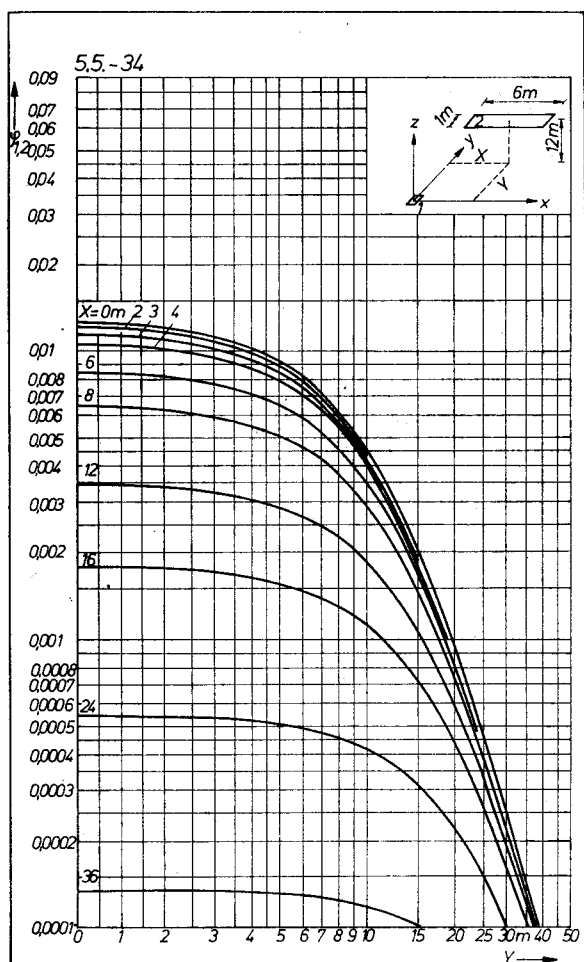


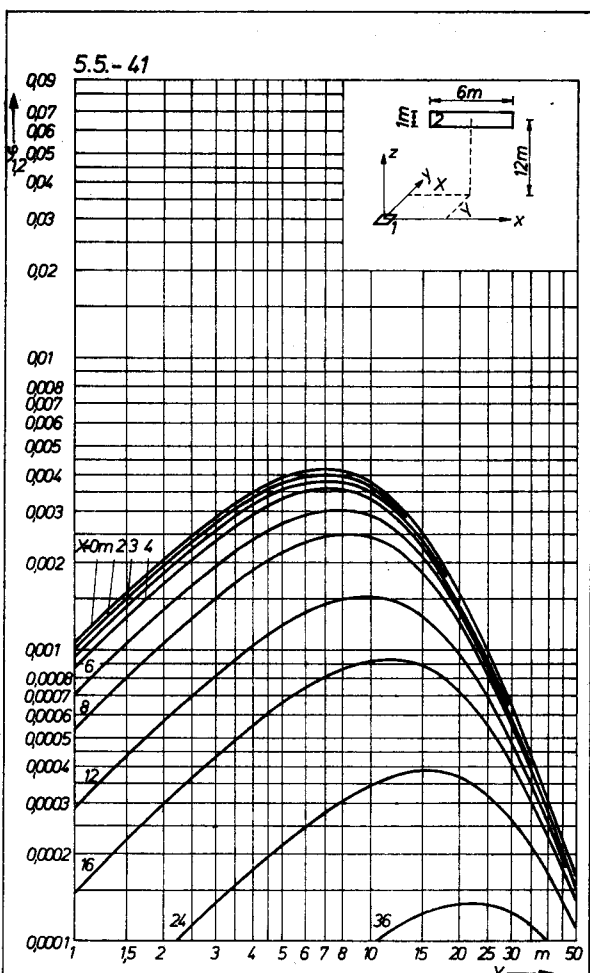
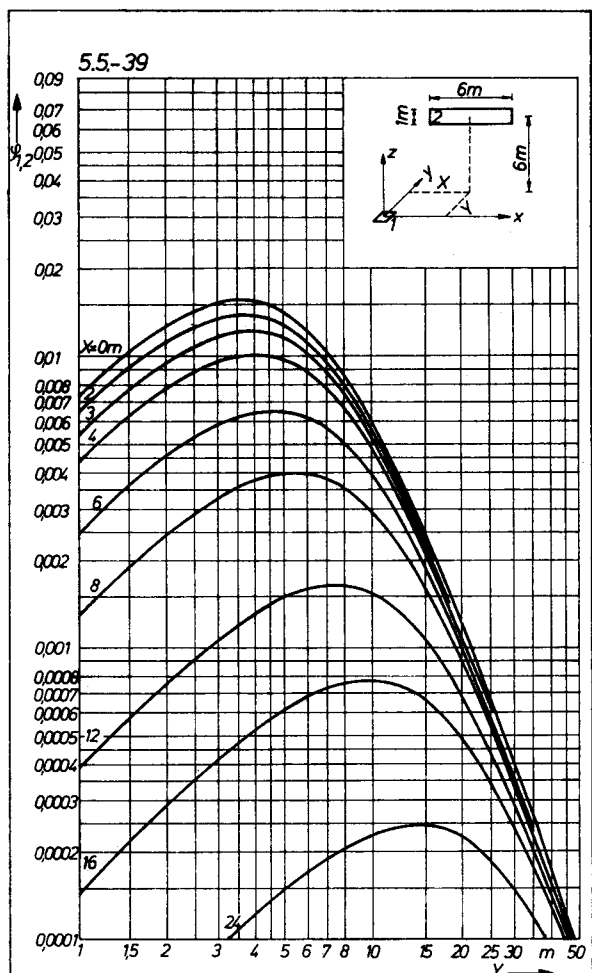
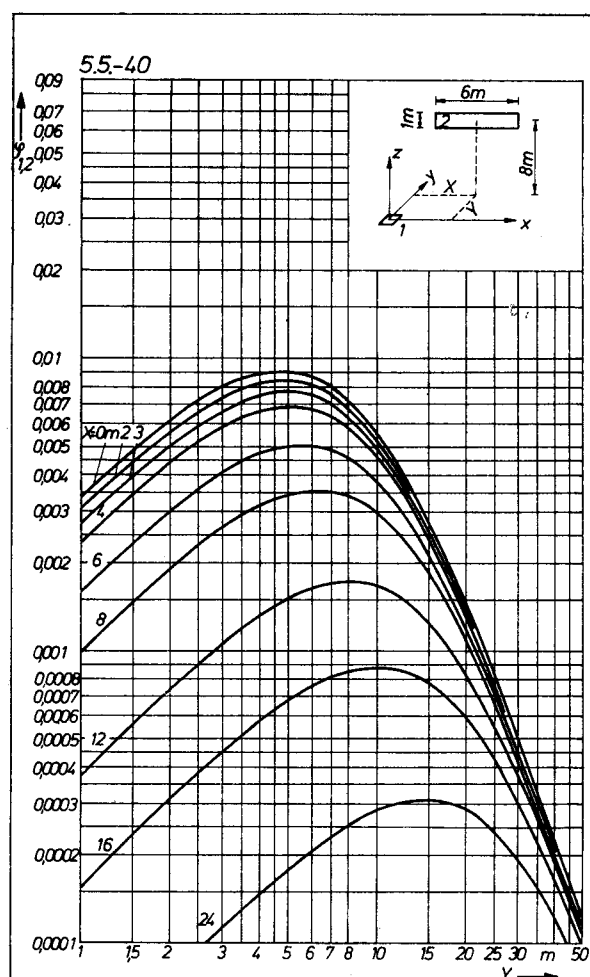
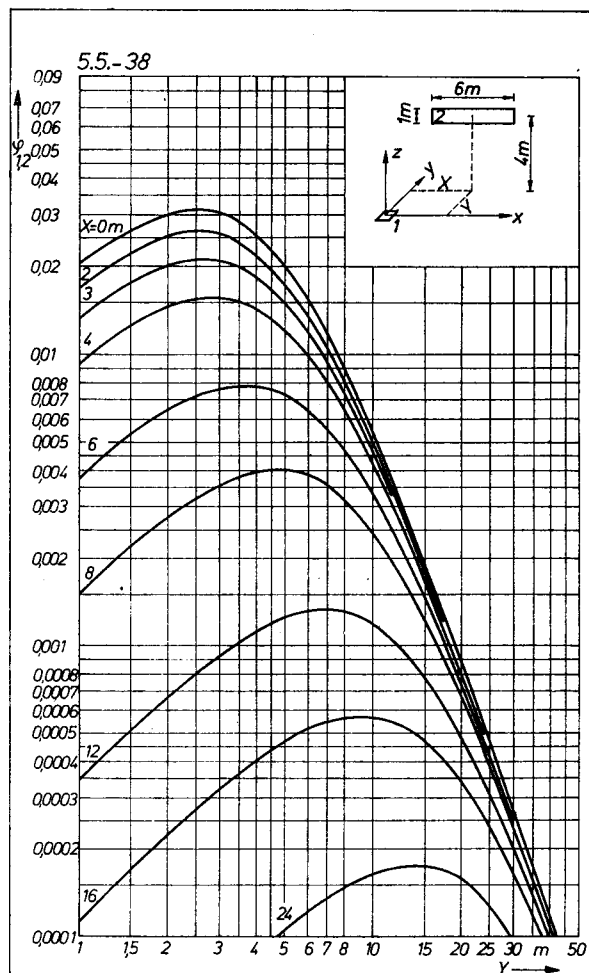


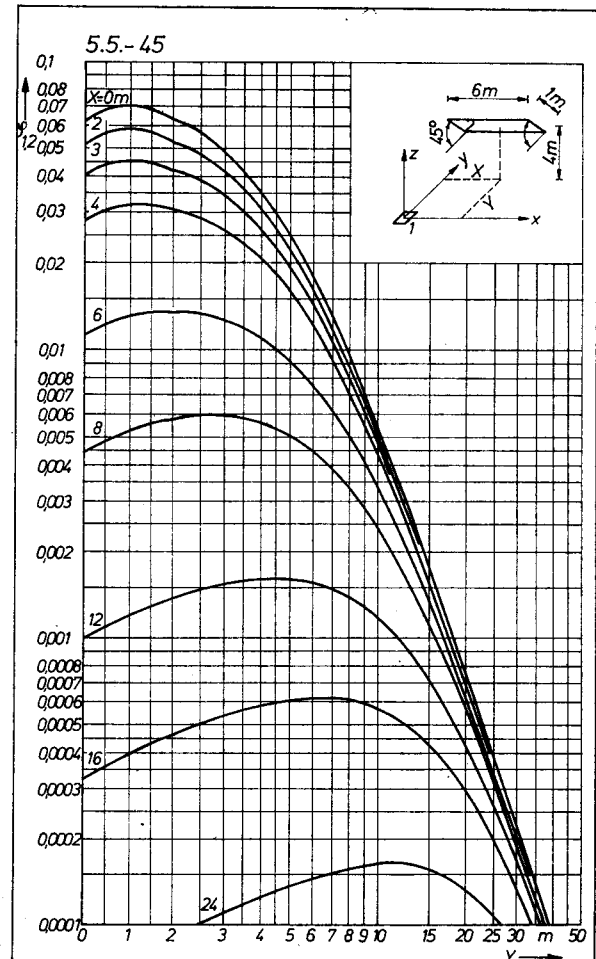
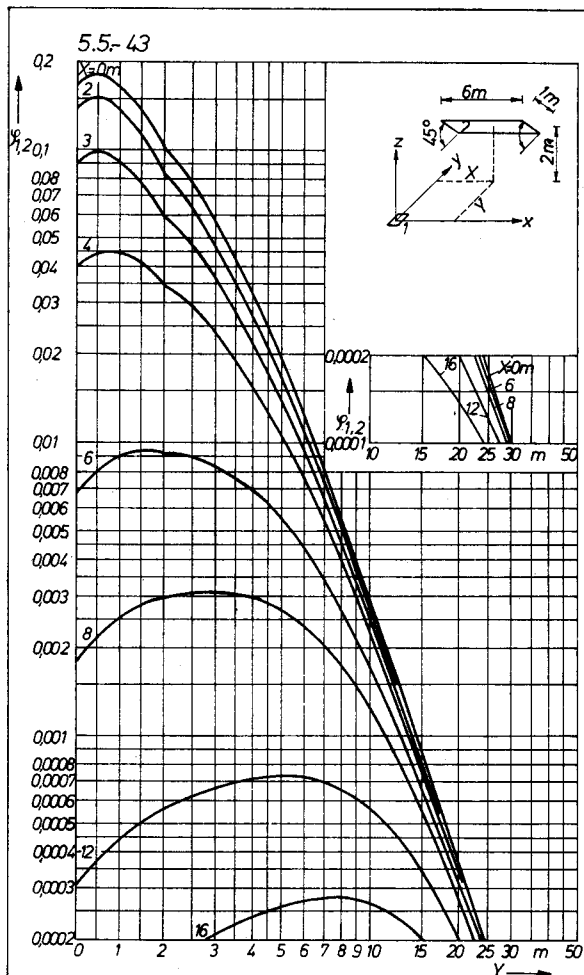
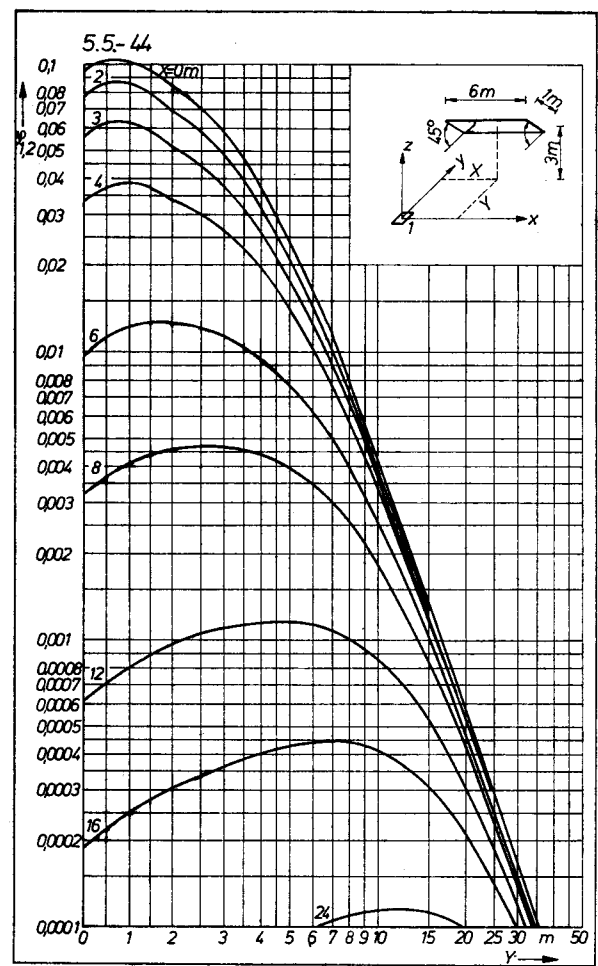
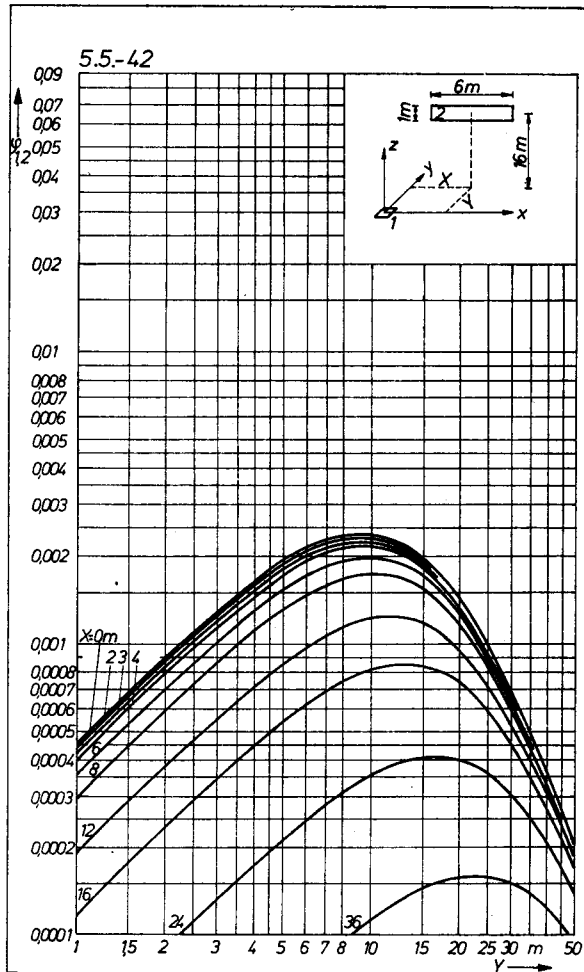


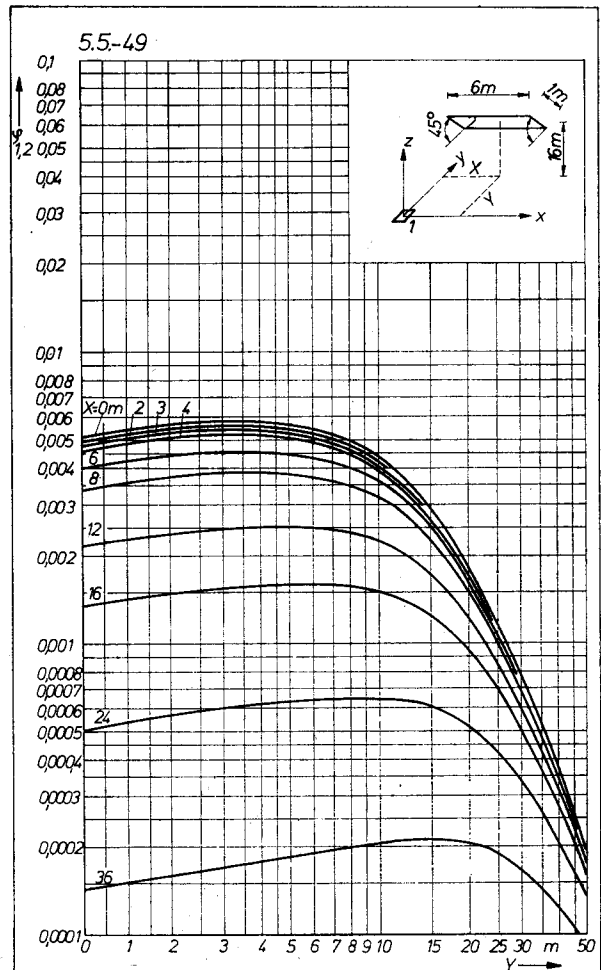
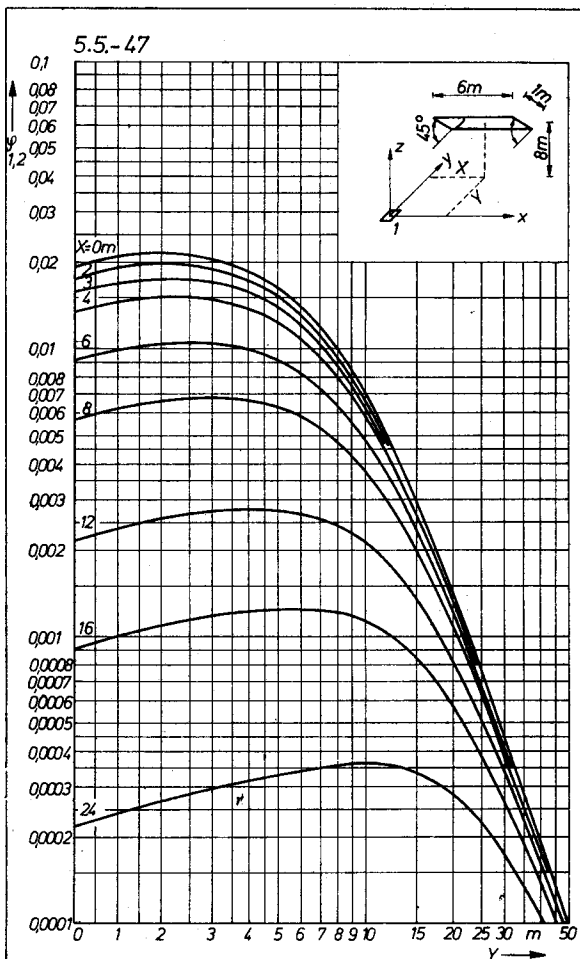
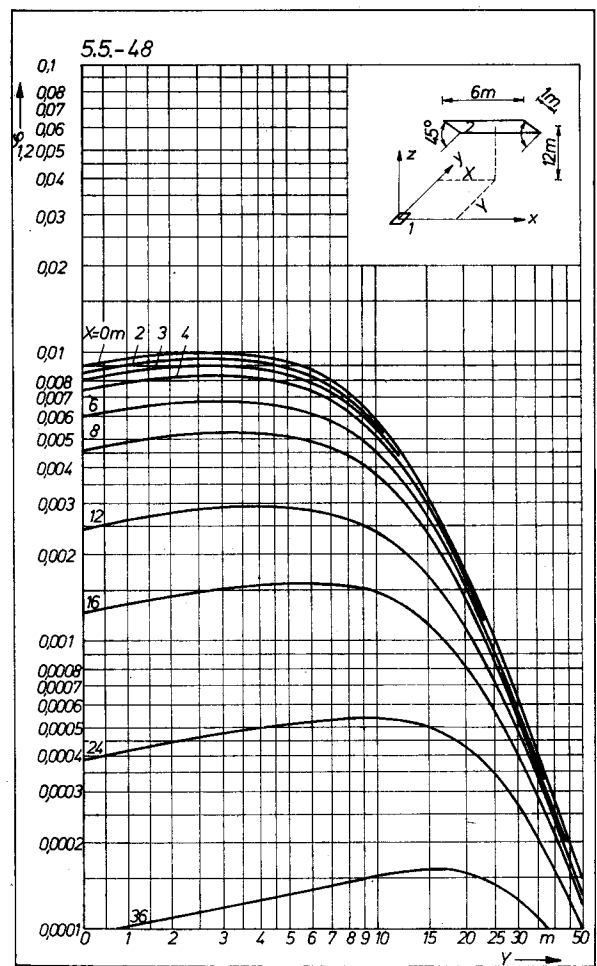
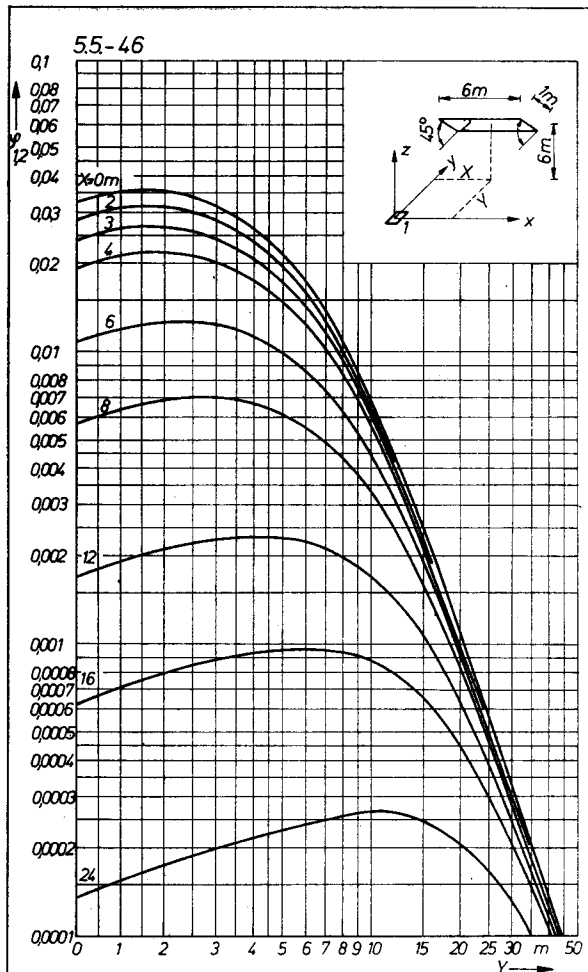












5.5.2. Einstrahlzahlen von streifenförmigen Flächenelementen auf Flächen

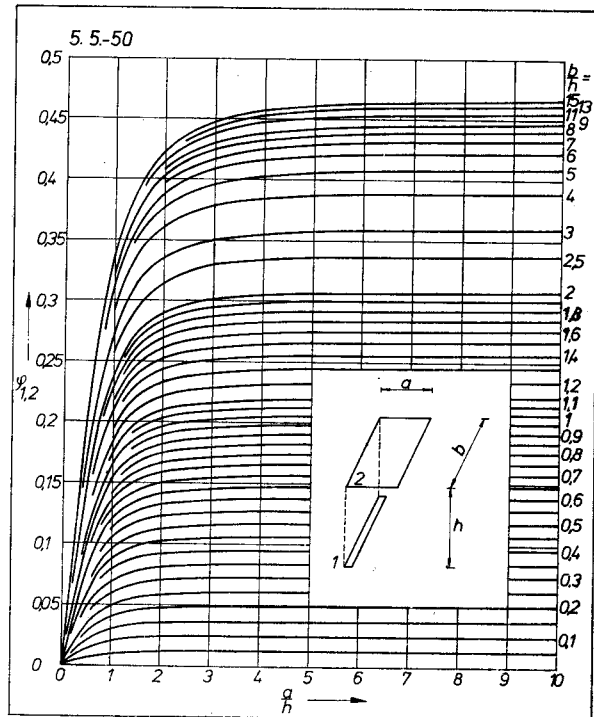


Bild 5.5.-50
Einstrahlzahl eines streifenförmigen Flächenelementes 1 auf eine dazu parallel liegende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-18)
(dA_1 senkrecht unter Kante b)

5.5.3. Einstrahlzahlen von kugelförmigen Flächenelementen auf Flächen

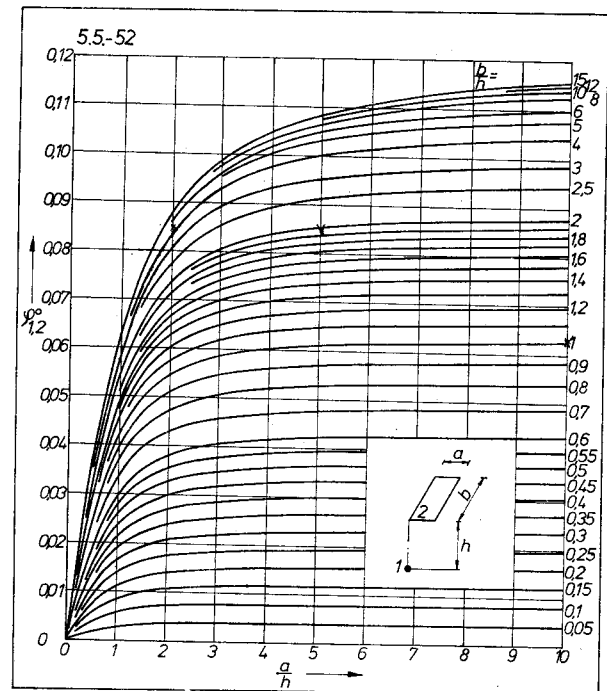


Bild 5.5.-52
Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-20); siehe auch Seite 501
(Element 1 unter Ecke A_1)

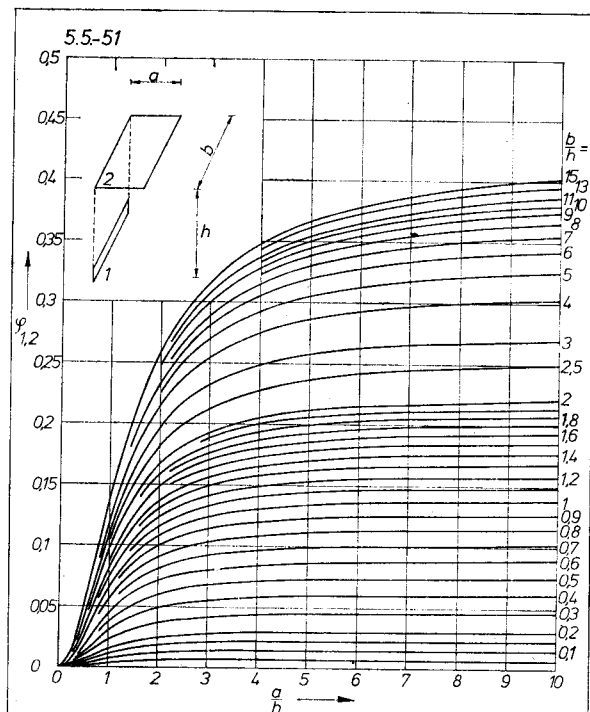


Bild 5.5.-51
Einstrahlzahl eines streifenförmigen Flächenelementes 1 auf eine dazu senkrecht stehende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-19)
(dA_1 senkrecht unter Kante b)

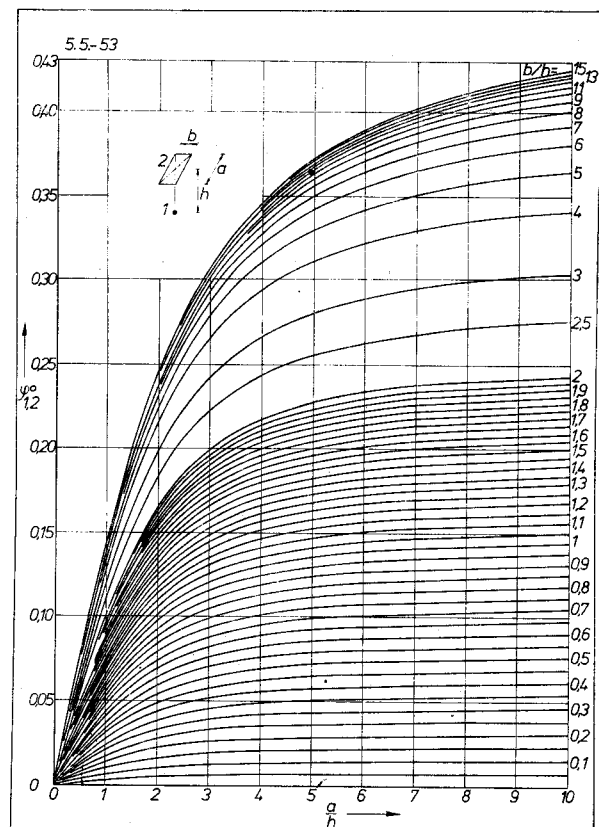


Bild 5.5.-53
Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-21)
(Element 1 unter Mitte A_1)

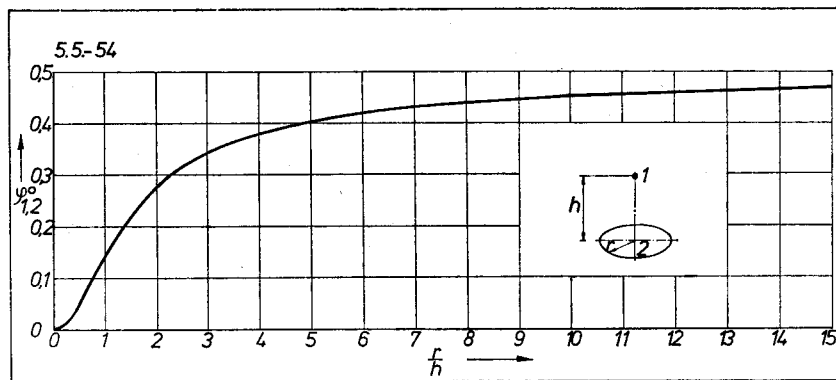
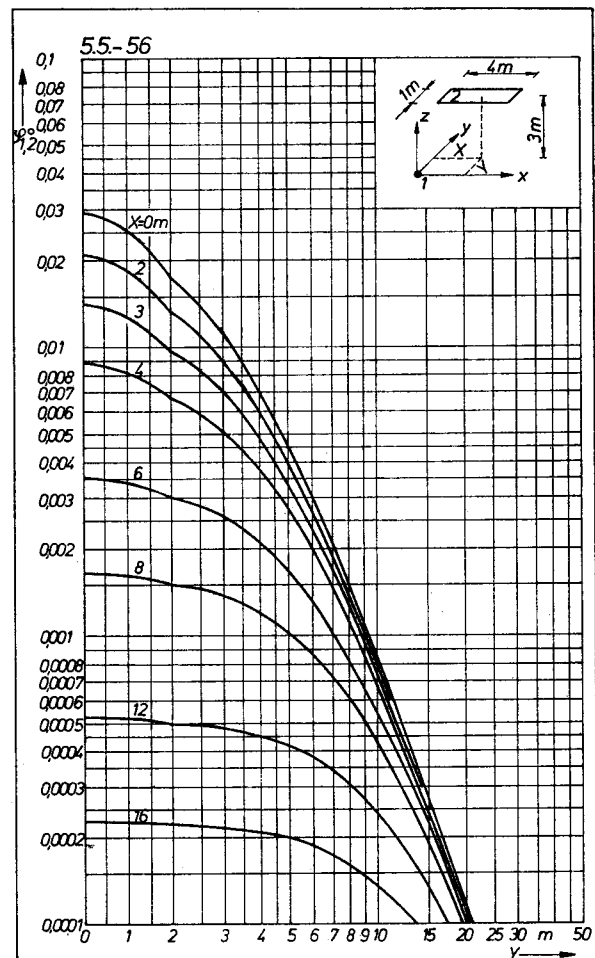
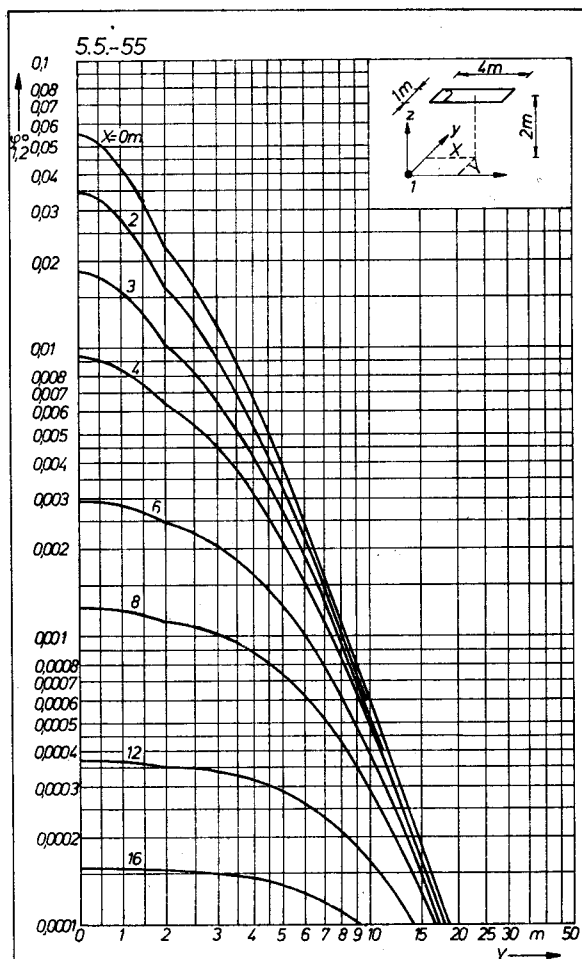


Bild 5.5.-54

Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine Kreisfläche 2 nach Gl. (5.3.-22)

(Element 1 unter Mitte A_2)

Bildliste

Bild 5.5.-55 bis 5.5.-61 (S. 338 bis S. 340)

Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine waagerechte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 4 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-62 bis 5.5.-68 (S. 340 bis S. 341)

Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine senkrechte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 4 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-69 bis 5.5.-75 (S. 342 bis S. 343)

Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine unter 45° geneigte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 4 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

Bild 5.5.-76 bis 5.5.-82 (S. 343 bis S. 345)

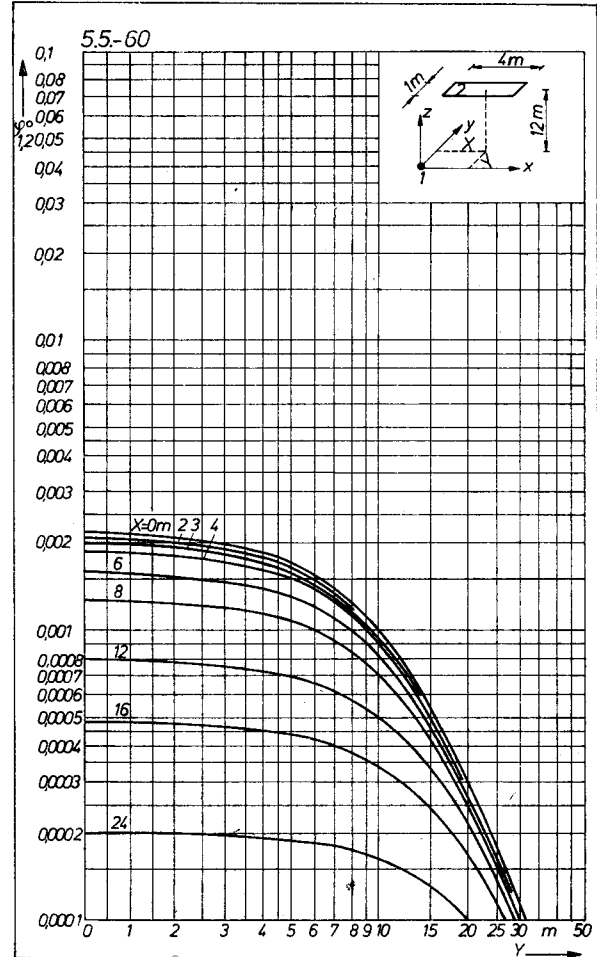
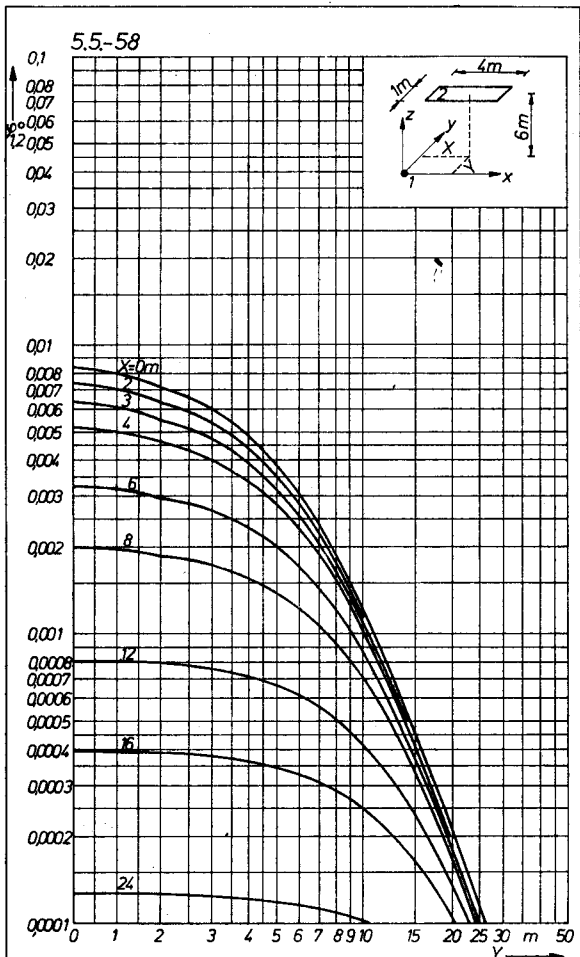
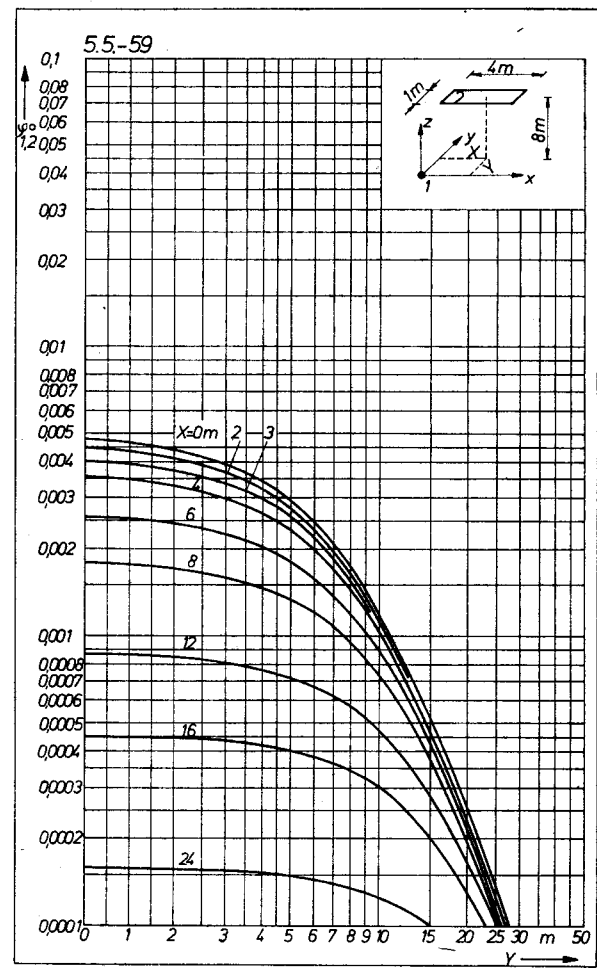
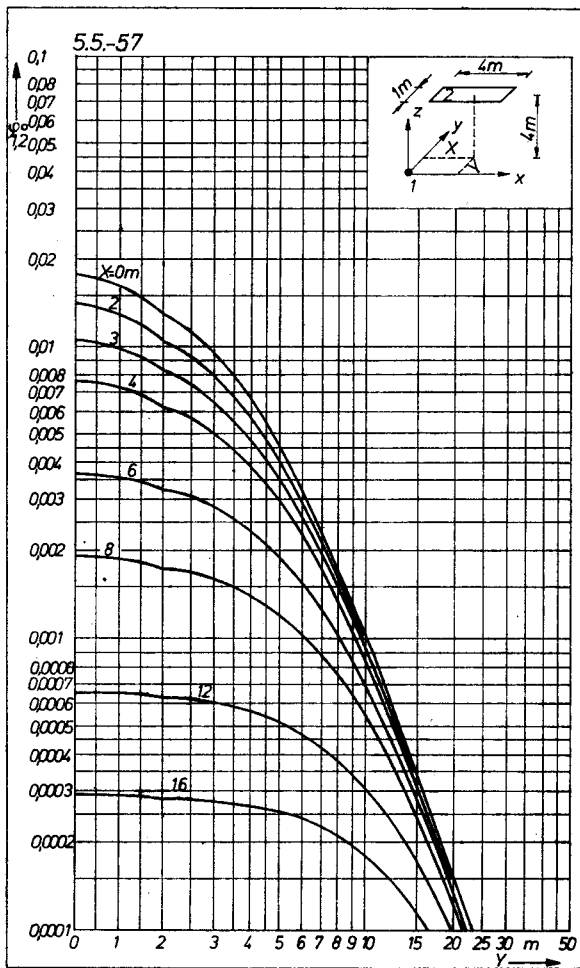
Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine waagerechte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 6 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

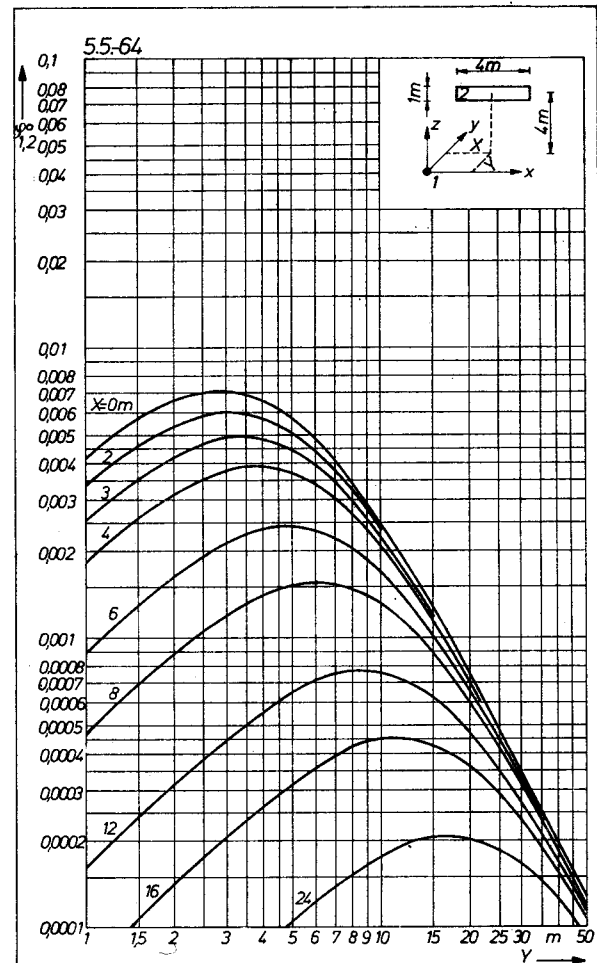
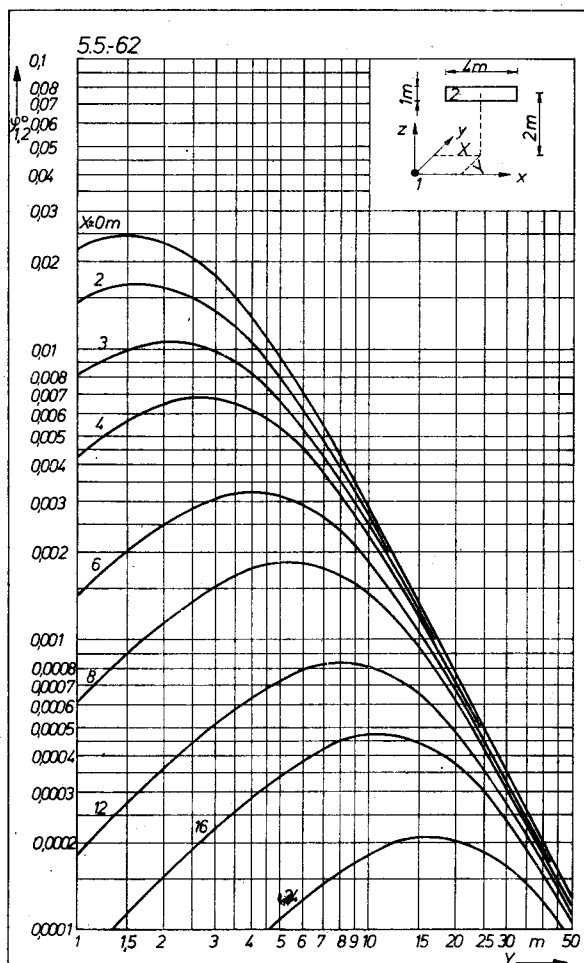
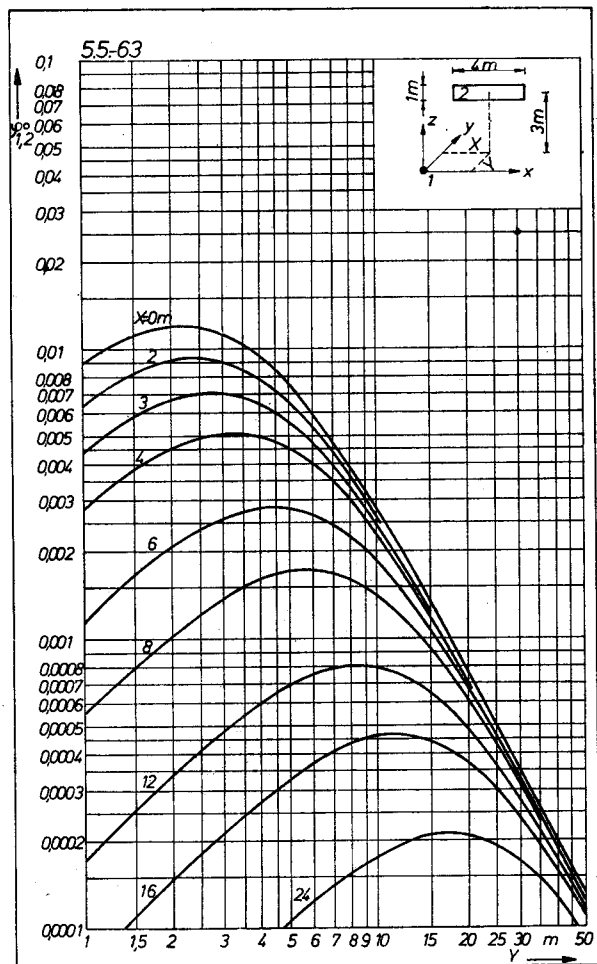
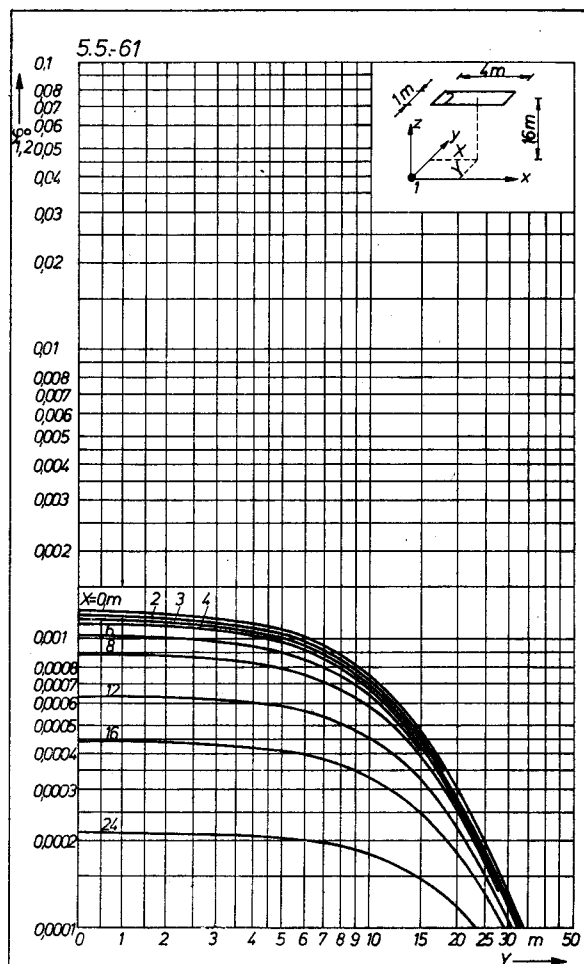
Bild 5.5.-83 bis 5.5.-89 (S. 345 bis S. 347)

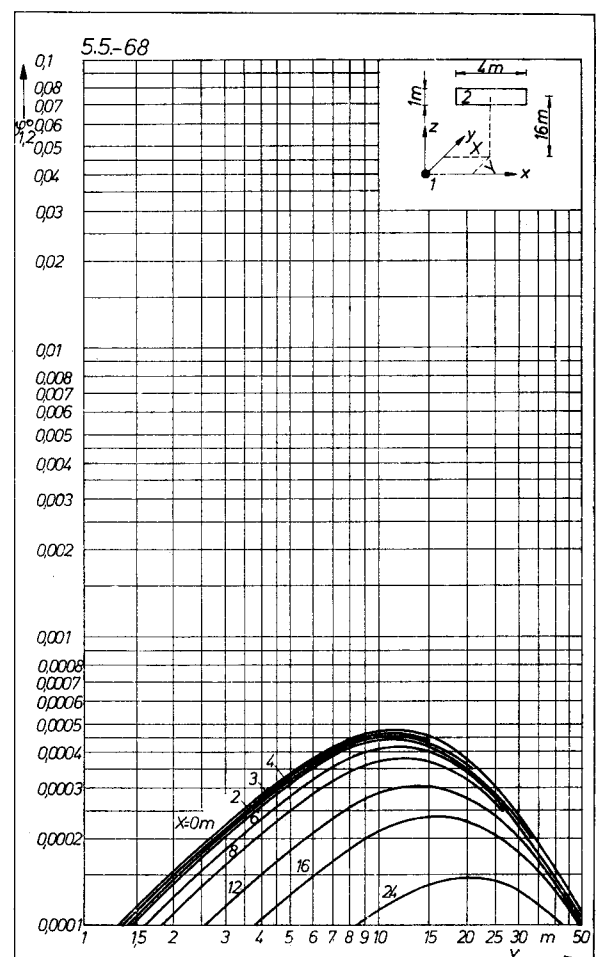
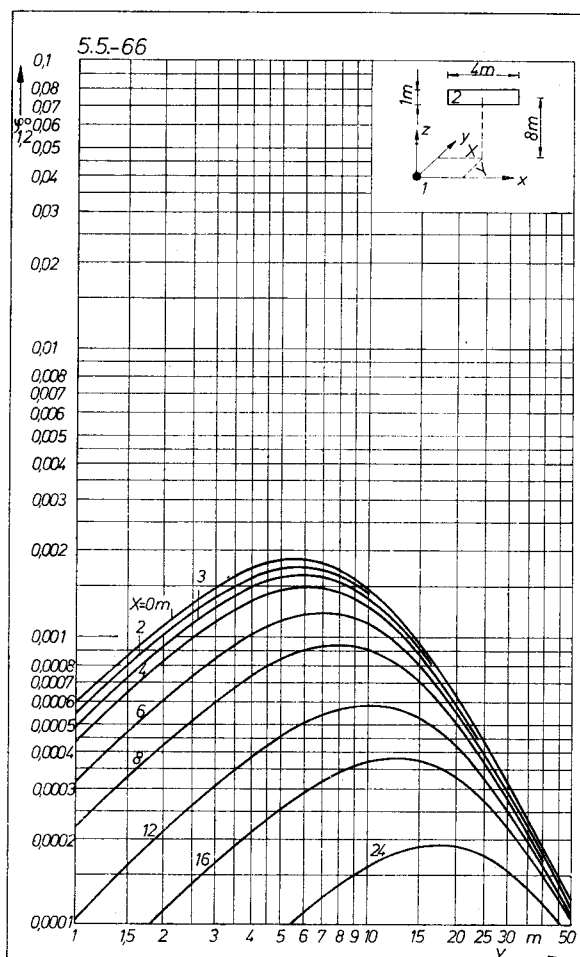
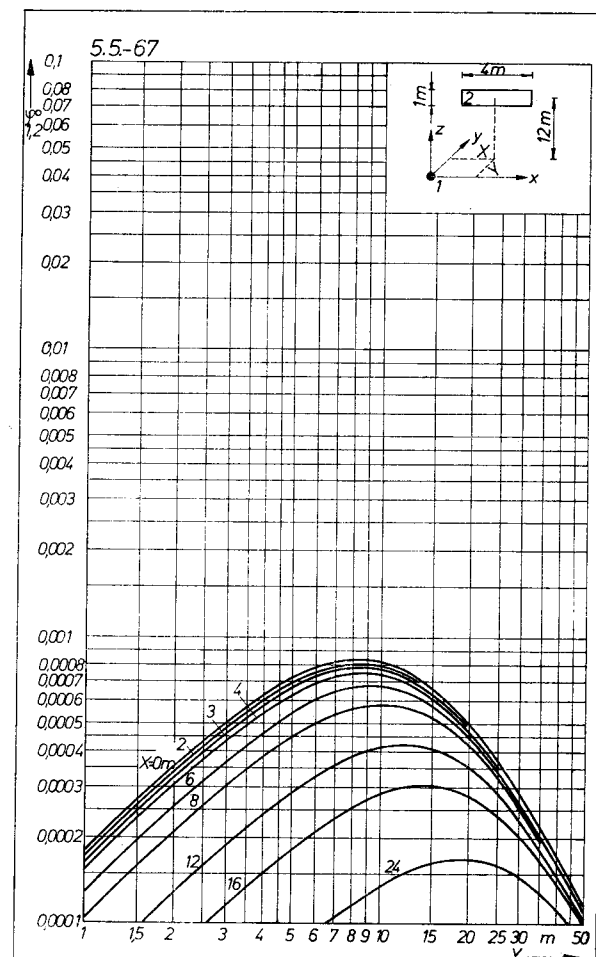
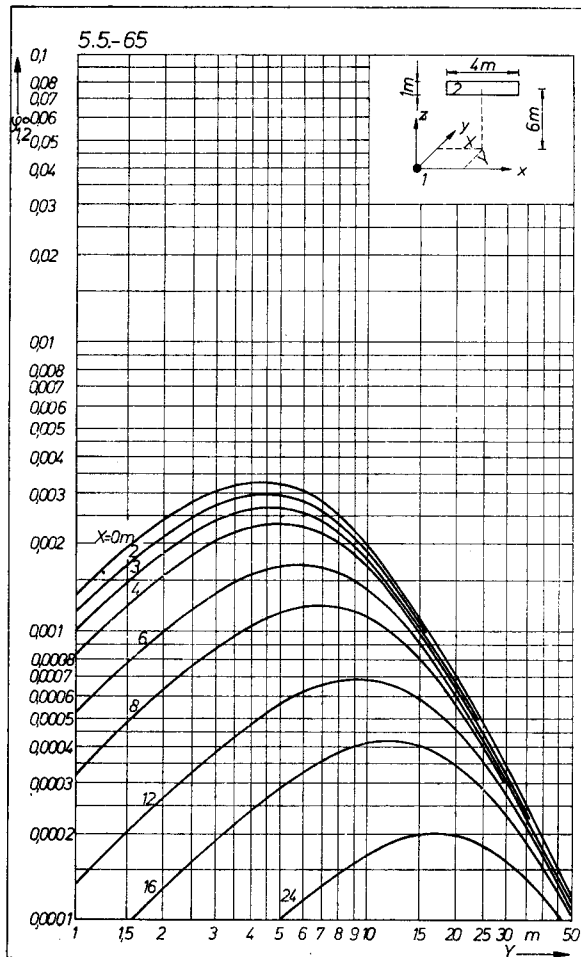
Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine senkrechte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 6 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

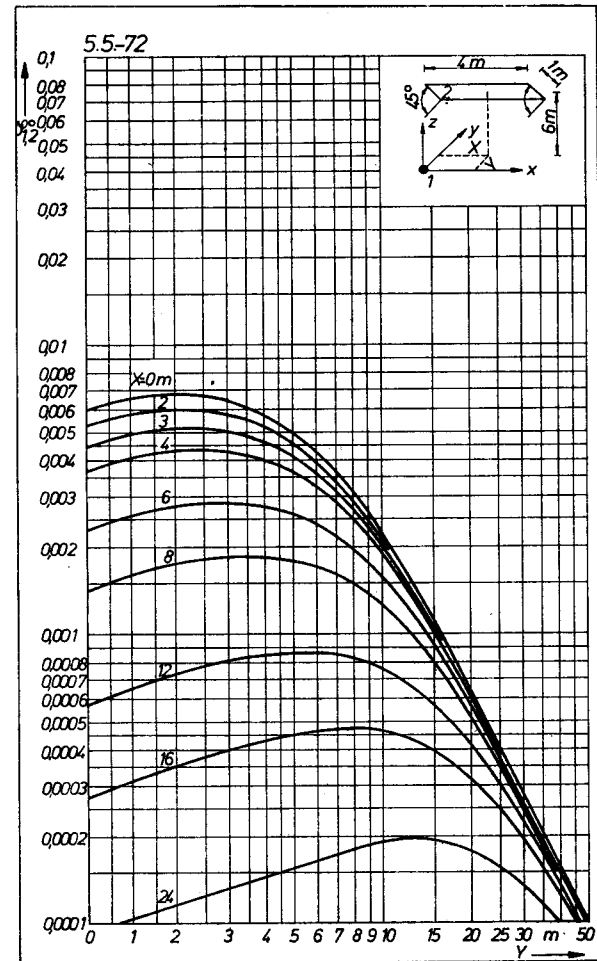
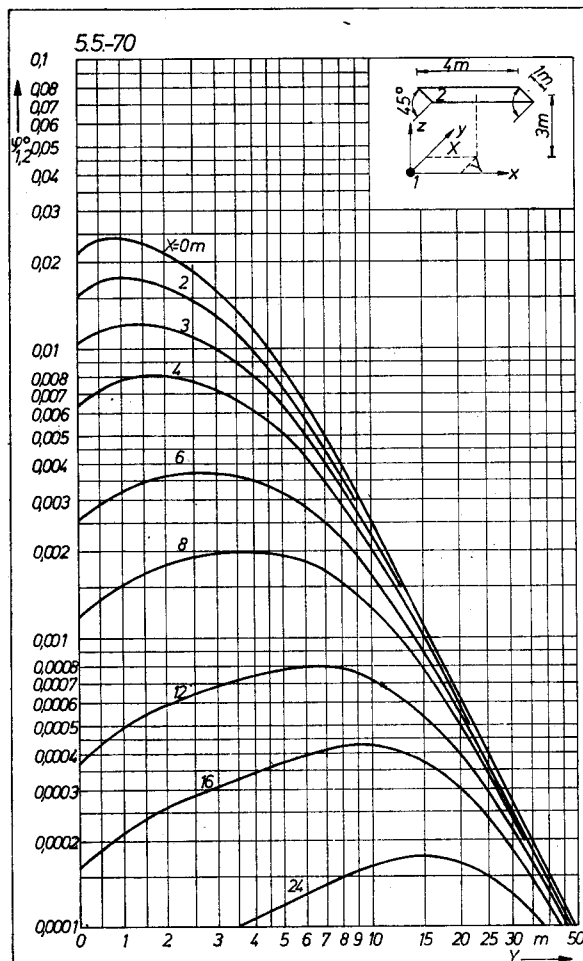
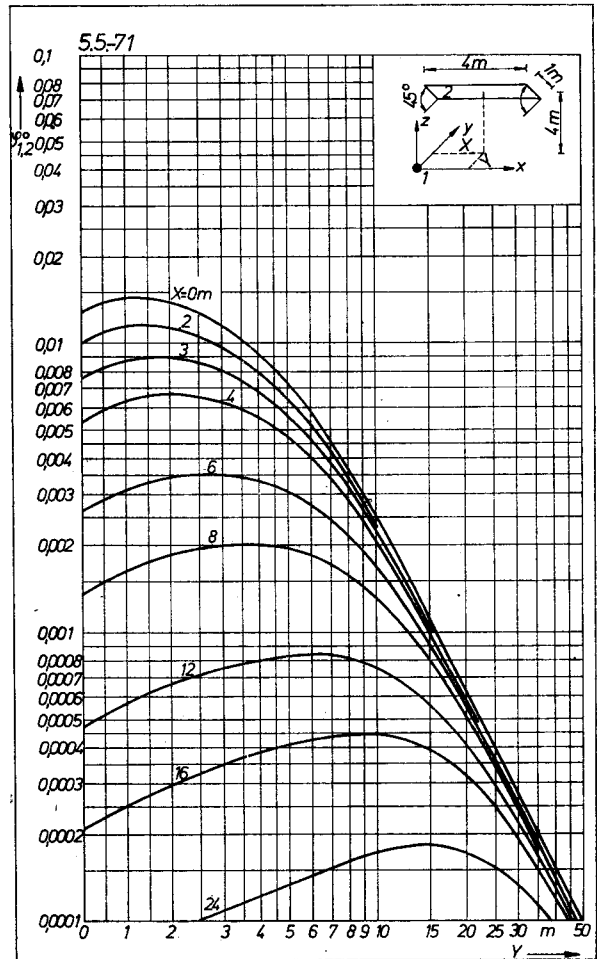
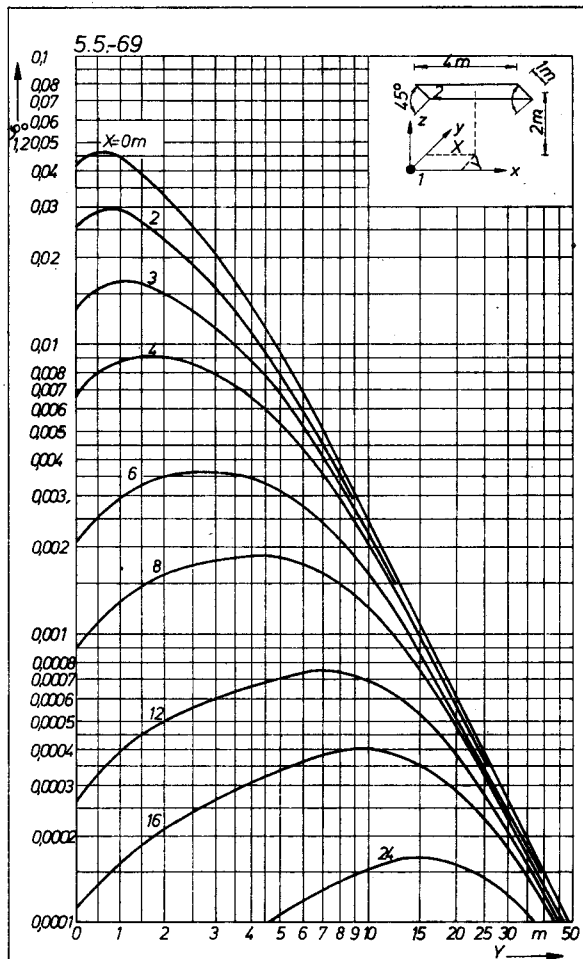
Bild 5.5.-90 bis 5.5.-96 (S. 347 bis S. 348)

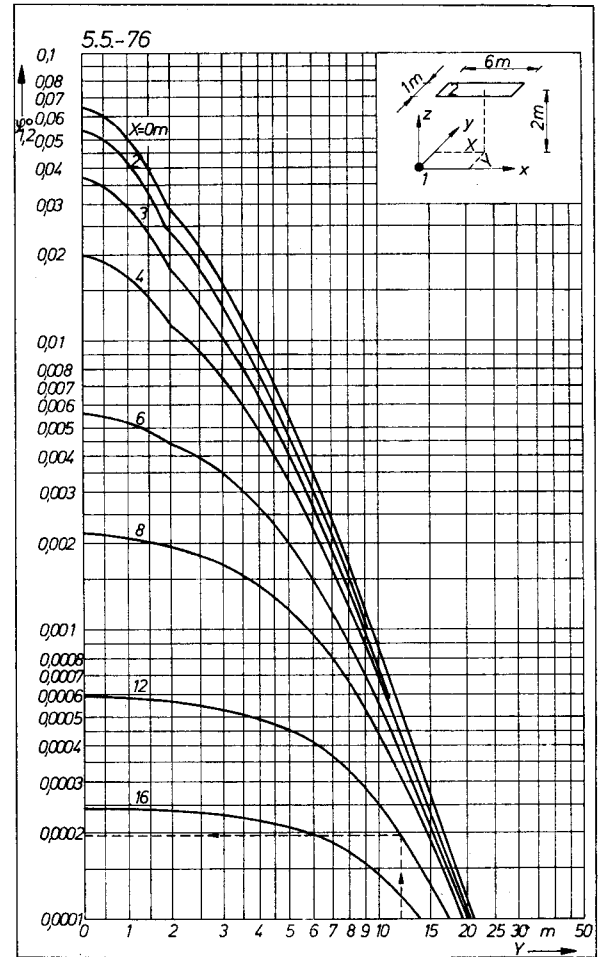
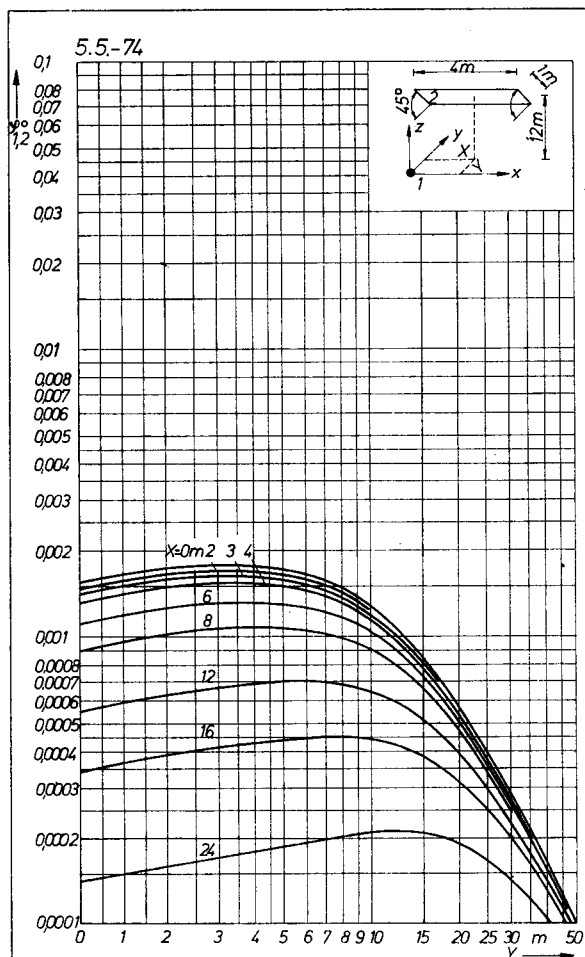
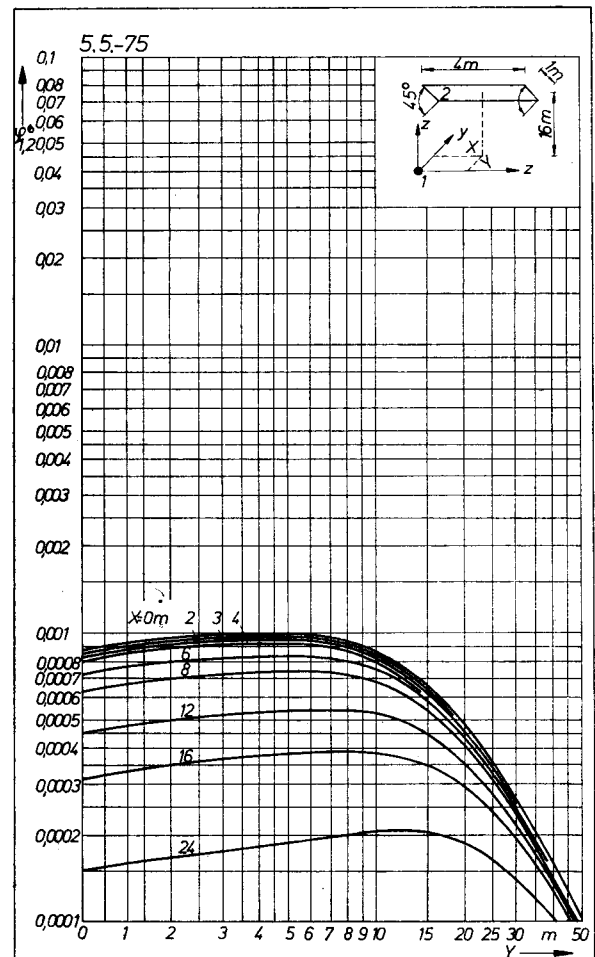
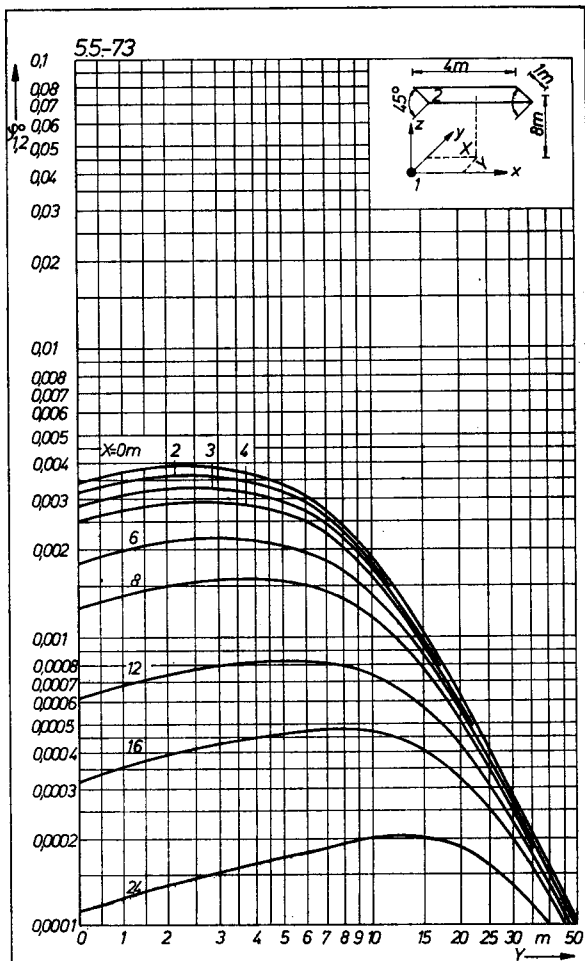
Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine unter 45° geneigte Strahlplatte 2 der Abmessungen 1 m × 6 m bei einer Höhe von 2; 3; 4; 6; 8; 12 und 16 m

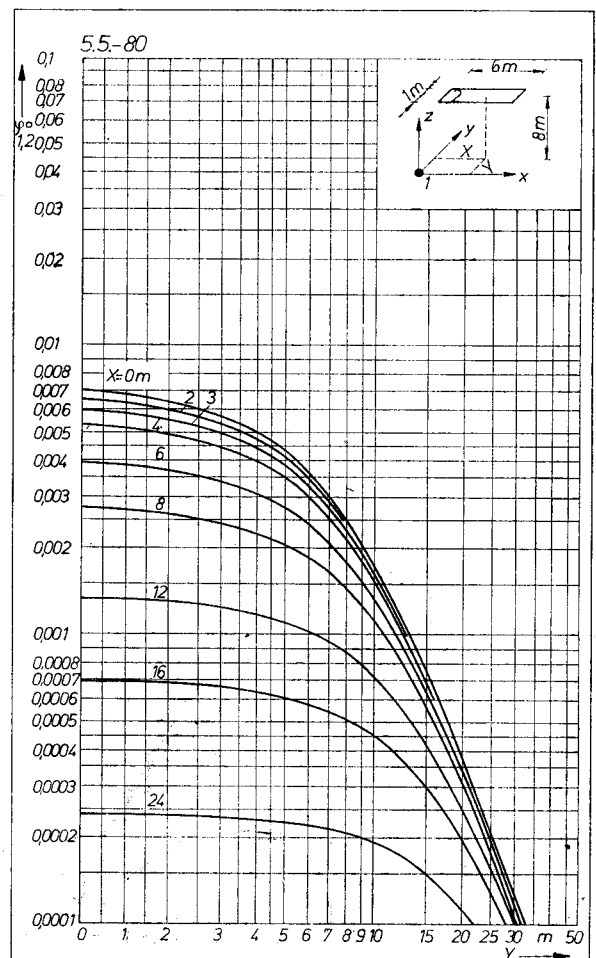
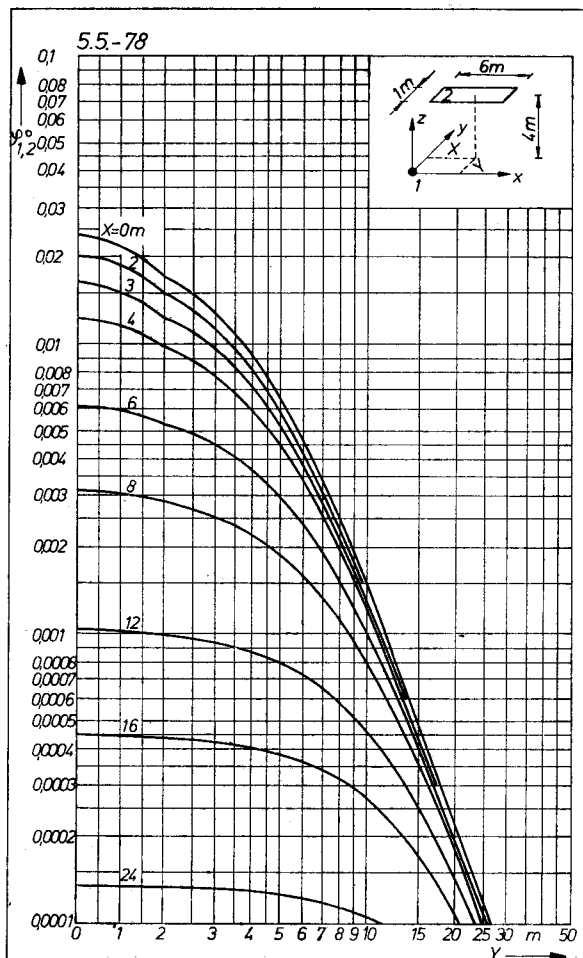
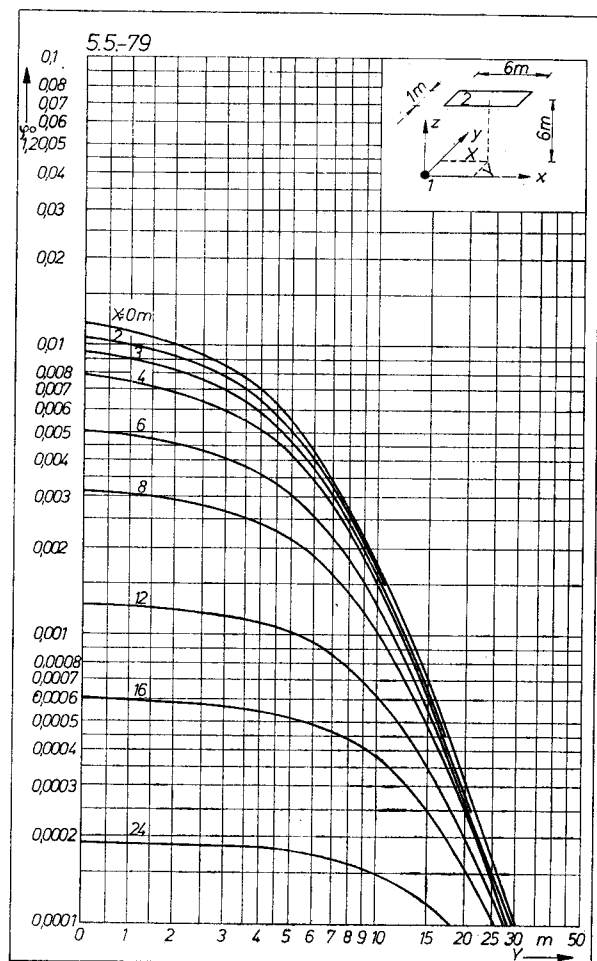
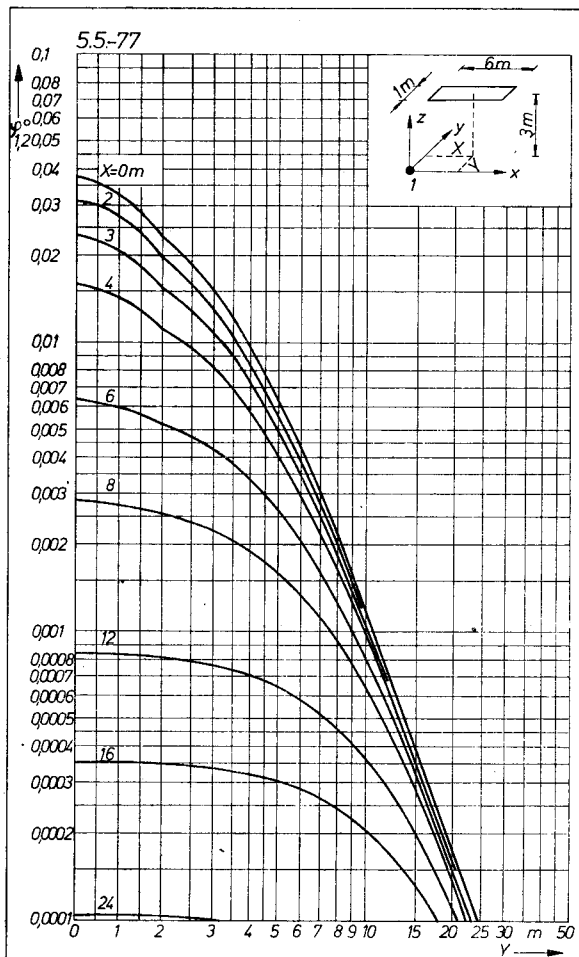


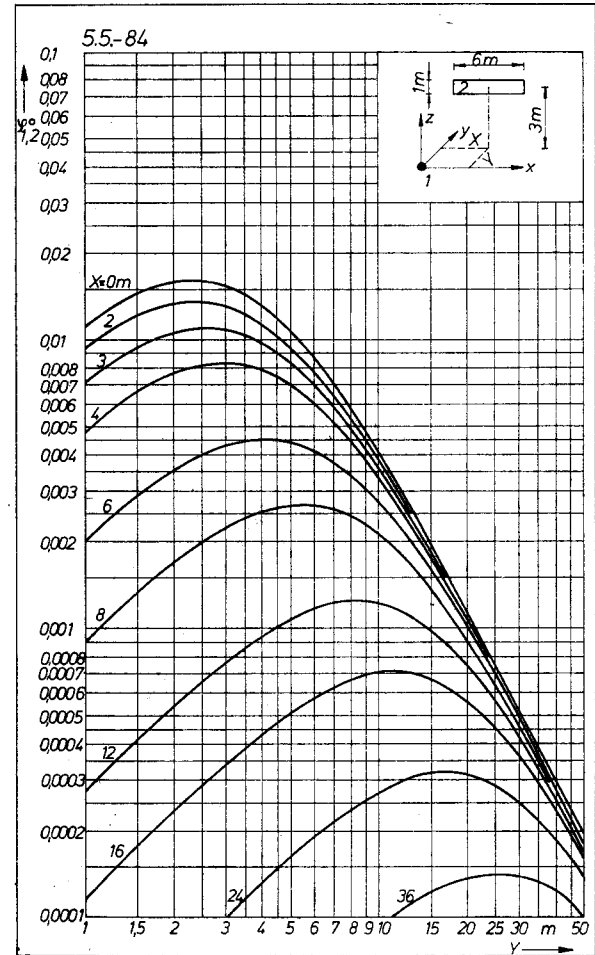
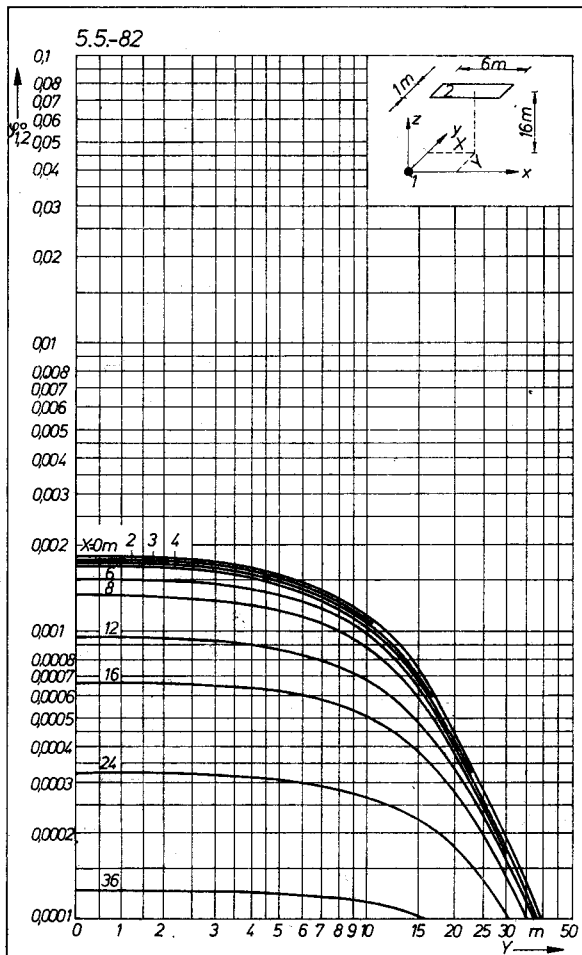
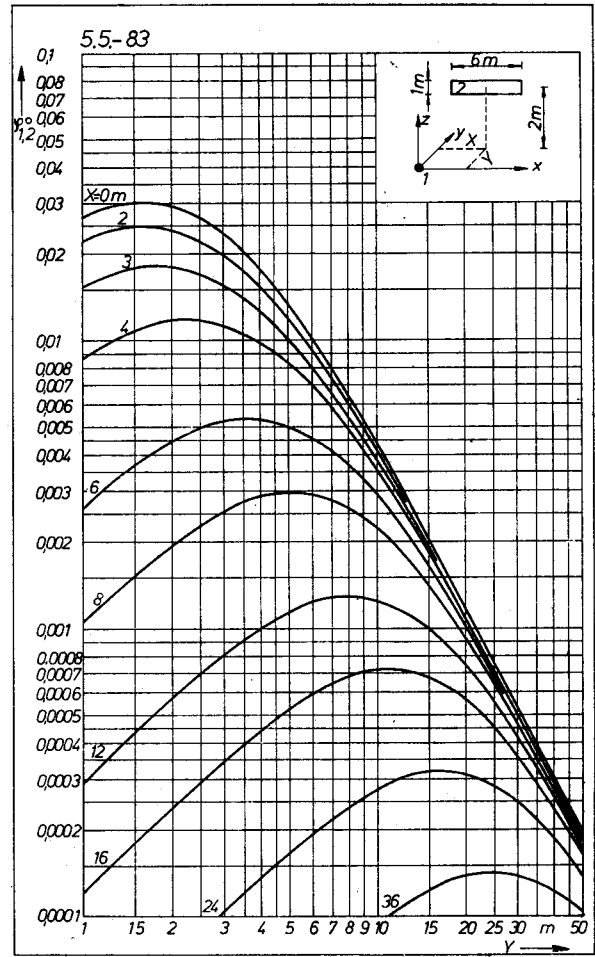
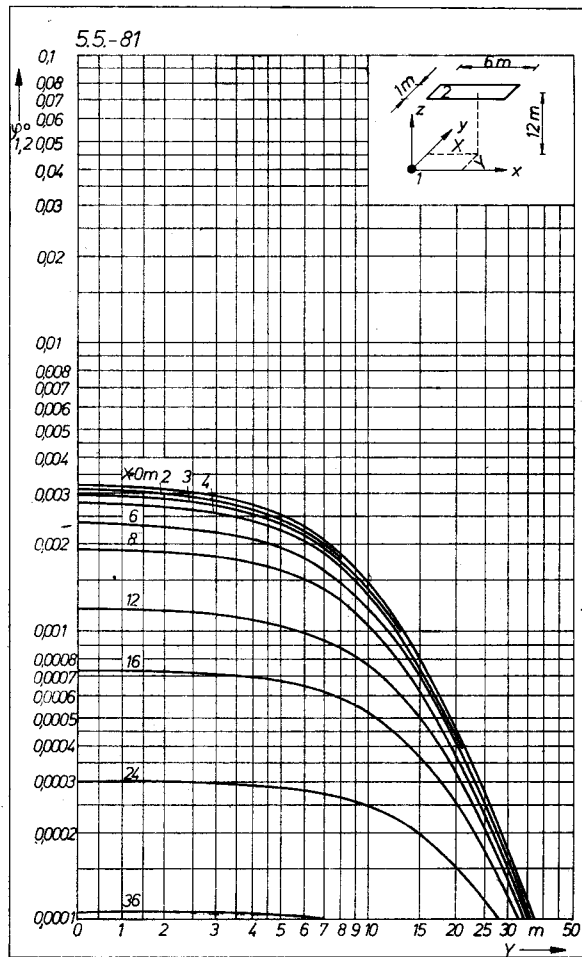


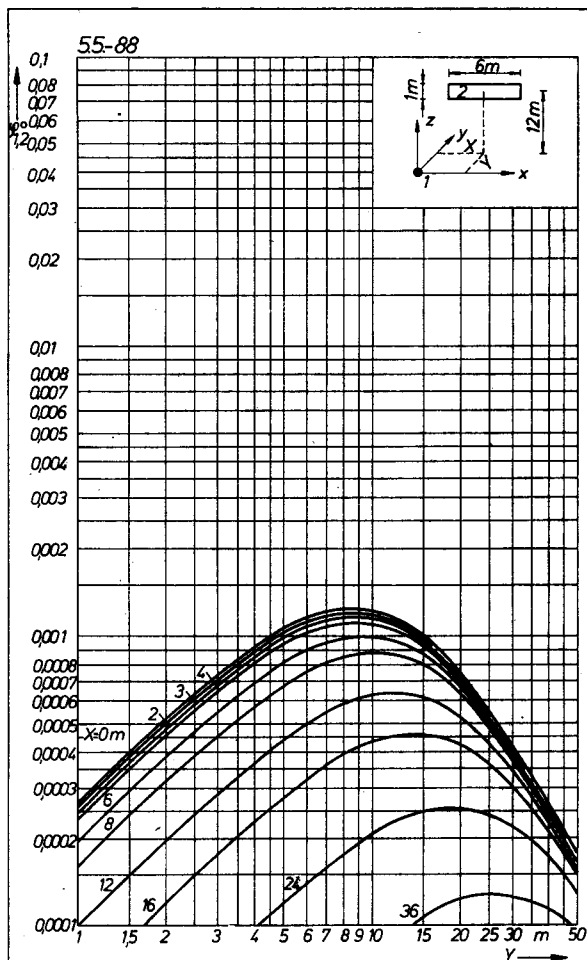
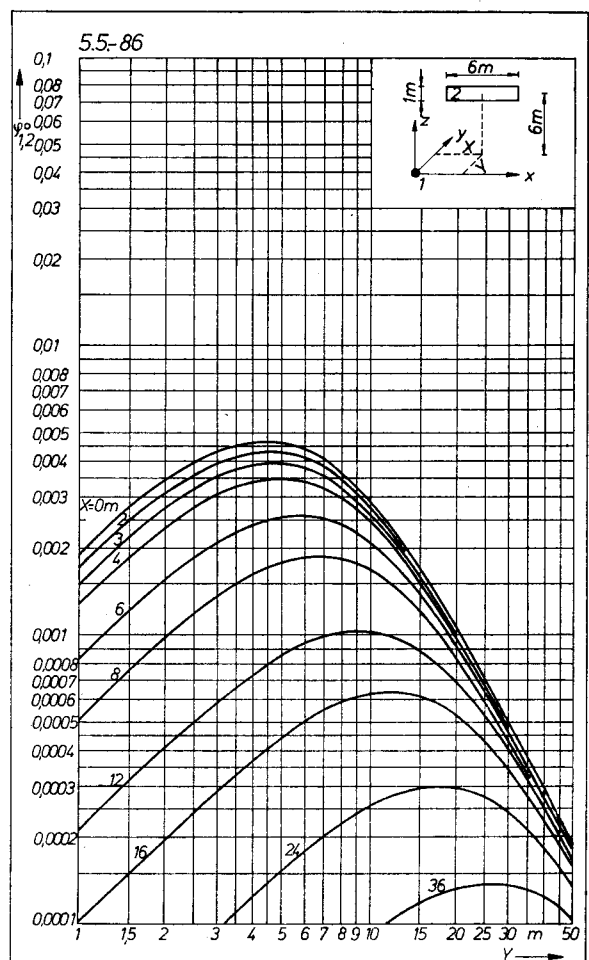
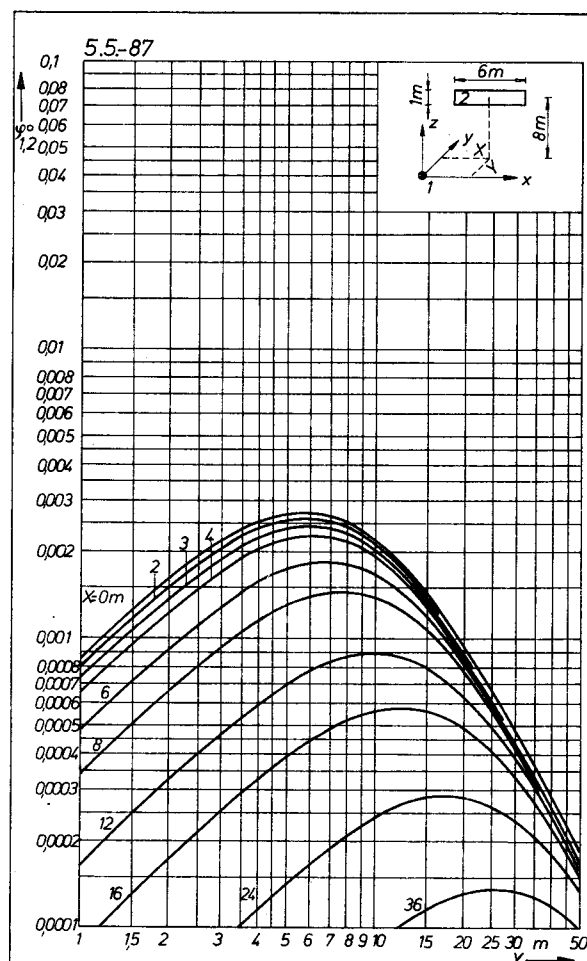
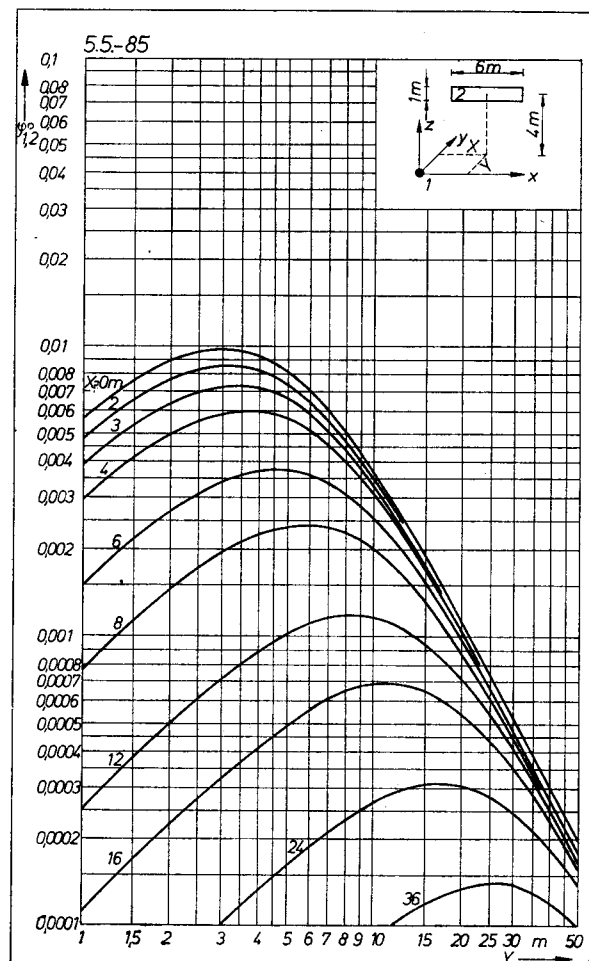


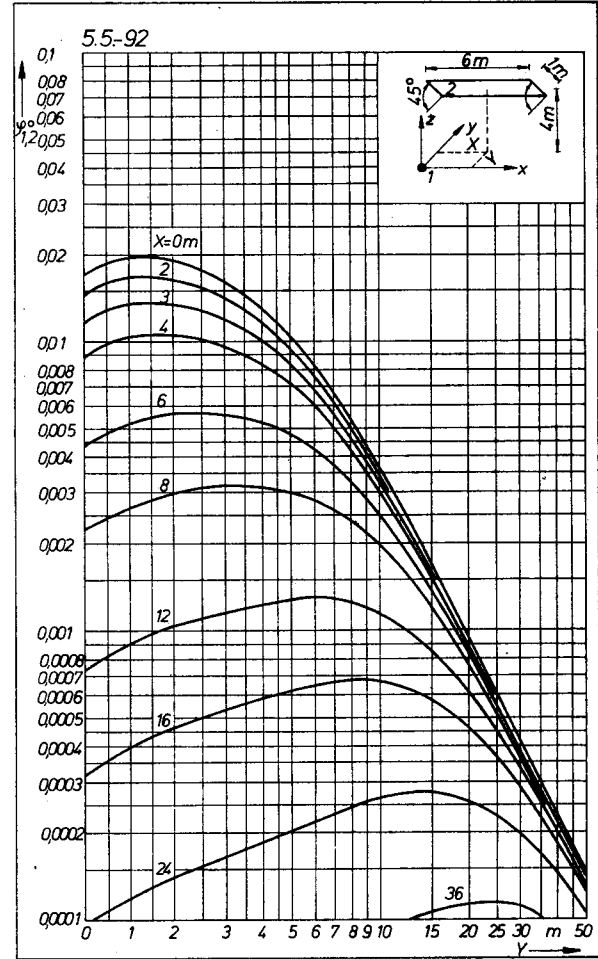
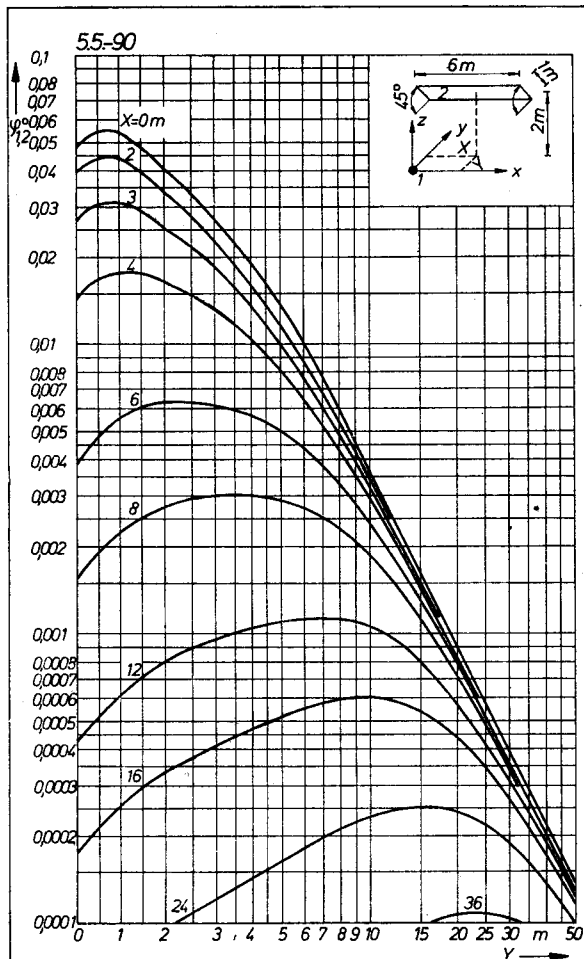
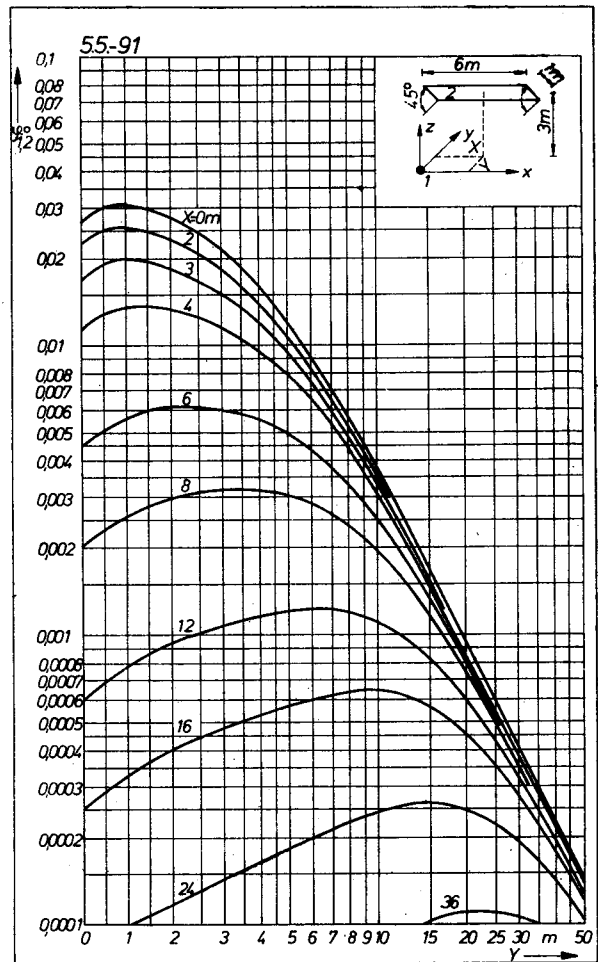
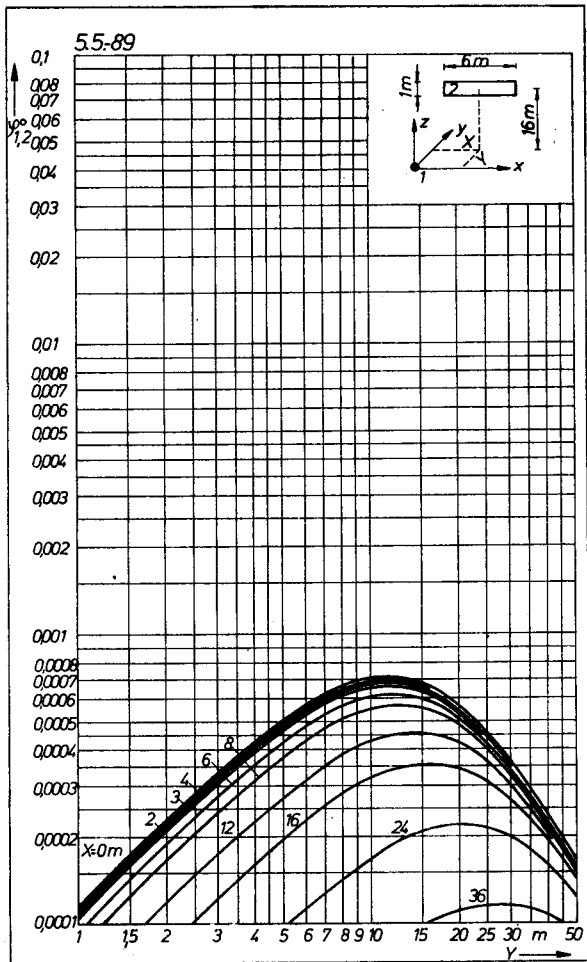


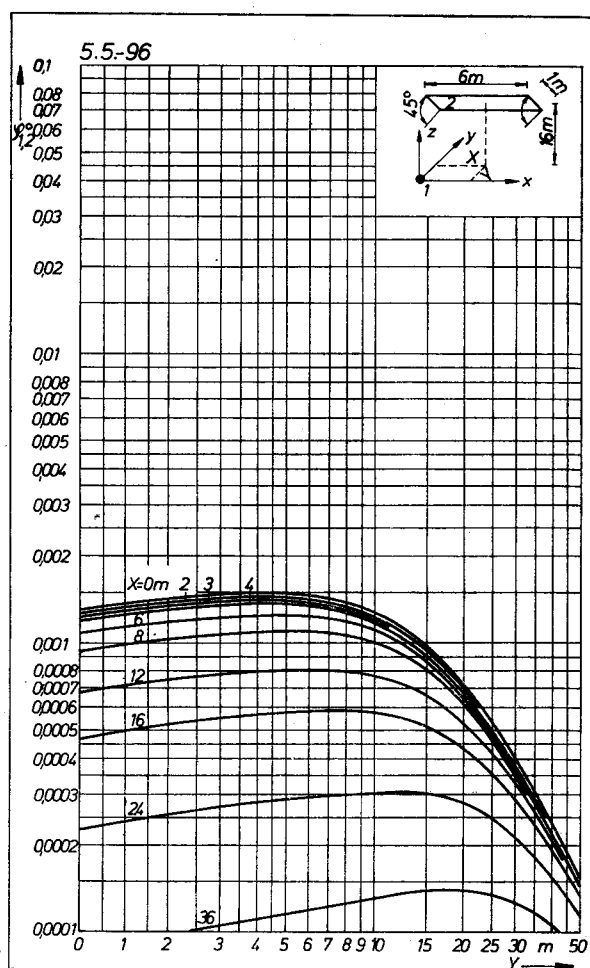
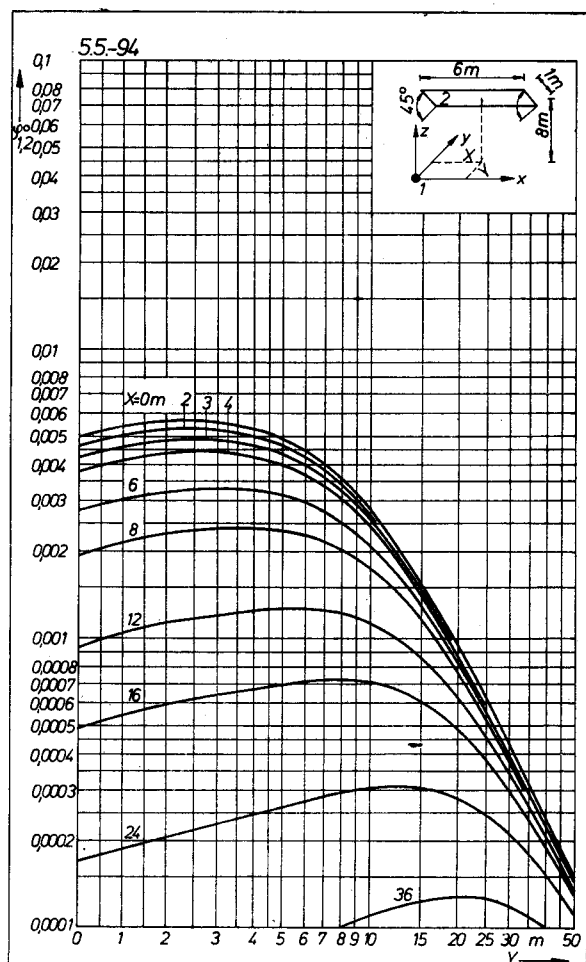
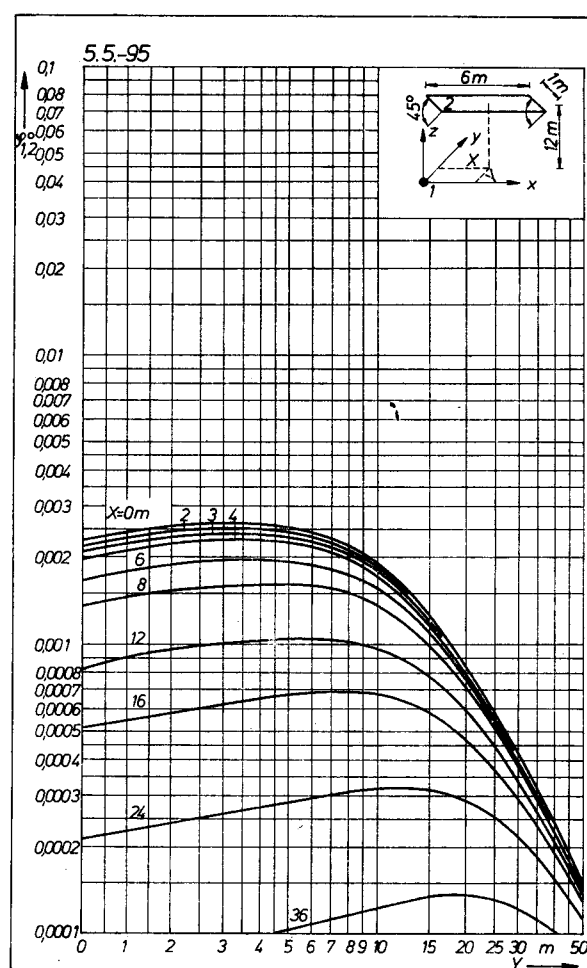
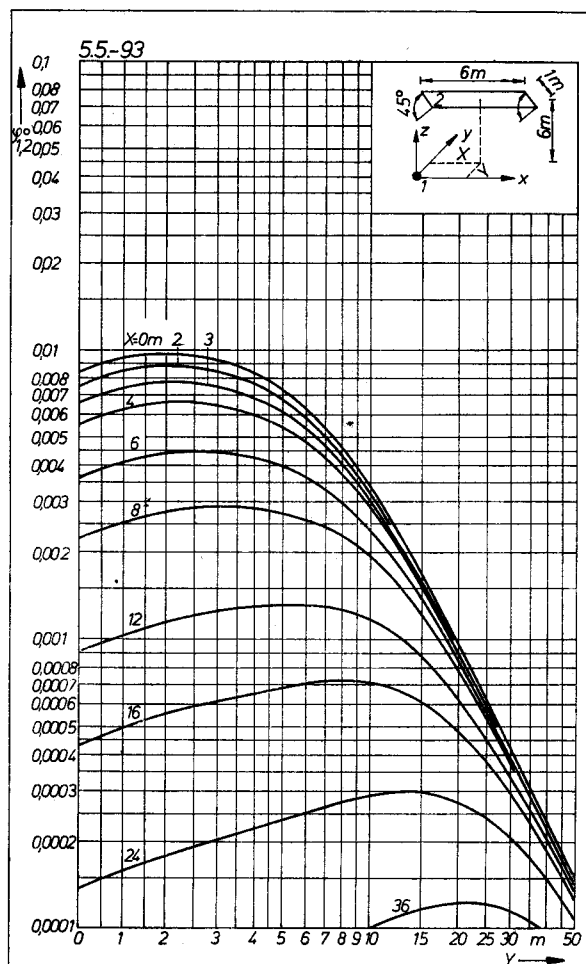












5.5.4. Einstrahlzahlen von Flächen auf Flächen

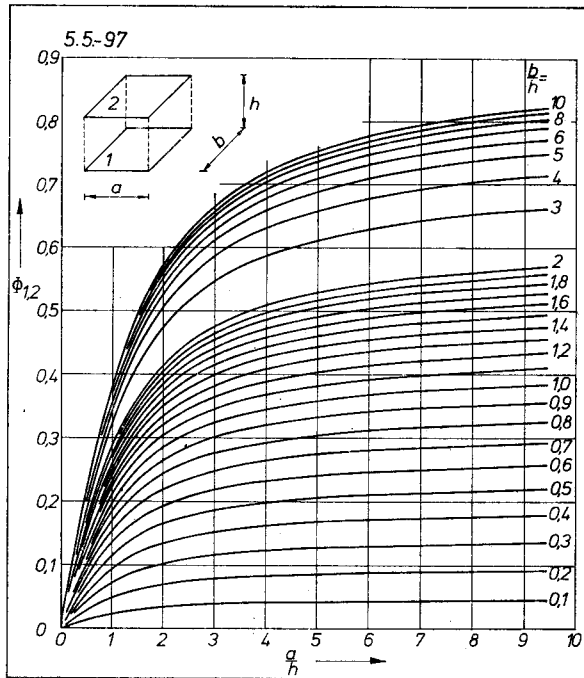


Bild 5.5.-97

Einstrahlzahl einer Rechteckfläche 1 auf eine dazu gleich große parallel liegende Rechteckfläche 2 nach Gl. (5.3.-23); siehe auch Seite 502

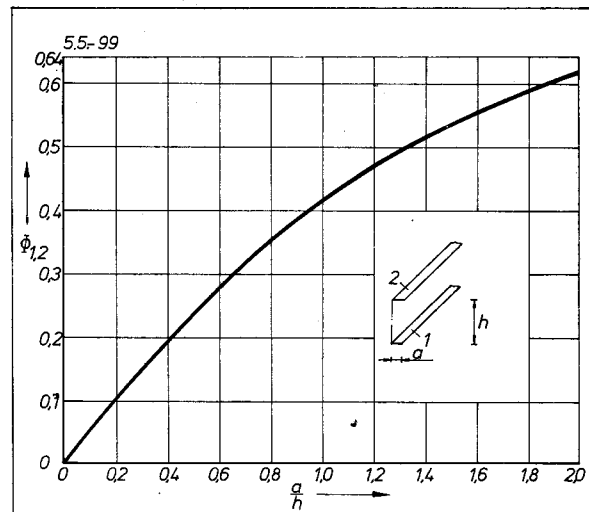


Bild 5.5.-99

Einstrahlzahl eines Flächenstreifens 1 auf einen dazu gleich-großen parallel liegenden Flächenstreifen 2 unendlicher Länge nach Gl. (5.3.-27)

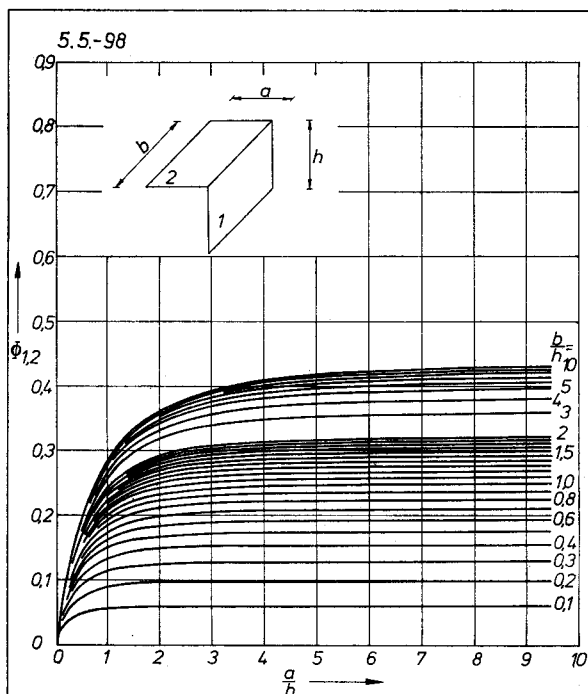


Bild 5.5.-98

Einstrahlzahl einer Rechteckfläche 1 auf eine dazu senkrecht stehende Rechteckfläche 2 gleicher Länge nach Gl. (5.3.-25); siehe auch Seite 502

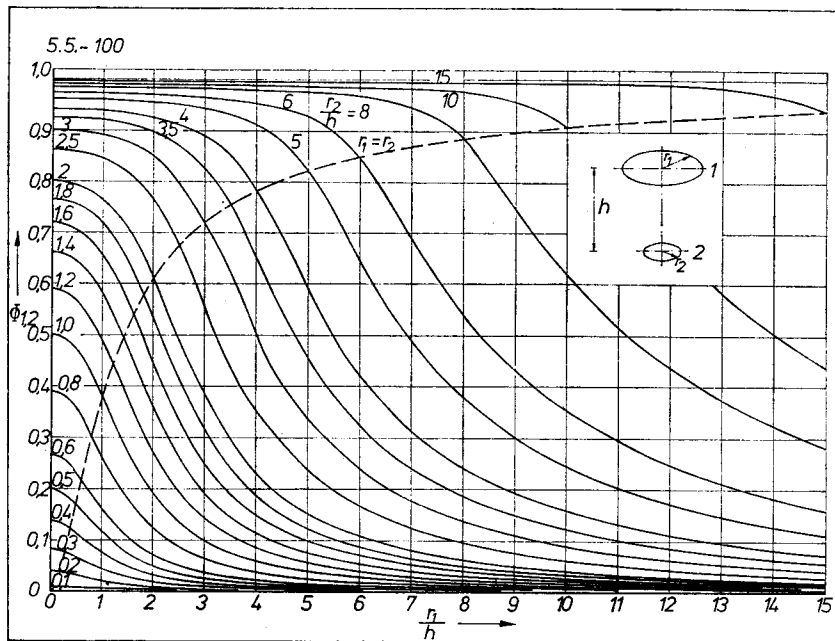


Bild 5.5.-100

Einstrahlzahl einer Kreisfläche 1 auf eine dazu konzentrische, parallel liegende Kreisfläche 2 nach den Gln. (5.3.-28) und (5.3.-29)

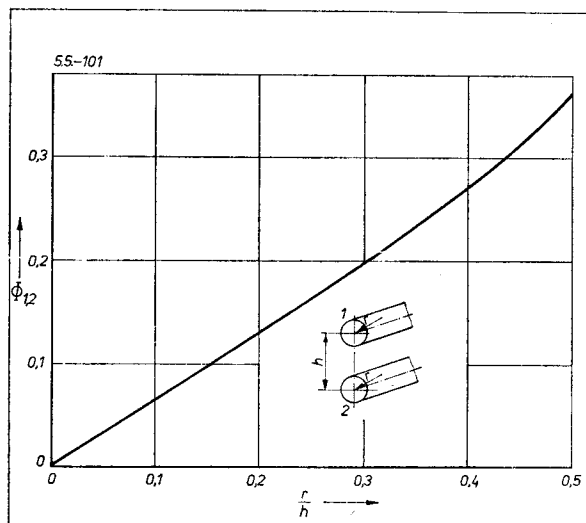


Bild 5.5.-101

Einstrahlzahl eines Rohres 1 auf ein dazu gleichgroßes parallel liegendes Rohr unendlicher Länge nach Gl. (5.3.-43)

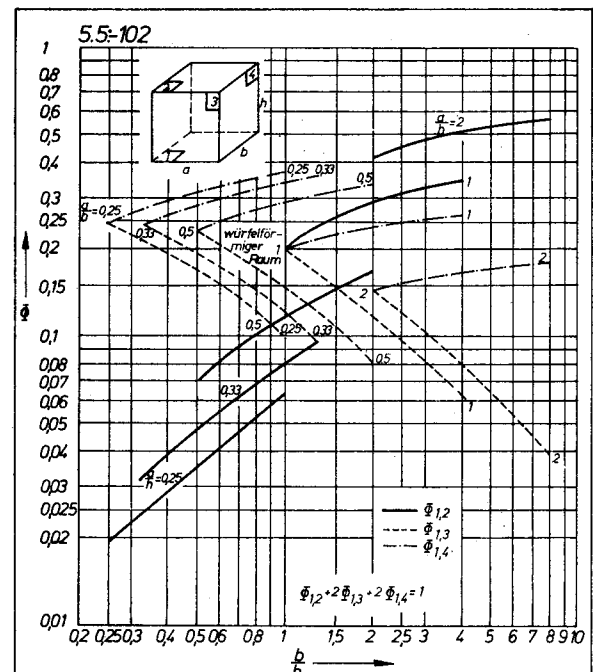


Bild 5.5.-102

Einstrahlzahl einer Fläche 1 auf dazu parallele und senkrechte Rechteckflächen eines Quaders nach den Gln. (5.3.-23) und (5.3.-25)

5.5.5. Anwendungsbeispiele

Beispiel 1

Es ist die Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes 1 auf eine Strahlplatte 2 zu ermitteln. Die geometrischen Verhältnisse sind im Bild 5.5.-103 dargestellt.

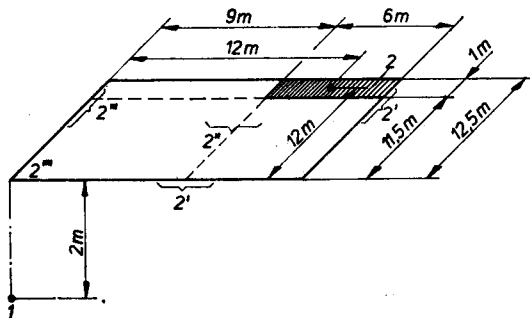


Bild 5.5.-103

Darstellung der geometrischen Verhältnisse bei Beispiel 5.5.5./1

Lösung

Unter Bezug auf die Gln. (5.3.-20) und (5.3.-49) kann man schreiben:

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = \varphi_{1,2'}^{\circ} - \varphi_{1,2''}^{\circ} - \varphi_{1,2'''}^{\circ} + \varphi_{1,2''''}^{\circ}$$

mit

$$\varphi_{1,2'}^{\circ} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{12,5}{2}\right)^2} + 1}{\left(\frac{15}{2}\right) \left(\frac{12,5}{2}\right)}$$

$$= 0,10857$$

$$\varphi_{1,2''}^{\circ} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{11,5}{2}\right)^2} + 1}{\left(\frac{15}{2}\right) \left(\frac{11,5}{2}\right)}$$

$$= 0,10773$$

$$\varphi_{1,2'''}^{\circ} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{12,5}{2}\right)^2} + 1}{\left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{12,5}{2}\right)}$$

$$= 0,10356$$

$$\varphi_{1,2''''}^{\circ} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arctan \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{11,5}{2}\right)^2} + 1}{\left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{11,5}{2}\right)}$$

$$= 0,10291$$

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = 0,00019.$$

Diese Rechnung kann entfallen, wenn das Diagramm des Bildes 5.5.-76 Verwendung findet. Es kann sofort am eingetragenen Linienzug abgelesen werden:

$$\varphi_{1,2}^{\circ} = 0,000195.$$

Beispiel 2

Eine Industriehalle soll mit einer Strahlungsheizung versehen werden. Für die wärmephysiologische Überprüfung einer behaglichen Kopftemperatur muß die

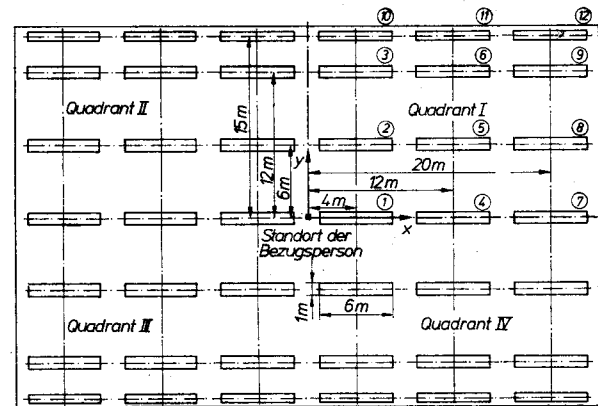


Bild 5.5.-104

Darstellung der geometrischen Verhältnisse bei Beispiel 5.5.5./2
Vertikaler Abstand der Platten über dem Kopf der Bezugsperson 8m; Randplatten sind um 45° nach dem Halleninnern geneigt.

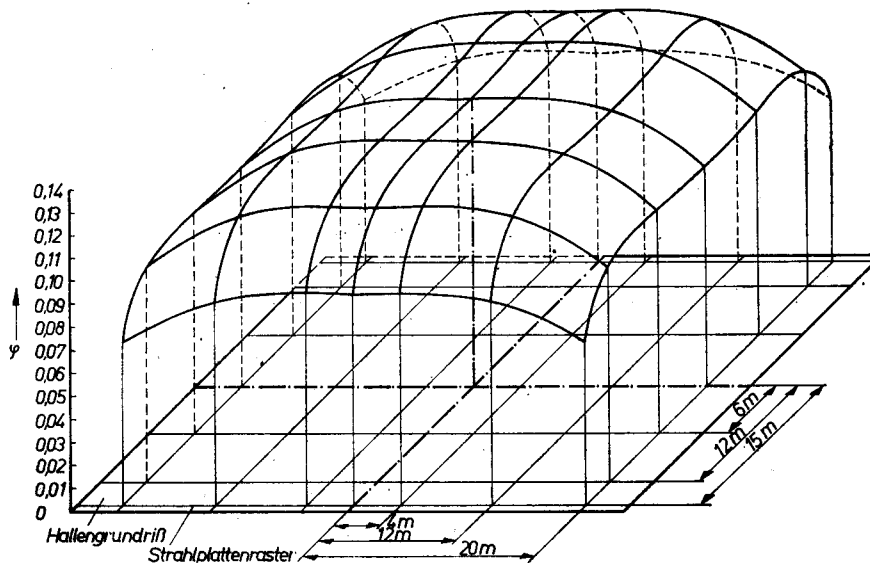


Bild 5.5.-105

Summe der Einstrahlzahlen bei über dem Grundriß wandernden Standorten des Flächenelementes

Einstrahlzahl der Schädeldecke — charakterisiert als Flächenelement —, bezogen auf die installierten Strahlplatten, berechnet werden. Die Anordnung der Platten entspricht Bild 5.5.-104.

• Lösung

Die benötigten Einstrahlzahlen können den Bildern 5.5.-33 und 5.5.-47 entnommen werden. Für den ausgewiesenen Standort der Bezugsperson ergeben sich nachfolgende Werte. Aus Symmetriegründen wird zunächst nur ein Quadrant betrachtet.

Platte 1	$\varphi = 0,19 \cdot 0,5 = 0,0095^*$	} waagerechte Platte
Platte 2	$\varphi = 0,0090$	
Platte 3	$\varphi = 0,0024$	
Platte 4	$\varphi = 0,0031 \cdot 0,5 = 0,0016^*$	
Platte 5	$\varphi = 0,0022$	
Platte 6	$\varphi = 0,0010$	
Platte 7	$\varphi = 0,0006 \cdot 0,5 = 0,0003^*$	
Platte 8	$\varphi = 0,0005$	
Platte 9	$\varphi = 0,0003$	
Platte 10	$\varphi = 0,0026$	} schräge Platte
Platte 11	$\varphi = 0,0013$	
Platte 12	$\varphi = 0,0005$	
Σ	$\varphi = 0,0312$	

* Es liegt nur die Hälfte der Platten im Quadranten I.

Da nur der I. Quadrant untersucht wurde, ergibt sich die Gesamt-Einstrahlzahl des Kopfes auf die Strahlplatten zu $\varphi = 4 \cdot 0,0312 = 0,125$. Wird die Berechnung der Einstrahlzahl für weitere Standorte wiederholt, die über den gesamten Hallengrundriß verteilt sind, ergeben sich die in Bild 5.5.-105 dargestellten Werte. Bemerkenswert ist dabei, daß die maximale Einstrahlzahl $\varphi_{\max} = 0,127$ nicht in der Raummitte, sondern außerhalb — etwa unter Platte 2 — auftritt. Dieser Effekt wird durch die geneigten Randstrahler bewirkt.

Tabelle 8 Zylinderfunktionen

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,0	+1,000	0,0000	∞	∞
0,1	1,003	+0,0501	2,4271	9,8538
0,2	1,010	0,1005	1,7527	4,7760
0,3	1,023	0,1517	1,3725	3,0560
0,4	1,040	0,2040	1,1145	2,1844
0,5	1,063	0,2579	0,9244	1,6564
0,6	1,092	0,3137	0,7775	1,3028
0,7	1,126	0,3719	0,6605	1,0503
0,8	1,167	0,4329	0,5653	0,8618
0,9	1,213	0,4971	0,4867	0,7165
1,0	1,266	0,5652	0,4210	0,6019
1,1	1,326	0,6375	0,3656	0,5098
1,2	1,394	0,7147	0,3185	0,4346
1,3	1,469	0,7973	0,2782	0,3725
1,4	1,553	0,8861	0,2437	0,3208
1,5	1,647	0,9817	0,2138	0,2774
1,6	1,750	1,085	0,1880	0,2406
1,7	1,864	1,196	0,1655	0,2094
1,8	1,990	1,317	0,1459	0,1826
1,9	2,128	1,448	0,1288	0,1597
2,0	2,280	1,591	0,1139	0,1399
2,1	2,446	1,745	0,1008	0,1227
2,2	2,629	1,914	0,08927	0,1079
2,3	2,830	2,098	0,07914	0,09498
2,4	3,049	2,298	0,07022	0,08372
2,5	3,290	2,517	0,06235	0,07389
2,6	3,553	2,755	0,05540	0,06528
2,7	3,842	3,016	0,04926	0,05774
2,8	4,157	3,301	0,04382	0,05111
2,9	4,503	3,613	0,03901	0,04529
3,0	4,881	3,953	0,03474	0,04016
3,1	5,294	4,326	0,03095	0,03563
3,2	5,747	4,734	0,02759	0,03164
3,3	6,243	5,181	0,02461	0,02812
3,4	6,785	5,670	0,02196	0,02500
3,5	7,378	6,206	0,01960	0,02224
3,6	8,028	6,793	0,01750	0,01979
3,7	8,739	7,436	0,01563	0,01763
3,8	9,517	8,140	0,01397	0,01571
3,9	10,37	8,913	0,01248	0,01400
4,0	11,30	9,759	0,01116	0,01248
4,1	12,32	10,69	0,009980	0,01114
4,2	13,44	11,71	0,008927	0,009938
4,3	14,67	12,82	0,007988	0,008872
4,4	16,01	14,05	0,007149	0,007923
4,5	17,48	15,39	0,006400	0,007078
4,6	19,09	16,86	0,005730	0,006325
4,7	20,86	18,48	0,005132	0,005654
4,8	22,79	20,25	0,004597	0,005055
4,9	24,91	22,20	0,004119	0,004521
5,0	27,24	24,34	0,003691	0,004045
5,1	29,79	26,68	3308	3619
5,2	32,58	29,25	2966	3239
5,3	35,65	32,08	2659	2900
5,4	39,01	35,18	2385	2597
5,5	42,69	38,59	2139	2326
5,6	46,74	42,33	1918	2083
5,7	51,17	46,44	1721	1866
5,8	56,04	50,95	1544	1673
5,9	61,38	55,90	1386	1499
6,0	67,23	61,34	1244	1344
6,1	73,66	67,32	1117	1205
6,2	80,72	73,89	1003	1081
6,3	88,46	81,10	09001	09691
6,4	96,96	89,03	08083	08693

Tabelle 8 (Fortsetzung)

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
6,5	106,3	97,74	0,0007259	0,0007799
6,6	116,5	107,3	06520	06998
6,7	127,8	117,8	05857	06280
6,8	140,1	129,4	05262	05636
6,9	153,7	142,1	04728	05059
7,0	168,6	156,0	04248	04542
7,1	185,0	171,4	03817	04078
7,2	202,9	188,3	03431	03662
7,3	222,7	206,8	03084	03288
7,4	244,3	227,2	02772	02953
7,5	268,2	249,6	02492	02653
7,6	294,3	274,2	02240	02383
7,7	323,1	301,3	02014	02141
7,8	354,7	331,1	01811	01924
7,9	389,4	363,9	01629	01729
8,0	427,6	399,9	01465	01554
8,1	469,5	439,5	01317	01396
8,2	515,6	483,0	01185	01255
8,3	566,3	531,0	01066	01128
8,4	621,9	583,7	009588	01014
8,5	683,2	641,6	008626	009120
8,6	750,5	705,4	007761	008200
8,7	824,4	775,5	006983	007374
8,8	905,8	852,7	006283	006631
8,9	995,2	937,5	005654	005964
9,0	1094	1031	005088	005364
9,1	1202	1134	004579	004825
9,2	1321	1247	004121	004340
9,3	1451	1371	003710	003904
9,4	1595	1508	003339	003512
9,5	1753	1658	003006	003160
9,6	1927	1824	002706	002843
9,7	2119	2006	002436	002559
9,8	2329	2207	002193	002302
9,9	2561	2428	001975	002072
10,0	2816	2671	001778	001865

14. Literaturverzeichnis

- [1] MICHEJEW: Grundlagen der Wärmeübertragung. 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1964.
- [2] GRÖBER/ERK/GRIGULL: Wärmeübertragung. 3. Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1963.
- [3] KOLLMAR/LIESE: Strahlungsheizung. 4. Aufl. München: Oldenbourg 1957.
- [4] BRONSTEIN/SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.
- [5] ROTHE: Höhere Mathematik, Teil III. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960.
- [6] FAXÉN: Beräkning av värmeavgivning från rör, ingjutna i betongplattor. Teknisk Tidskrift Mekanik (1937) Heft 3.
- [7] RYDBERG/HUBER: Värmeavgivning från rör i betong eller mark. Stockholm: Svenska värme- och sanitetstekniska föreningens handlingar IX, 1955.
- [8] SIEBER: Zusammensetzung der von Werk- und Baustoffen zurückgeworfenen Wärmestrahlung. Zeitschrift technische Physik Bd. 22 (1941) S. 130 bis 135.
- [9] SCHMIDT/ECKERT: Über die Richtungsverteilung der Wärmestrahlung von Oberflächen. Forschung Ingenieurwesen 6 (1935).
- [10] ELSNER: Grundlagen der Technischen Thermodynamik. 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1974.
- [11] KRAUSE: Die konvektive Wärmeabgabe von Heizdecken. Gesundheitsingenieur 80 (1959) Heft 10.
- [12] GLÜCK: Bausteine zur rationellen Projektierung von Wasserheizungsanlagen. Leipzig: VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung — Institut — 1975.
- [13] Taschenbuch Maschinenbau, Band 1 Grundlagen. 2. Aufl. Berlin: VEB Verlag Technik 1965.
- [14] JÜRGES: Der Wärmeübergang an einer ebenen Wand. Beihefte zum Gesundheitsingenieur, Reihe 1, (1924) Heft 19.
- [15] ECKERT: Optisch-experimentelle Bestimmung des Winkelverhältnisses. VDI-Zeitschrift Bd. 79 (1935) S. 1495.
- [16] VDI-Wärmeatlas, 2. Aufl. Düsseldorf: VDI-Verlag 1974.
- [17] ELSNER/KRAFT: Lehrbuch der Heizungs-, Lüftungs- und Klimatechnik. Dresden: Verlag Steinkopff 1969.
- [18] WINDISCH: Spezielle Lösungen der zweidimensionalen stationären Wärmeleitgleichung und ihre Anwendung zur Klärung des Wärmeübertragungsmechanismus bei Strahlplatten. Dissertation A, TU Dresden 1969.
- [19] Prospekt des VEB Wärmetechnik Neuruppin, 1975.
- [20] RIETSCHEL/RAISS: Heiz- und Klimatechnik. 15. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1970.
- [21] MACSKÁSY: Vorlesungen über Heizungs- und Lüftungstechnik an der TU Dresden, 1965.
- [22] WINDISCH: Spezielle Probleme beim Einsatz der Strahlplattenheizung in Industriehallen. Energieanwendung (1976) H. 8.
- [23] KRAFT: Wärmebedarf als Funktion des integrierten Systems Heizung-Bauwerk. Stadt- und Gebäudetechnik (1971) Heft 2.
- [24] KNABE: Ein Beitrag zur Wärmebedarfsberechnung, 1. Teil. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden (1967) Heft 4.
- [25] MACSKÁSY: Strahlungsheizung in Großräumen. Stadt- und Gebäudetechnik (1965) Heft 4.
- [26] HARTINGER: Der Reflektor und sein Wirkungsgrad. Zeitschrift für technische Physik (1925) Nr. 10.
- [27] HALBERTSMA: Die Vorausbestimmung der Lichtverteilungskurve eines spiegelnden Reflektors. Zeitschrift für technische Physik (1925) Nr. 10.
- [28] GLÜCK: Wahl der Auslegungsparameter von Wasserheizungsanlagen zur Erzielung optimaler Regelungsverhältnisse (I.). Stadt- und Gebäudetechnik (1971) Heft 1.
- [29] RAISS/MÖNNER: Der Heizwärmebedarf von Wohnhochhäusern. Gesundheitsingenieur (1965) Heft 8.
- [30] TAUTZ: Wärmeleitung und Temperatenausgleich. Berlin: Akademie-Verlag 1971.
- [31] CARSLAW/JAEGER: Conduction of heat in solids. Oxford: At the Clarendon Press 1959.
- [32] PETZOLD: Raumlufttemperatur. Berlin: VEB Verlag Technik 1976.
- [33] KNABE: Beschreibung des Temperaturverhaltens der Regelstrecke „Anlage—Raum“. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 2.
- [34] PLANK: Handbuch der Kältetechnik, 3. Band. Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1959.
- [35] GLÜCK: Schaltungsvorschläge zur Sicherung der geforderten Wassereintrittstemperaturen an korrosionsgefährdeten Kesseln. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 3/4.

- [36] GLÜCK: Heißdampfkühlung durch Kondensateinspritzung in der Heizungstechnik. Stadt- und Gebäudetechnik (1977) Heft 7.
- [37] KLUG: Diplomarbeit an der TU Dresden, Sektion Energieumwandlung, 1978 (unveröffentlicht).
- [38] GLÜCK: Druckverlusttabellen — Wasserheizungsanlagen. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1978.
- [39] RENTSCH/DRECHSLER: Strahlplatten in Industriehallen (Anwendungsrichtlinie). Bauforschung — Baupraxis. Bauinformation Berlin (1978) Heft 21.
- [40] KÜFFNER/DAMM: Strahlplattenheizungen im Industriebau. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 9.
- [41] KLENGEL: Zur Dimensionierung von Luftschleieranlagen — Verfahren von EL'TERMAN. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 4.
- [42] KLENGEL: Zum Problem der Lüftungsverluste an Hallentoren. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 9.
- [43] SPRUNG: Gas-Infrarot-Strahlungsheizung (Anwendungsrichtlinie). Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 9.
- [44] PRECHT/CHRISTOPHERSEN/HENSEL: Temperatur und Leben. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1955.
- [45] FANGER, Thermal Comfort-Analysis and Applications in Environmental Engineering (Thermische Behaglichkeit — Analyse und Anwendung in der Umwelttechnik). Kopenhagen: Danish Technical Press, 1970. Neue Auflagen: New York: McGraw-Hill-Books Co 1973.
- [46] MANGUM/HILL: Thermal Comfort in Indoor Environments (Thermische Behaglichkeit des Raumklimas). Reprint eines Symposium-Berichtes, Washington 1977.
- [47] RENNER: Beitrag zur Methodik der thermischen Optimierung von Produktionsflachbauten unter Berücksichtigung sommerlicher Bedingungen. Dissertation A, TU Dresden 1973.
- [48] LEBMANN: Praktische Arbeitsphysiologie. Stuttgart: Georg-Thieme-Verlag 1953.
- [49] Tafeln für den Kalorienumsatz bei körperlicher Arbeit. Sonderheft der REFA-Nachrichten. Darmstadt: Verband für Arbeitsstudien REFA E. v. 1959.
- [50] WINDISCH: Präzisierung einiger wärmephysiologischer Kriterien für die Auslegung von Strahlplattenheizungen in Großräumen. Stadt- und Gebäudetechnik (1978) Heft 7, S. 202—208.
- [51] OLESEN/FANGER/JENSEN/NIELSEN: Comfort Limits for Man Exposed to Asymmetric Thermal Radiation (Behaglichkeitsgrenzen bei asymmetrischer Wärmestrahlung). Building Research Station, London 1972. Published by HMSO 1973.
- [52] MISSENARD: Théorie simplifiée du thermomètre résultant — thermostat résultant (Theorie der resultierenden Temperatur). Chauffage et Ventilation 12 (1935) S. 347.
- [53] MACSKÁSY: Központi Fűtés-Előtanulmányok (Die Zentralheizungen — Grundlagen). Budapest: Tankönyvkiado 1971.
- [54] BÜTTNER: Physikalische Bioklimatologie. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. 1938.
- [55] KRAFT: Lehrbuch der Heizungs-, Lüftungs- und Klimatechnik, Band 1: Heizungstechnik. 3. Aufl. Dresden: Verlag Theodor Steinkopff 1976.
- [56] KOLLMAR: Wärmephysiologische Berechnungen bei Heizdecken, Strahlplatten und Infrarotstrahlern. Gesundheitsingenieur 81 (1960) Heft 3, S. 65—84.
- [57] REINDERS: Wärmeaustausch durch Strahlung — Einführung in die technische Anwendung. Düsseldorf: VDI-Verlag 1961.
- [58] BACH/HESSLINGER: Warmwasserfußbodenheizung. Karlsruhe: Verlag C. F. Müller 1978.
- [59] DIETZE: Heizlastberechnung. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1979.
- [60] TGL 26760: Heizlast von Bauwerken. 1976/80.
- [61] DIN 4701: Regeln für die Berechnung des Wärmebedarfs von Gebäuden. 1978.
- [62] TGL 190-255: Qualitätsforderungen, Dampf, Wasser, Rücklaufkondensat, Rücklaufwasser. 1970.
- [63] VDI 2035: Korrosionsschutz in Wasserheizungsanlagen. 1970.
- [64] TGL 10707: Feuerstätten und Wärmegeräte in Gebäuden. 1972.
- [65] TGL 32603: Mikroklima in Arbeitsräumen. 1976.
- [66] TGL 28706: Bautechnischer Wärmeschutz. 1973/1981 (TGL 35424)
- [67] DIN 4108: Wärmeschutz im Hochbau. 1974.
- [68] DIETZE/BRAND: Berechnung der Heizlast für hohe Räume. Stadt- und Gebäudetechnik (1979) Heft 7.
- [69] SCHLAPMANN: Konvektion bei der Fußbodenheizung, Entwicklung einer Prüfmethode (BMFT ET 5119 A). Universität Stuttgart, Abteilung Heizung-Lüftung-Klimatechnik, 1980.

15. Namen- und Sachwörterverzeichnis

Abgasführung, direkt/indirekt 461
 Abgasschornstein 461
 Abgastemperatur, indirekte Abgasführung 461
 Abmessungen, charakteristische 23
 Abnehmeranschluß
 Fernwärme 452
 Kesselanlage 451
 kombinierter 452
 Niedertemperaturquellen 453
 Abnehmersysteme 453
 Beimischstationen 457
 Absorption 12
 Absorptionskoeffizient
 Baustoffe 13, 485
 Gase 20
 Haut 361
 Metalle 484
 Abstand der Infrarotstrahler längs der Strahlerreihe, relativer 420
 Aggregatzustandsänderung an der Heizfläche 465
 Aktivität des Menschen 353
 Anordnung der Heizflächen 376
 Hallenbauten mit Infrarotstrahlern 418
 Hinweise 422
 Hallenbauten mit Strahlplatten 402
 Hinweise 417
 in Abhängigkeit von den Wärmeströmen 415
 Wohn- und Gesellschaftsbau mit Flächenheizung 396
 Hinweise 402
 Arbeitsenergieumsatz 354
 Arbeitsplatzbeheizung 462
 Asymmetrie der Strahlungstemperatur 373
 Aufbau der Heizelemente 423
 Elektrostrahler 432
 Gasstrahler 431
 Lamellenelement 427
 Massivelemente 424
 Ausdehnungskoeffizient, thermischer 491
 Ausgabewerte, Rechenprogramm
 Einstrahlzahl 322
 Lamellenelemente, Strahlplatten 271
 Massivelemente 94
 Auslegung Halbblast/Vollast 442
 Außenwandheizung
 Anordnung der Heizflächen 396
 Berechnung, Massivplatten 36
 Wärmeabgabe (Tabellen) 159
 Baustoffe, Stoffwerte 485
 Behaglichkeit 352
 Empfindungstemperatur 367
 Hauttemperatur 353
 Oberflächentemperatur 366
 Schweißverdunstung 353
 trockene Wärmeabgabe 363
 Behaglichkeitsbereich 364
 Behaglichkeitsgleichung 364
 Beheizung
 der Massivelemente 451
 der Strahlplatten 451
 Beimischstation 457
 Belastungsgrad 433
 Beleuchtungsstärke 282
 Bemessungsbeispiele
 Fußbodenheizung 469
 Infrarotheizung 480
 Strahlplattenheizung 473
 BESSELSche Funktion 57, 498
 Betonplatte
 mit Elektrokabeln 468
 mit Rohrregister 426
 Bewegungsgleichung, NAVIER-STOKES 24
 Bezugstemperatur für Stoffwerte 23
 BINDER-SCHMIDT-Verfahren 443
 Blechlamelle
 Konstruktion 427
 Temperaturverteilung 253
 Wärmeabgabe 254
 praktische Berechnungsverfahren 263
 Wärmestrom 241, 246, 250
 BOLTZMANNsche Konstante 10
 Bruttoenergieumsatz 355
 CHRENKO 373
 clo-Maßstab 362
 Dämmstoffe, Stoffwerte 488
 Dampf, Strahlplattenheizung 452, 453
 Dauerheizung, Arbeitsplatz 464

Deckenheizung
 Anordnung der Heizfläche 396
 Berechnung
 Lamellenelemente 239
 Massivplatten 36
 Konstruktion 425
 Wärmeabgabe (Tabellen)
 Außendecke 140
 Innendecke ($t_a = 20^\circ\text{C}$) 108
 Innendecke ($t_a = 15^\circ\text{C}$) 124
 Deckentemperatur 272
 Dichte
 ausgewählte Stoffe 485
 Luft 489
 Wasser 490
 Drosselventileinstellung 458
 Druckverluste
 Rohre 459
 Strahlplatten 459
 DU BOIS 354
 Durchmesser, gleichwertiger 23
 Durchlässigkeit, Durchlaßkoeffizient 12
 Haut 361
 Normalglas 13
 ECKERT 14, 15
 Effektivitätskennzahl 412
 EGBERT 20
 Eingabewerte, Rechenprogramm
 Einstrahlzahl 312
 Lamellenelemente, Strahlplatten 269
 Massivelemente 87
 Einstrahlwinkel 17
 Einstrahlzahl
 Definition 18, 290
 Ermittlung
 analytische 293
 grafische 291, 408
 numerische 306
 Flächenbegrenzungen 307
 mathematisches Modell 306
 schattenerzeugende Bauteile 308
 strahlende Oberflächen 309
 Ebene 310
 elliptischer Zylinder 311
 Fläche zweiter Ordnung 310
 Flächenelement 309
 Kreiszylinder 311
 Kugel 312
 kugelförmiges Element 309
 Mensch - Umgebung 358
 Standardlösungen 296
 Fläche auf Fläche 299, 349, 502
 bei großen Abständen 301
 Flächenelement auf Fläche 296, 324, 500
 kugelförmiges Element auf Fläche 298, 338, 501
 streifenförmiges Flächenelement auf Fläche 297, 337
 Einstrahlzahlen
 erforderliche, in Hallenbauten 410
 kugelförmige Elemente
 auf Infrarotstrahler 418
 auf Strahlplattenbänder 403
 standortabhängige Verteilung in Hallen 408
 Strahlplattenbänder auf Umfassung 410
 Einzelrohr im Beton, Wärmeabgabe 43
 Eis, Stoffwerte 489
 Elektroheizung, Flächenheizung 468
 Elektrokabel im Beton, Oberflächentemperatur 468
 Elektrostrahler 432
 Strahlungsverteilung 283
 Emission 13
 Emissionskoeffizient 13
 Anstriche 484
 Baustoffe 484
 Metalle 14, 484
 Empfindungstemperatur 365, 367, 392, 395
 Messung 370
 Energiequellen, Niedertemperatur 453
 Energiestrom bei Infrarotstrahlern, spezifischer 282
 Erdreich
 mit aufliegenden Heizplatten 84
 mit Heizrohren 82
 Wärmeenergie, gespeicherte 444
 Erdstoffe, Stoffwerte 488
 Erträglichkeitsbereich 365
 Estrich mit Rohrregistern 423
 Exponential-Integral-Funktion (Ei) 75, 499
 Extinktionskoeffizient 20
 FANGER 364
 Farbeinfluß, Emissionskoeffizient 12
 FAXÉN 36
 Fernwärme, Anschluß der Abnehmer 452
 Fertigung der Heizelemente 423
 Fläche, isotherme 29

Flächenheizung
 Anordnung 396
 Hinweise 402
 bei feuchter Oberfläche 465
 mit elektrischen Heizkabeln 468
 Komplexbeispiel 469
 Wärmeabgabe 36, 108
 Fußbilder, Rechenprogramm
 Einstrahlzahl 316
 fiktiver Wärmebedarf 388
 Lamellenelement 273
 Massivelemente 92
 tatsächlicher Wärmebedarf 379
 FOURIERSche Differentialgleichung 29, 442, 448
 FOURIERSches Gesetz 29
 Freiflächenbeheizung 462
 FRENGER-Deckenheizung 427
 Fußbodenbeläge, Stoffwerte 486
 Fußbodenheizung
 Anordnung der Heizflächen 396
 Berechnung
 Massivplatten 36
 Lamellenelemente 239
 Komplexbeispiel 469
 Konstruktion 426
 Wärmeabgabe (Tabellen)
 Außenfußboden 207
 Heizplatte auf Erdreich
 ($t_a = 20^\circ\text{C}$) 223
 ($t_a = 15^\circ\text{C}$) 231
 Innenfußboden
 ($t_a = 20^\circ\text{C}$) 175
 ($t_a = 15^\circ\text{C}$) 191
 Fußbodentemperatur 371
 Strahlplattenheizung 418
 Kurzzeitheizung 463
 Gaskörper 20
 Gasstrahler
 Besonderheiten beim Einsatz 461
 Komplexbeispiel 480
 Konstruktion 431
 Oberflächentemperatur 289
 Gasstrahlung 19
 GAUSSSches Fehlerintegral 443
 Gebäudelüftung, Beeinflussung der Strahlungsheizung 460
 Gesamtstrahlungsenergie, Infrarotstrahler 286
 Gesamtstrahlungskoeffizient
 beliebig orientierte Flächen 18
 Körper und Umhüllung 16
 parallele Platten 18
 Gesamtwärmeabgabe
 Heizflächen 26
 Lamellenelemente 263
 Mensch 353
 Gesamtwärmeübergangskoeffizient 26
 Geschwindigkeit, mittlere 23
 Gestaltung der Stromkreise 457
 Gleichlaufsystem 458
 Glühkörper, Oberflächentemperatur 289
 GRASHOF-Zahl 24
 Grenzschicht 22
 Temperatur 23
 Grundumsatz 354
 Gütegrad, Reflektor 283
 HALBERTSMA 283
 Hallenlüftung 460
 Hallentore 460
 HANKELSche Funktion 57
 HARTINGER 283
 HÄUSSLER 466
 Hauttemperatur 353
 Heizelemente
 Aufbau 423
 Wärmeabgabe
 Lamellenelemente 239
 Massivplatten 36, 108
 Wärmeenergie, gespeicherte 443
 Heizfläche, Anordnung
 bei Flächenheizung 396
 Hinweise 402
 bei Gasstrahlern 418
 Hinweise 422
 bei Strahlplattenheizung 402
 Hinweise 417
 Reihenschaltung, Regelung 440
 Heizflächenexponent 434
 Heizkabel 468
 Heizkurven (siehe Temperaturkurven)
 Heizlast 376
 Heizmedien
 Strahlplatten 453
 Temperaturen 86, 242, 244, 246
 Heizplatten auf Erdreich 84
 Heizregister 423
 Hohlraumflächen 16
 HOTTEL 20
 HUBER 36

- IBIS-Deckenheizung** 428
Infrarotstrahler
 Elektro-
 Konstruktion 432
 Wärmeabgabe 282
 Gas
 Anordnung 418
 Hinweise 422
 Besonderheiten beim Einsatz 461
 Komplexbeispiel 480
 Konstruktion 431
 Oberflächentemperatur 289
 Wärmeabgabe 282
Infrarotstrahlung 10
Infrarotstrahlungsheizung, Temperaturen, zulässige 376
Intensität
 spektrale 20
 Verteilung 10
KALOUS 36
Kesselanlage, Anschluß 451
KIRCHHOFFSches Gesetz 14
Klimakomponenten, thermische 364
KNABE 377
Koeffizient
 spektraler 15
 Strahlungskoeffizient 13
 Wärmedurchgangskoeffizient 33
 Wärmeleitkoeffizient 29
 Wärmeübergangskoeffizient 20, 24
Kohlendioxid 20, 482
KOLLMAR 5, 36, 373
Komplexbeispiel
 Fußbodenheizung 469
 Infrarotheizung 480
 Strahlplattenheizung 473
Konstruktion
 Energieverteilungskurven 285
 Heizelemente 423
Konvektion
 erzwungene 27
 freie 24
 indirekte 20
KOPKO 36
Körperkerntemperatur 352
Körperoberfläche 354
Korrekturfaktor, Belastungsgrad 433
KRAFT 377
KRAUSSOLD 434
Kupferrohre für Rohrregister 423, 429
Kurzzeitheizung 462
LAMBERTSches Kosinussgesetz 11
Lamellenelemente
 Beheizung 451, 452
 Heizmedientemperatur 242, 244, 246
 Heizrohranschluß 239, 244, 264
 heterogene 255
 homogene 253
 Konstruktion 427
 Wärmeabgabe 239
 praktische Näherungen 264
LAPLACESche Differentialgleichung 20, 63
Lastanpassung, Selbstregulierungseffekt 446
Lichtstärke 282
Lichtstrom 282
LÜCK 36
Luft, Stoffwerte 489
Lufttemperaturprofile 377
Lüftung
 Beeinflussung der Strahlungsheizung 460
 Gasstrahlerheizung 461
 Hallen 460
 Luftschleier, Luftschleusen 460
MACDONALDSche Funktion 57, 498
MACSKÁSY 5, 239, 362, 372, 376, 387, 430
Massivlamelle mit Blechlamelle
 aufliegend 258, 265
 eingeformt 255, 265
Massivplatten
 beheizt 36
 eindimensionale Wärmeleitung 36
 Wärmeabgabe (Tabellen) 108
 zweidimensionale Wärmeleitung 63
 Wärmeabgabe (Tabellen) 108
 Beheizung 451, 452
 Konstruktion 423
Medium
 diathermes 12, 15
 Heizmedium 453
 Temperatur, mittlere 23
Metalle, Stoffwerte 484, 489
NAVIER-STOKESsche Bewegungsgleichung 24
Nennbelastung, Gasstrahler 480
NEWTONSches Abkühlungsgesetz 22, 357
Niedertemperatur-Energiequellen 453
NUSSELT 36
NUSSELT-Zahl 24
Oberflächentemperatur
 Lamellenelemente 254
 heterogen 257, 262
 homogen 254
 Massivplatten 36
 Tabellen 108
 Mensch 358, 361, 366
 Strahlplatten 282
 Umfassungsflächen 418
OLESEN 360
Optimierung von Massivelementen 104
 Strahlplatten 280
PLANCKSches Strahlungsgesetz 10
 Wirkungsquantum 10
Polyäthylenrohre für Register 423
Polypropylenrohre für Register 423, 427
PRANDTL-Zahl 24, 490
Programmablaufpläne (siehe Flußbilder)
Punktstrahlung 18
Putz mit eingebetteten Rohrregistern 425
Randbedingung
 erster Art 29
 dritter Art 29
 zweiter Art 29
Randwärmeabgabe
 Lamellen 253
 Massivplatten 44, 56, 59
 praktische Berücksichtigung 470
 Registerecke 60
Raumwinkel 11, 19, 286
Rechenprogramm
 Einstrahlzahl 312
 fiktiver Wärmebedarf 387
 Lamellenelemente 269
 Massivelemente 87
 tatsächlicher Wärmebedarf 377
Reflektoren, Wirkung 283
Reflexion 12
Reflexionskoeffizient
 Baustoffe 13
 Haut 361
Regelungsverhalten 432
 instationär 442
 stationär 433
Reihenschaltung von Heizflächen 441
REYNOLDS-Zahl 22, 24
 Mindestwerte bei Heizregistern 453
Rippenfußtemperatur
 Lamellenelemente 239, 244
 Massivplatten 38, 41
 radiale Wärmeleitung 58
 Rohranschluß an Lamellen 264, 427
 Rohranzahl, Strahlplatte 282
 Rohrdruckverlust 459
 Rohreinbettung 424
 Rohrmaterial 423
 Rohrströmung 23
 Rohrtemperatur, Massivplatten
 beheizt 37, 66, 108
 unbeheizt 73
 Wassertemperatur, Zusammenhang 86, 242, 244, 246
 Rohrwärmeabgabe 27, 35
 in Lamellenelementen 264, 454
 in Massivplatten 453
 Rücklaufbeimischung 457
 Ruheumsatz 354
RYDBERG 36
SCHACK 27
 Schaltung von Rohrregistern 423
 Schleusen, Luftschleusen 460
SCHMIDT 14, 434
 Schnee, Stoffwerte 489
 Schneeschemelanlage 465
 Schwarzkugelfthermometer 370
 Schweißnaht
 optimale Breite 280, 429
 Wärmestrom 244
 Schweißverdunstung 353, 357
 Schwimmhallenheizung 466
 Selbstregulierungseffekt 446
 Speicherverhalten von Heizelementen 442
 Spiegel, idealer 12, 15
 Stahlrohre für Register 423, 425
 Starkasteneffekt 12
STEFAN-BOLTZMANNsches Gesetz 11, 13, 20, 361, 374
 Stirntemperatur 372
 Stoffwerte 484
 Strahlblechdicke 281
 Strahler
 grauer 13
 Infrarotstrahler 282, 419, 431, 480
 Oberflächentemperatur 289
 relativer Abstand 420
 schwarzer 10, 12, 13
 selektiver 20
Strahlplatte
 Beheizung 451
 mit Dampf 452, 453
 mit Wasser 451, 453
 Druckverlust 459
 Konstruktion 428
 Rohranzahl 282
 Rohrdruchmesser 281
 Schweißnahtbreite 280
 Strahlblechdicke 281
 Wärmeabgabe 239, 281
 Wärmeübergangskoeffizient 280
 Wassergeschwindigkeit 281
Strahlplattenanordnung
 abhängig vom Wärmestrom 415
 geneigte Plattenbänder 406, 409, 410, 412, 413
 Untersuchungen 403
Strahlplattenbänder
 effektive Breite 403
 Einstrahlzahlen 404
 optimale Einordnung 410
Strahlplattenheizung 403
 Einflüsse durch Lüftung 460
 Gestaltung 453, 457
 Komplexbeispiel 473
 Regelung 432
 Temperatur, zulässige 375
Strahlung 10
 Halbraumstrahlung 11
 Richtung 11, 17
 selektive 19
 sichtbare 10
 unpolarisierte 10
 Wärmestrahlung 10
Strahlungsaustausch
 Fläche und Fläche 18
 Flächenelement und Fläche 17
 Gasvolumen und Oberfläche 19
 Körper und Umhüllung 16
 kugelförmiges Element und Fläche 18
 parallele Platten 15
 Strahlungsfläche, Mensch 360
Strahlungsgesetz
 KIRCHHOFFSches 14
 LAMBERTSches 11
 PLANCKSches 10
 STEFAN-BOLTZMANNsches 11, 13, 20, 361, 374
 WIENSches 10
 Strahlungsheizung, spezielle 462
 Strahlungskoeffizient 13, 485
 des Menschen 358, 361
 Strahlungsrichtung 11
 Strahlungstemperatur
 Annahmen 416
 Einfluß der Strahlplattenverteilung 414
 Infrarotstrahler 289, 376, 421
 Strahlplatten 282, 376
 Umgebung 21, 358
 Strahlungsverteilung, Infrarotstrahler 283, 288
 Strahlungswärmeabgabe des Menschen 358
STRAMAX-Deckenheizung 428
 Stromkreise, Gestaltung 457
 Strömungsform 22
 Summenkurven von Einstrahlzahlen 351, 420
 Systemgestaltung 451
 Systemgröße 455
 Systemwahl 455
Tabellen, Wärmeabgabe, Massivplatten 106
Taupunkt, Abgas 461
Teilflächenbeheizung 462
Teilwärmedurchgangskoeffizient 34
 ebene Wand 35
 zylindrische Wand 35
Temperatur
 absolute 10
 Elektrokabel, eingegossen 468
 Empfindungstemperatur 365, 367, 392, 395
 fiktiver Strahler 289
 Glühkörper 289
 mittlere
 Lamellen 241, 253
 heterogene 257, 261
 Schweißnaht 248, 252
 Massivplatten 37, 41, 72, 83
 Strömung 23
 Oberfläche (siehe Oberflächentemperatur)
 Rohr (siehe Rohrtemperatur)
 Wasser (siehe Heizmedientemperatur)
Temperaturdynamik, Raum 447
Temperaturfaktor 20
Temperaturfeld 28
 Heizrohr, Lamellenelement 246, 252
 Massivplatte 40, 70
Temperaturgradient 24, 29
Temperaturkurven
 praktische 439
 theoretische 435
Temperaturleitkoeffizient 29, 490

- Temperaturprofile
 - horizontal 416
 - Raumluft 377
- Temperaturspreizung 453
- Temperaturverlauf
 - ebene Wand 30
 - zylindrische Wand 31
- Temperaturverteilung
 - beheizte Platten 36
 - eindimensionale Betrachtung 36
 - Einzelrohr 43
 - zweidimensionale Betrachtung 63
 - mehrschichtige Platte 71
 - Lamellenelemente 239
 - heterogene Lamellen 255
 - homogene Lamellen 253
- Thermoregulation 352
- TICHELWANN-System 458
- Tore, Luftschleier 460
- Transpiration 356
- Treibhauseffekt 12
- Übertemperatur (siehe Temperatur)
- Ultrarotstrahlung 10
- Ventilstellung 458
- Verbindung
 - kraft- und formschlüssig 239, 428
 - stoffschlüssig 244, 428
- Verdunstung 466
- Verschlebungsgesetz, WIENSCHES 10
- Verteilung
 - Einstrahlzahlen 351, 408
 - erforderliche, in Hallenbauten 410
 - längs einer Strahlerreihe 420
 - Strahlung, Infrarotstrahler 283
 - praktische 288
- Verteilungsleitung, Anordnung 458
- Viskosität
 - Luft 489
 - Wasser 490
- Volldeckenheizung, Temperatur, zulässige 375
- Wandheizung
 - Anordnung 396
 - Wärmeabgabe 36
 - Tabellen 156, 159
- Wärme, spezifische
 - ausgewählte Stoffe 484
 - Luft 489
 - Wasser 490
- Wärmeabgabe
 - beheizte Lamellen 239
 - heterogene Lamellen 257, 262
 - homogene Lamellen 254
 - Strahlplatten 281
 - Kombination mit Heizrohr 264
 - beheizte Massivplatten 36
 - eindimensionale Wärmeleitung 36
 - gekrümmte Richtung 55
 - gerade Richtung 36
 - ungleiche Umgebungstemperatur 40
 - Einzelrohr 43
 - radiale Wärmeleitung 56
 - vereinfachte Berechnung 48
 - zweidimensionale Wärmeleitung 63
 - mehrschichtige Platte 71
 - ungleiche Umgebungstemperaturen 72
 - vereinfachte Berechnung 75
 - Heizplatten auf Erdreich 84
 - Infrarotstrahler 282, 287
 - Mensch 355
 - Wärmeabgabe-Diagramme
 - für Flächen 26
 - für Strahlplatten 281
 - Wärmeabgabe-Tabellen für Massivplatten 106
 - Außendecke 140
 - Außenfußboden 207
 - Außenwand 159
 - Fußboden Erdreich
 - ($t_i = 20^\circ\text{C}$) 223
 - ($t_i = 15^\circ\text{C}$) 231
 - Innendecke
 - ($t_a = 20^\circ\text{C}$) 108
 - ($t_a = 15^\circ\text{C}$) 124
 - Innenfußboden
 - ($t_a = 20^\circ\text{C}$) 175
 - ($t_a = 15^\circ\text{C}$) 191
 - Innenwand 156
 - Wärmebedarf 376
 - fiktiver 387
 - genormter (standardisierter) 395
 - Vorschläge
 - Hallenbauten 394
 - Wohnbauten 390
 - tatsächlicher 377
 - Wärmebedarfsgrad 455
 - Wärmebereitstellungssysteme 451
 - Wärmebilanz des Menschen 353
 - Wärmebilanzsystem, Raum 377
 - Wärmebildung des Menschen 354
 - Wärmedämmstoffe, Stoffwerte 487
 - Wärmedurchgangskoeffizient
 - ebene Wand 33
 - Rohre 34
 - Wärmedurchlaßwiderstand, Luftschichten 489
 - Wärmeenergie, gespeicherte
 - im Erdreich 444
 - im Heizelement 443
 - Wärmeleitkoeffizient
 - ausgewählte Stoffe 485
 - Luft 489
 - Wasser 490
 - Wärmeleitung
 - Grundlagen 28
 - ebene Wand 30
 - mehrschichtig, parallel 32
 - unregelmäßig berandete Wand 32
 - zylindrische Wand 31
 - Platten mit Heizrohren
 - einschichtig 36, 63
 - mehrschichtig 71
 - unendlich dick 82
 - Wärmeleitwiderstand, Kleidung 362
 - Wärmeliefergrad 455
 - Wärmephysiologie 352
 - Wärmepumpe 453
 - Wärmestrahlung 10
 - der Haut 361
 - Wärmestrom
 - durch Konvektion 22
 - durch Leitung 30
 - durch Strahlung 15
 - von Fläche zu Fläche 18
 - von Flächenelement zu Fläche 18
 - von Gasvolumen zu Fläche 20
 - von kugelförmigem Element zu Fläche 20
 - Wärmeübergangskoeffizient
 - Konvektion 24
 - erzwungene 27
 - Wasser in Rohren 28
 - freie 24
 - Strahlplatten 280
 - Mensch 357
 - Strahlung 20
 - Wärmeübertragung
 - Grundlagen 10
 - Konvektion 22
 - Leitung 28
 - Strahlung 10
 - Wärmedurchgang 32
 - Wasser, Stoffwerte 490
 - Wasserdampf 20
 - Wasserfilm auf Heizfläche 466
 - Wassergeschwindigkeit
 - in Heizrohren 453
 - optimale, in Strahlplatten 281
 - Wassertemperatur
 - Heizmedium 86, 242, 244, 246
 - mittlere 23
 - WIENSCHES Verschlebungsgesetz 10
 - WINDISCH 239, 429
 - Zähigkeit (siehe Viskosität)
 - Zylinderfunktion 57, 498
 - Zylinderkoordinaten 29