Berechnung der Einstrahlzahlen in einem neuartigen Raummodell

Bernd Glück

Ein neuentwickeltes, bausteinartig aufgebautes Raummodell betrachtet vorrangig die wärmetechnischen Transportvorgänge im Raum und nimmt die wärmephysiologischen Überprüfungen vor. Dabei spielt verständlicherweise der Strahlungsaustausch und damit die Berechnung der Einstrahlzahlen eine bedeutende Rolle. Behandelt werden die Darstellung der Raumgeometrie sowie die Grundlagen zur numerischen Berechnung der Element- und Flächeneinstrahlzahlen. Die detaillierte numerische Ermittlung der Flächeneinstrahlzahlen unter Beachtung von Hindernissen im Strahlungsgang sowie ein Vorschlag zur Fehlerkompensation schließen sich an.
Die numerische Berechnung der Elementeinstrahlzahlen für wärmephysiologische Betrachtungen folgt in einem separaten Aufsatz.
Eine Übersicht zum gesamten Raummodell findet sich im Internet http://www.rom.de.

Einleitung

Die Strahlungsberechnungen schließen beim oben genannten Raummodell wahlweise auch die Modellierung des Interieurs mit ein. Dadurch entstehen sehr komplizierte Raumgeometrien, so daß die Ermittlung der Einstrahlzahlen numerisch erfolgen muß. Es gibt eine Vielzahl von Berechnungsvorschlägen, die z. B. in [1; 2; 3; 4] aufgezeigt sind. Die *Effektivität der Berechnung* ist im Zusammenhang mit der *Erfassung der Raumgeometrie* zu betrachten. Eine relativ günstige Möglichkeit wird nachfolgend dargestellt.

Hinweis zur Variablenschreibweise: Im Text werden die Charakterisierung der Variablen und die Laufvariablen als Indizes geschrieben, z. B. stellt $A_{D,i}$ die Fläche des Dreiecks mit der Nummer i dar. Bei EDV-Darstellungen (Flußbilder, Ein- und Ausgaben) werden die Indizes auf Zeilenhöhe und die Laufvariablen in eckige Klammern gesetzt, z. B. AD[i]. In den In- und Outputs sind beide Darstellungen vermerkt.

Raumgeometrie

Die *Oberflächen* der Raumumfassungen und des Interieurs werden durch *beliebig orientierte Ebenen* gebildet, mit denen die realen – evtl. auch gekrümmten – Raumbegrenzungen mit frei wählbarer Genauigkeit nachbildbar sind.

Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, ROM-Zentrale, Postfach 70 12 40, 22012 Hamburg.

Eine Ebene E wird durch drei Punkte (A, B, C), die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig beschrieben (*Bild 1*). Eine Parameterdarstellung lautet:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{v} + t_2\mathbf{w}, \tag{1}$$

wobei

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \tag{2}$$

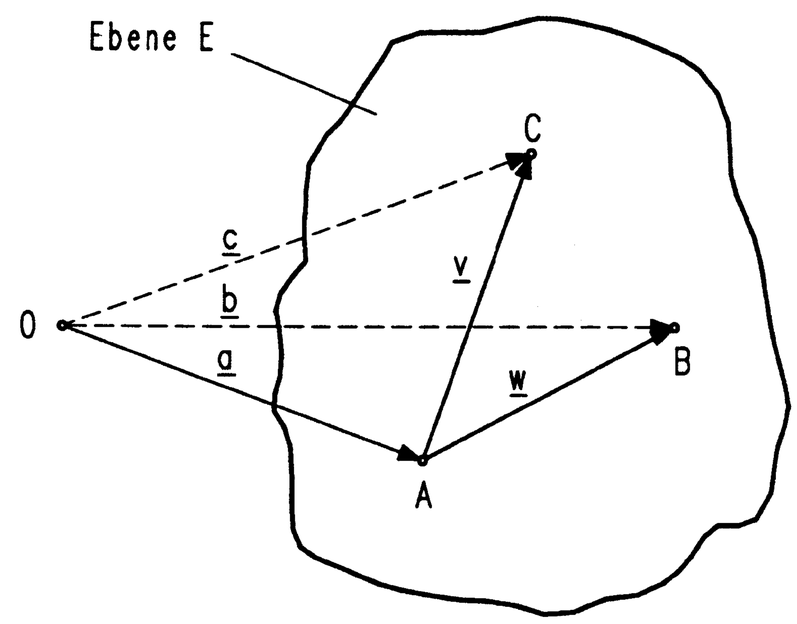


Bild 1. Definition einer Ebene durch die drei Punkte A, B, C mit den Zuführungsvektoren **a, b, c.** Das Dreieck ABC wird durch die beiden Vektoren **v** = **c** – **a** und **w** = **b** – **a** aufgespannt.

```
UP: FLAEEIN

Eingabe (xA, yA, zA, xB, yB, zB, xC, yC, zC, xD, yD, zD)
Es erfolgt eine automatische Zählung der Flächen i,
beginnend bei i = 1

Zuordnung der Koordinaten zu einem Vektoren
a: a1[i] = xA, a2[i] = yA, a3[i] = zA
b: b1[i] = xB, b2[i] = yB, b3[i] = zB
c: c1[i] = xC, c2[i] = yC, c3[i] = zC

Darstellung des Dreiecks ABC: Fläche i
Eingabe (z[i], r[i])
Wenn xD, yD, zD belegt dann:
a: a1[i] = xD, a2[i] = yD, a3[i] = zD
b: b1[i] = xC, b2[i] = yC, b3[i] = zC
c: c1[i] = xB, c2[i] = yB, c3[i] = zB

Darstellung des Dreiecks DBC: Fläche i + 1
Eingabe (z[i + 1], r[i + 1])
Kopiermöglichkeit bei der Eingabe vorsehen
imax = Höchstwert von i
```

Bild 2. Datenflußplan FLAEEIN zur Organisation der Flächeneingabe.

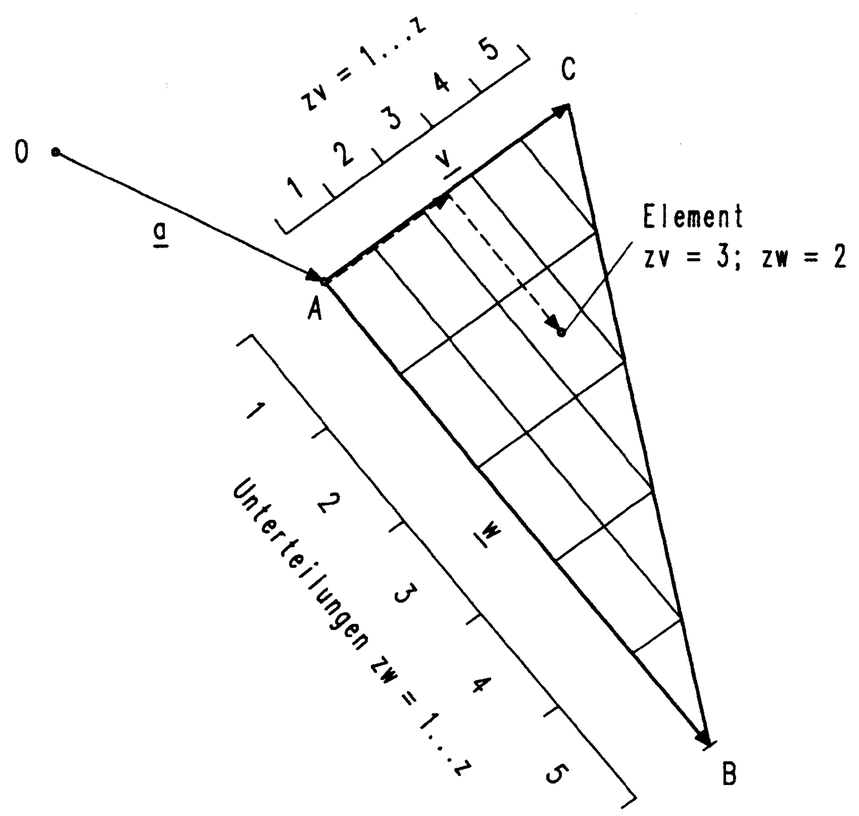


Bild 3. Dreiecksfläche mit Unterteilung der Begrenzungsvektoren **v** und **w** in je z Abschnitte, die durch die Laufvariablen zv und zw gezählt werden.

zwei nichtparallele Richtungsvektoren darstellen. Es ist für die weitere Bearbeitung am einfachsten, wenn man alle geometrischen Oberflächen von Körpern in Dreiecke zerlegt, da mit Angabe der *drei Eckpunkte* sowohl die *Ebene* als auch die *Begrenzungen fixiert* sind. Die Zerlegung der realen Flächen in Dreiecke ist allerdings aufwendig.

Mit geeigneten Eingabehilfen kann jedoch eine automatisierte Zerlegung von beliebigen Vierecken in Dreiecke erfolgen. Im Unterprogramm FLAEEIN (Flächeneingabe) (*Bild 2*) ist dies symbolisch dargestellt. Falls geprüft werden soll, ob die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene liegen, so ist das Spatprodukt zu bilden. Es muß Null ergeben, d. h., der Spat besitzt kein Volumen.

Input FLAEEIN

xA, yA, zA	xA, yA, zA	m	Koordinaten des Punktes A
xB, yB, zB	xB, yB, zB	m	Koordinaten des Punktes B
xC, yC, zC	xC, yC, zC	m	Koordinaten des Punktes C
xD, yD, zD	xD, yD, zD	m	Koordinaten des Punktes D
z_i	z[i]	–	Anzahl der Seitenunterteilungen des Dreiecks i
z_{i+1}	z[i+1]	–	Anzahl der Seitenunterteilungen des Dreiecks i+1
r_i	r[i]	–	Flächenrichtung des Dreiecks i
r_{i+1}	r[i+1]	–	Flächenrichtung des Dreiecks i+1

Output FLAEEIN

$a1_i, a2_i, a3_i$	a1[i], a2[i], a3[i]	m	Vektor **a** zum Flächenpunkt A
$b1_i, b2_i, b3_i$	b1[i], b2[i], b3[i]	m	Vektor **b** zum Flächenpunkt B
$c1_i, c2_i, c3_i$	c1[i], c2[i], c3[i]	m	Vektor **c** zum Flächenpunkt C
z_i	z[i]	–	Anzahl der Seitenunterteilungen
r_i	r[i]	–	Flächenrichtung
i max	i max	–	maximale Anzahl der Flächen

Die Zusammenstellung und Ausgabeorganisation dieser Daten wird u. a. im Unterprogramm FLAEAUS (Flächenausgabe) vorgenommen (s. *Bild 7*).

Es wäre für die Zukunft auch denkbar, die Oberflächen als Netz – bestehend aus Dreieckselementen (oder auch Viereckselementen) – automatisch zu generieren. Eine nachfolgende Zerlegung brauchte dann nicht zu erfolgen.

Im weiteren werden als Flächenbausteine Dreiecke beliebiger Größe und Winkel betrachtet (*Bild 3*).

Bei einer zahlenmäßig *gleichen* Unterteilung von zwei Dreiecksseiten ergibt sich der große Vorteil von flächengleichen *Parallelogrammelementen* und *Dreieckselementen* der halben Größe. Die Gesamtfläche des Dreiecks ABC folgt zu (halber Betrag des Vektorprodukts):

$$A_D = 0{,}5 \left| \mathbf{w} \times \mathbf{v} \right|. \tag{3}$$

Die Elementflächen ergeben sich bei je z Seitenunterteilungen für die Vektoren **v** und **w** zu:

Parallelogrammelement

$$A_{EP} = \frac{2A_D}{z^2} \tag{4}$$

Dreieckselement

$$A_{ED} = 0{,}5\ A_{EP}. \tag{5}$$

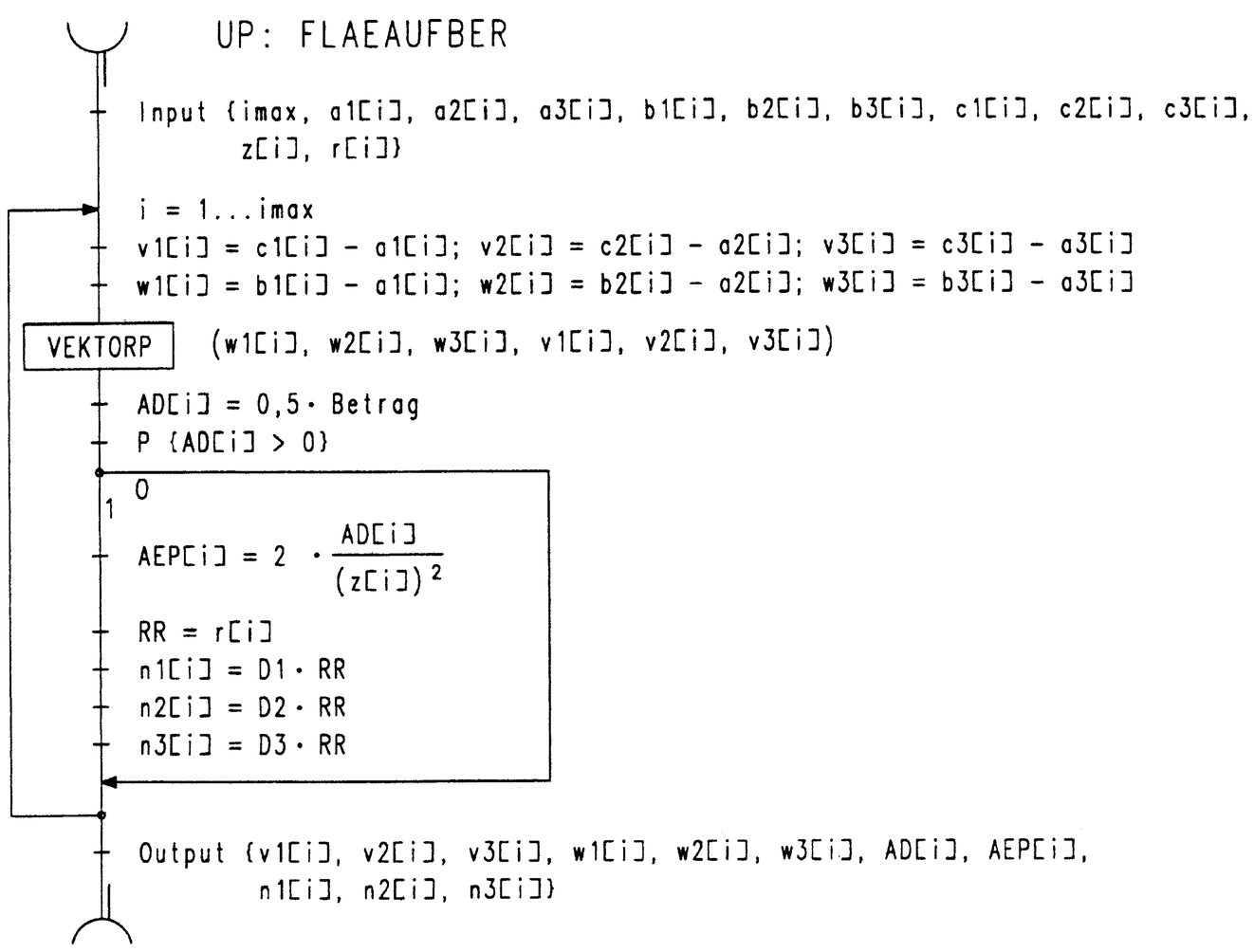


Bild 4. Datenflußplan FLAEAUFBER zur Bestimmung der Begrenzungsvektoren **v** und **w** sowie des Einheitsvektors in Normalenrichtung **n** (ausgerichtet auf das Rauminnere), der Gesamtfläche A_D und der Elementfläche A_{EP}.

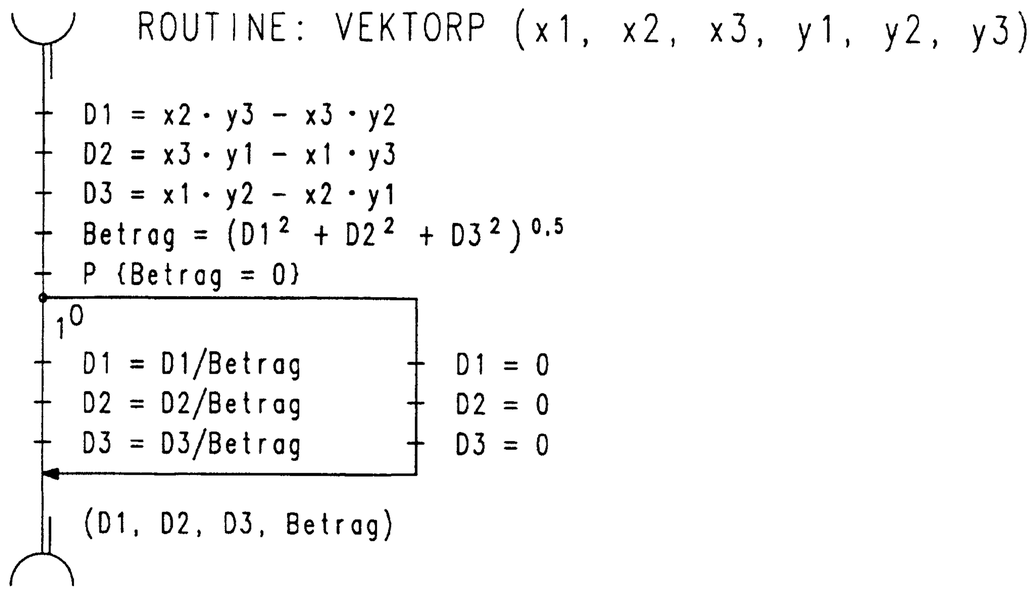


Bild 5. Datenflußplan der Routine VEKTORP zur Ermittlung des Vektorproduktes $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

Der Normalenvektor auf der Dreiecksfläche – dargestellt als Einheitsvektor in einem Rechtssystem – folgt zu

$$\mathbf{n}^* = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{w} \times \mathbf{v}|}. \tag{6}$$

Die Kennzeichnung, welche Flächenseite in das Rauminnere zeigt, wird durch den Skalar $r = \pm 1$ angegeben. Der Vektor

$$\mathbf{n} = r\mathbf{n}^* \tag{7}$$

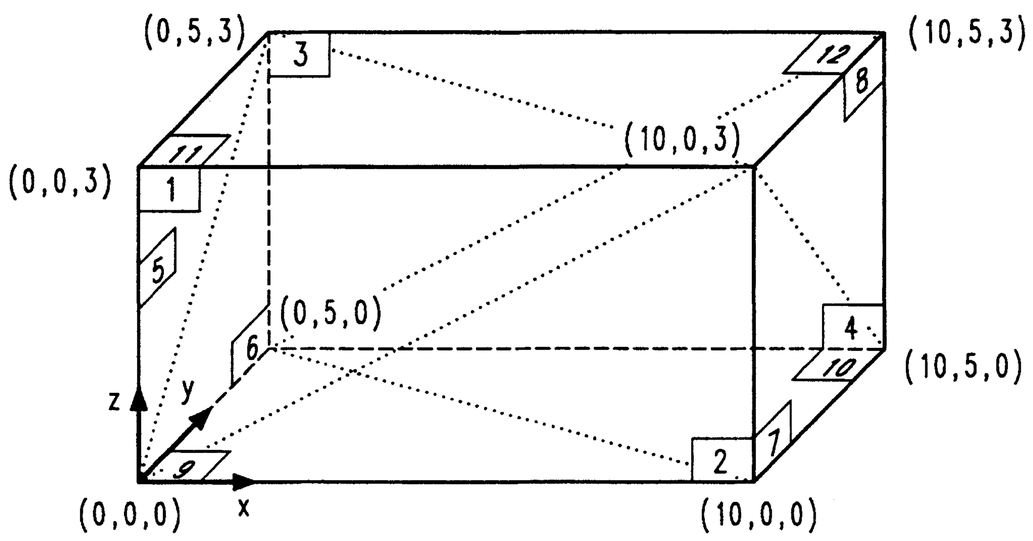


Bild 6. Testraum mit x, y, z-Koordinaten der Eckpunkte in m und den Flächennummern i.

i	a1[i]	a2[i]	a3[i]	b1[i]	b2[i]	b3[i]	c1[i]	c2[i]	c3[i]	r[i]	z[i]
-	m	m	m	m	m	m	m	m	m	-	-
1	0,00	0,00	3,00	0,00	0,00	0,00	10,00	0,00	3,00	-1	10
2	10,00	0,00	0,00	10,00	0,00	3,00	0,00	0,00	0,00	-1	10
3	0,00	5,00	3,00	0,00	5,00	0,00	10,00	5,00	3,00	1	10
4	10,00	5,00	0,00	10,00	5,00	3,00	0,00	5,00	0,00	1	10
5	0,00	0,00	3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,00	3,00	1	10
6	0,00	5,00	0,00	0,00	5,00	3,00	0,00	0,00	0,00	1	10
7	10,00	0,00	0,00	10,00	5,00	0,00	10,00	0,00	3,00	-1	10
8	10,00	5,00	3,00	10,00	0,00	3,00	10,00	5,00	0,00	-1	10
9	0,00	0,00	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	5,00	0,00	1	10
10	10,00	5,00	0,00	0,00	5,00	0,00	10,00	0,00	0,00	1	10
11	0,00	0,00	3,00	10,00	0,00	3,00	0,00	5,00	3,00	-1	10
12	10,00	5,00	3,00	0,00	5,00	3,00	10,00	0,00	3,00	-1	10

Legende:
- i — Nummer der Dreiecksfläche (ABC)
- a1[i], a2[i], a3[i] — x-, y-, und z-Koordinate des ersten Dreieckspunktes (A)
- b1[i], b2[i], b3[i] — x-, y-, und z-Koordinate des zweiten Dreieckspunktes (B)
- c1[i], c2[i], c3[i] — x-, y-, und z-Koordinate des dritten Dreieckspunktes (C)
- r[i] — Flächenrichtung
- z[i] — Anzahl der Unterteilungen der Dreiecksseiten

Bild 7. Rechnerausdruck der vorgegebenen Flächenumfassungen (Dreiecke) des Testraumes.

ist stets nach dem Rauminneren orientiert. Die Oberflächen von Körpern im Raum, z. B. Möbel, sind in gleicher Weise geometrisch zu beschreiben.

Die Zusammenstellung dieser Daten erfolgt im Unterprogramm FLAEAUFBER (Flächenaufbereitung). Der Ablauf ist im *Bild 4*, die Routine VEKTORP (Vektorprodukt) im *Bild 5* dargestellt.

Input FLAEAUFBER

i max	i max	–	maximale Anzahl der Flächen
$a1_i, a2_i, a3_i$	a1[i], a2[i], a3[i]	m	Vektor **a** zum Flächenpunkt A
$b1_i, b2_i, b3_i$	b1[i], b2[i], b3[i]	m	Vektor **b** zum Flächenpunkt B
$c1_i, c2_i, c3_i$	c1[i], c2[i], c3[i]	m	Vektor **c** zum Flächenpunkt C
z_i	z[i]	–	Anzahl der Seitenunterteilungen
r_i	r[i]	–	Flächenrichtung

Diese Eingaben sind nach Abarbeitung des Unterprogramms FLAEEIN (Flächeneingabe) verfügbar.

0utput FLAEAUFBER

$v1_i, v2_i, v3_i$	v1[i], v2[i], v3[i]	m	Vektor **v** der Dreiecksseite AC
$w1_i, w2_i, w3_i$	w1[i], w2[i], w3[i]	m	Vektor **w** der Dreiecksseite AB
$A_{D,i}$	AD[i]	m^2	Fläche des Dreiecks ABC
AEP,i	AEP[i]	m^2	Fläche eines Parallelogrammelementes
$n1_i, n2_i, n3_i$	n1[i], n2[i], n3[i]	–	Einheitsvektor in Normalenrichtung der Fläche in den Raum zeigend

Beispiel Flächengeometrie

Gegeben ist ein quaderförmiger Raum mit den im *Bild 6* vermerkten Eckkoordinaten. Die Eingabe dieser Daten in FLAEEIN ergibt eine Umhüllung des Raumes, bestehend aus 12 Dreiecksflächen. Die Ausgabe der geordneten Daten zeigt *Bild 7*. Die weitere Aufbereitung der Daten erfolgt in FLAEAUFBER. Das Ergebnis wird im Unterprogramm FLAEAUS (Flächenausgabe) ausgegeben (*Bild 8*).

Einstrahlzahlberechnung

Die Einstrahlzahl – oftmals auch Winkelverhältnis oder neuerdings Formfaktor genannt – gibt den Anteil der von der Oberfläche i ausgesandten Strahlung an,

der die Oberfläche j trifft, wenn die Emissions- und Absorptionskoeffizienten winkelunabhängig gelten. Es existieren nachfolgende Definitionen. Die Bezeichnungen der Flächen und Winkel erklären sich an Hand des *Bildes 9*. Die Bedeutung der in den Gln. (8) bis (10) definierten Einstrahlzahlen wird mit Hilfe der symbolischen Darstellungen im *Bild 10* deutlich.

Einstrahlzahl eines Flächenelementes i auf eine Fläche j

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{\pi} \int_{A_j} \frac{\cos\beta_i \cos\beta_j}{r^2} \, dA_j \qquad (8)$$

Das Flächenelement i strahlt in den Halbraum. Ein Teil der Strahlung trifft die Fläche j. Der Anteil zur Gesamtstrahlung wird mit $\varphi_{i,j}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die Einstrahlzahl des Flächenelementes i auf die Fläche j.

Einstrahlzahl einer Fläche i auf eine Fläche j

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{A_i \pi} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\beta_i \cos\beta_j}{r^2} \, dA_j \, dA_i \qquad (9)$$

Das Flächenelement i′ strahlt auf die Fläche j. Der Strahlungsanteil wird durch $\varphi_{i',j}$ – analog der Elementeinstrahlzahl – charakterisiert. Wandert dieses Flächenelement an alle Stellen der Fläche i, so kann aus der unendlichen Vielzahl der Werte $\varphi_{i',j}$ ein Mittelwert gebildet werden. Dieser wird mit $\Phi_{i,j}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die mittlere Einstrahlzahl der Fläche i auf die Fläche j.

Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes i auf eine Fläche j

$$\varphi^0_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \int_{A_j} \frac{\cos\beta_j}{r^2} \, dA_j. \qquad (10)$$

Das kugelförmige Element i strahlt im Gegensatz zu den beiden vorgenannten Fällen nicht nur in den Halbraum, sondern in den gesamten Raum. Ein Teil der emittierten Strahlung trifft die Fläche j. Der Anteil der Gesamtstrahlung wird mit $\varphi^0_{i,j}$ bezeichnet. Man sagt, es ist die Einstrahlzahl des kugelförmigen Elementes i auf die Fläche j. Mitunter wird das kugelförmige Element auch vereinfacht als „Punkt" bezeichnet.

i	v1[i]	v2[i]	v3[i]	w1[i]	w2[i]	w3[i]	n1[i]	n2[i]	n3[i]	AD[i]	AEP[i]
-	m	m	m	m	m	m	-	-	-	m²	m²
1	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-3,00	0,00	1,00	0,00	15,00	0,30
2	-10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,00	0,00	1,00	0,00	15,00	0,30
3	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-3,00	0,00	-1,00	0,00	15,00	-0,30
4	-10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,00	0,00	-1,00	0,00	15,00	0,30
5	0,00	5,00	0,00	0,00	0,00	-3,00	1,00	0,00	0,00	7,50	0,15
6	0,00	-5,00	0,00	0,00	0,00	3,00	1,00	0,00	0,00	7,50	0,15
7	0,00	0,00	3,00	0,00	5,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	7,50	0,15
8	0,00	0,00	-3,00	0,00	-5,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	7,50	0,15
9	0,00	5,00	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	25,00	0,50
10	0,00	-5,00	0,00	-10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	25,00	0,50
11	0,00	5,00	0,00	10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	25,00	0,50
12	0,00	-5,00	0,00	-10,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	25,00	0,50

Legende:
- i — Nummer der Dreiecksfläche (ABC)
- v1[i], v2[i], v3[i] — x-, y-, und z-Komponente des Vektors v (Dreiecksseite AC)
- w1[i], w2[i],w3[i] — x-, y-, und z-Komponente des Vektors w (Dreiecksseite AB)
- n1[i], n2[i], n3[i] — x-, y-, und z-Komponente des Normalenvektors n (Einheitsvektor)
- AD[i] — Fläche des Dreiecks i
- AEP[i] — Fläche eines Parallelogrammelementes

Bild 8. Rechnerausdruck der charakteristischen Flächenparameter.

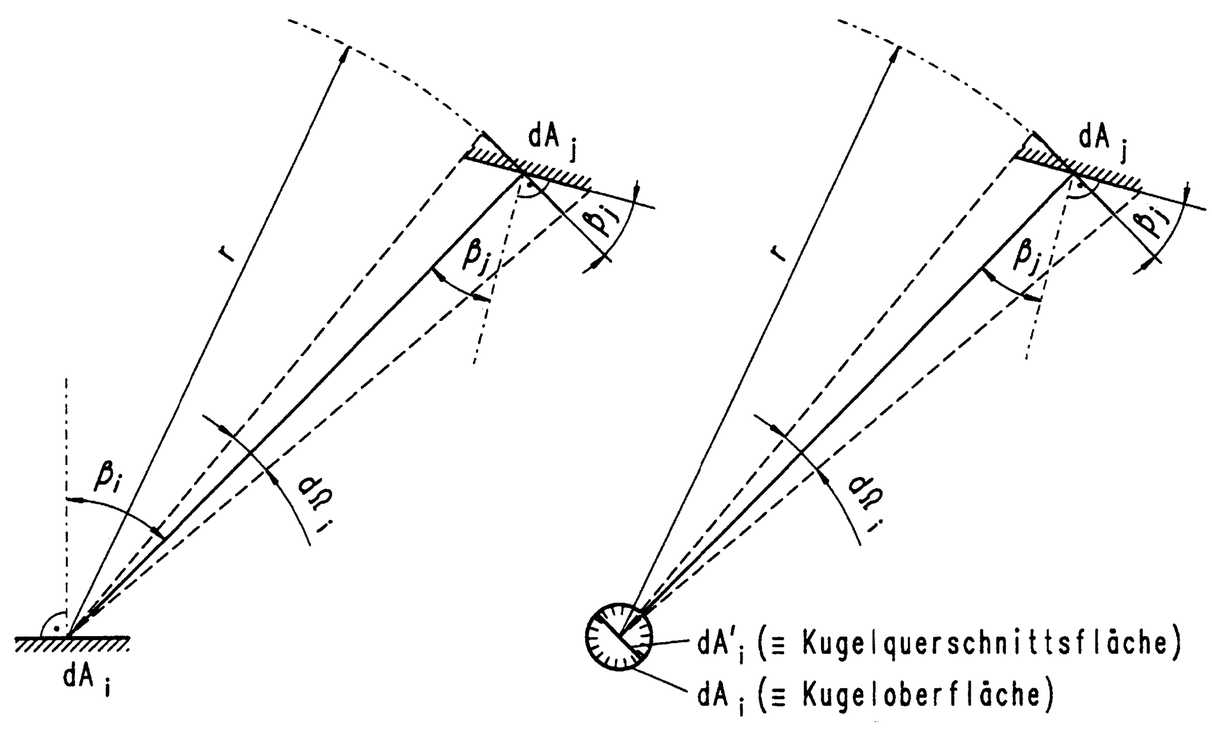


Bild 9. Geometrische Beziehung beim Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächenelementen (links) und zwischen einem kugelförmigen Element und einem Flächenelement (rechts).

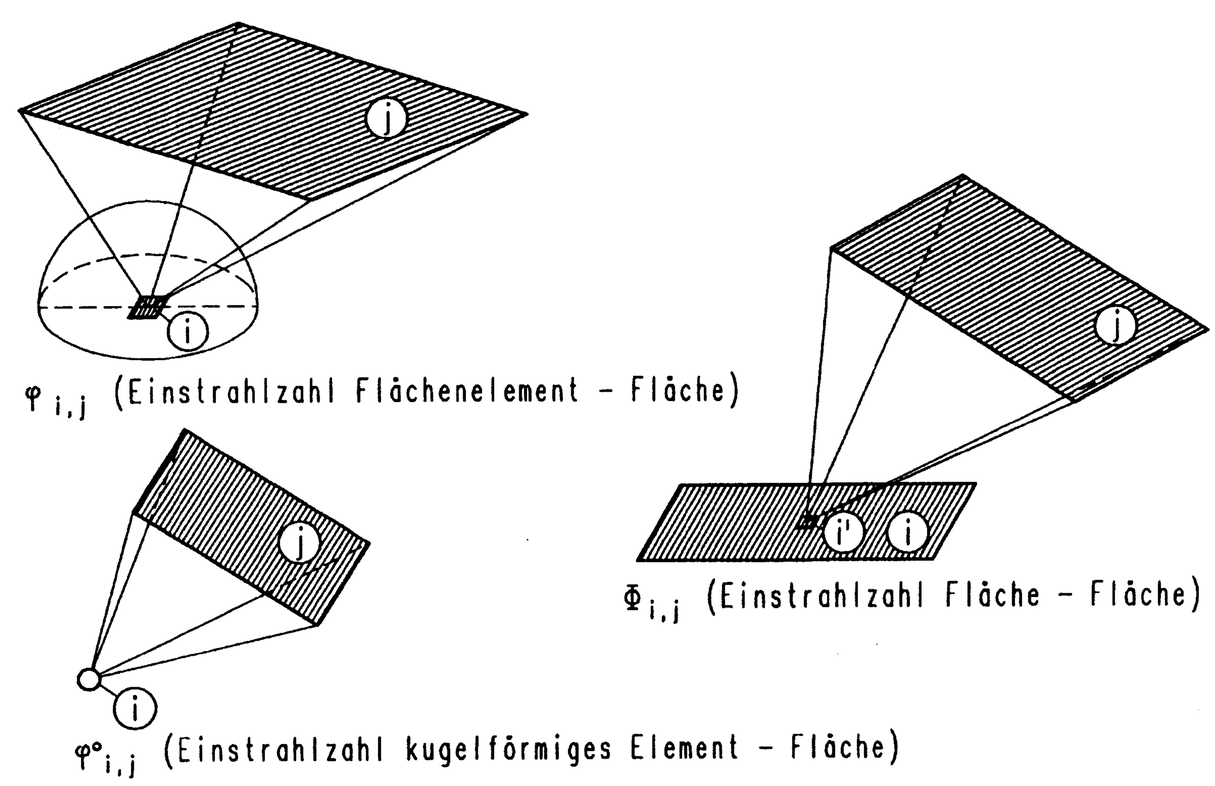


Bild 10. Symbolische Darstellung der in der Praxis vorkommenden Einstrahlzahlen.

Würde die Fläche j die strahlende Fläche i umhüllen, dann nähme die Einstrahlzahl den Grenzwert Eins an. In der Regel ist der Wert auf eine bestrahlte Fläche natürlich kleiner Eins. Die Summation der Einstrahlzahlen, der den Strahler umhüllenden Flächen n, liefert dann wieder den Wert Eins. Es gelten:

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{i,j} = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j} = 1; \quad \sum_{j=1}^{n} \varphi^0_{i,j} = 1. \qquad (11)$$

Diese Gesetzmäßigkeit bietet den Vorteil, daß man bei der Berechnung von n Einstrahlzahlen stets eine Kontrollmöglichkeit hat. Wird darauf verzichtet, so genügt die

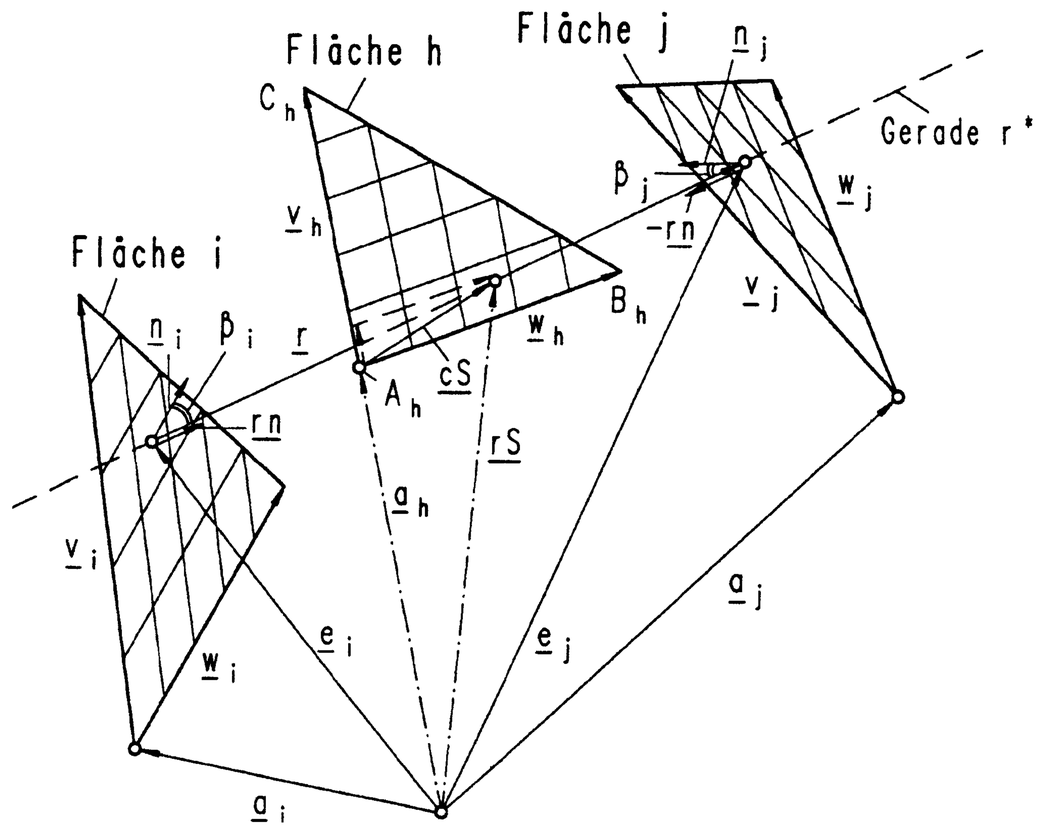


Bild 11. Strahlungsaustausch zwischen den Flächen i und j bei einem Hindernis h im Strahlengang.

Bestimmung von (n–1) Einstrahlzahlen, um auf n Einstrahlzahlen zu schließen. Dies macht man sich vor allem zunutze, wenn die Bestimmung von einer bestimmten Einstrahlzahl besonders aufwendig ist. Weiterhin kann für die mittlere Einstrahlzahl zwischen zwei Flächen mit Vorteil die Reziprozitätsbeziehung

$$A_i \Phi_{i,j} = A_j \Phi_{j,i} \tag{12}$$

Anwendung finden.

Die detaillierte Ableitung von Einstrahlzahlen findet sich u.a. in [1; 2; 4; 5; 6]. Besteht bei den Emissions- und Absorptionskoeffizienten eine Winkelabhängigkeit, dann ist der Integrand in den Gln. (8) bis (10) zu erweitern [2; 4].

Die analytische Ermittlung ist sehr aufwendig und kompliziert. Insbesondere ist zu bemerken, daß bisher relativ wenige und nur für geometrisch einfache Gebilde Berechnungsgleichungen vorliegen. So findet man in der Regel keine Lösungen für beliebig orientierte Rechteckflächen, für schiefwinklig umrandete Trapez- oder Vieleckflächen usw. Desweiteren existieren keine Lösungen, die die *Schattenwirkung* von Bauteilen berücksichtigen, die zwischen den im Strahlungsaustausch befindlichen Oberflächen liegen. Dieses Problem tritt bereits beim Strahlungsaustausch zwischen Raumumfassungen auf, wenn der Raum möbliert ist. Zur Lösung derartiger Fälle wird ein numerisches Verfahren verwendet. Es ist gegenüber [1; 2] wesentlich verbessert. Die Integrale der Gln. (8) bis (10) lauten in Summendarstellungen:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{\pi} \sum_{A_j} \frac{\cos\beta_i \cos\beta_j}{r^2} \Delta A_j \tag{13}$$

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{\pi A_i} \sum_{A_i} \left(\sum_{A_j} \frac{\cos\beta_i \cos\beta_j}{r^2} \Delta A_j \right) \Delta A_i \tag{14}$$

$$\varphi^0_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \sum_{A_j} \frac{\cos\beta_j}{r^2} \Delta A_j. \tag{15}$$

Betrachtet werden nur Dreiecksflächen i, die durch die Vektoren $\mathbf{v}_i$ und $\mathbf{w}_i$ in Form und Größe definiert sind. Der Zuführungsvektor $\mathbf{a}_i$ zum Punkt A_i fixiert die Lage des Dreiecks im Raum. Der Vektor $\mathbf{n}_i$ gibt die im Strahlungsaustausch stehende Fläche („Vorder- oder Rückfläche") an.

Die Abarbeitung der Flächen kann mit Hilfe des *Bildes 3* erklärt werden. Zur Vereinfachung unterbleibt die Indizierung der Größen. Mit den Schrittzählern $zv \leq z$ für den Vektor $\mathbf{v}$ und $zw \leq z$ für den Vektor $\mathbf{w}$ ergeben sich die Flächenmittelpunkte der Parallelogrammelemente zu

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \frac{zv - 0{,}5}{z} \mathbf{v} + \frac{zw - 0{,}5}{z} \mathbf{w}. \tag{16}$$

Für die Dreieckselemente, sie werden identifiziert durch

$$zv + zw = z + 1, \tag{17}$$

sei näherungsweise

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} + \frac{zv - 0{,}65}{z} \mathbf{v} + \frac{zw - 0{,}65}{z} \mathbf{w} \tag{18}$$

gesetzt. Die Größe der Flächenelemente ΔA ist identisch A_{EP} bzw. A_{ED} gemäß der Gln. (4) und (5). Die allgemeine Anordnung, der im Strahlungsaustausch stehenden Flächen i und j unter Annahme eines möglichen Hindernisses h, geht aus *Bild 11* hervor.

Die beiden zu den Mittelpunkten der betrachteten Elemente führenden Vektoren e_i und e_j nach Gl. (16) spannen den Verbindungsvektor von der Ebene i zur Ebene j auf:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i. \tag{19}$$

Er liegt in der Geraden r*. Sein Einheitsvektor sei

$$\mathbf{rn} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \tag{20}$$

Zunächst ist zu prüfen, ob sich ein *Hindernis* – eine Ebene h – im Strahlengang r* befindet. Die Ebene h sei wiederum ein ebenes Dreieck mit den Eckpunkten A_h, B_h, C_h und ist Teil der Eingabemenge $i = 1 \cdots i\,max$. Für die Parameterdarstellung der Ebene h gilt analog zu Gl. (1)

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{a}_h + t_{1h}\, \mathbf{v}_h + t_{2h}\, \mathbf{w}_h. \tag{21}$$

Steht ein Vektor senkrecht auf dieser Ebene, beispielsweise trifft dies für den Einheitsvektor der Flächennormalen $\mathbf{n}_h$ nach Gl. (7) zu, dann folgt aus

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_h\mathbf{x}_h &= \mathbf{n}_h\mathbf{a}_h + t_{1h}\mathbf{n}_h\mathbf{v}_h + t_{2h}\mathbf{n}_h\mathbf{w}_h \\ \mathbf{n}_h\mathbf{x}_h &= \mathbf{n}_h\mathbf{a}_h, \end{aligned} \tag{22}$$

denn das Skalarprodukt der senkrecht aufeinanderstehenden Vektoren $\mathbf{n}_h\mathbf{v}_h$ bzw. $\mathbf{n}_h\mathbf{w}_h$ ist Null. Gl. (22) stellt eine parameterfreie Darstellung der Ebene h dar. Gemäß *Bild 11* kann die Verbindungsgerade – in der der Vektor $\mathbf{r}$ liegt – ausgehend vom Zuführungsvektor $\mathbf{e}_i$ mit dem Parameter t_r beschrieben werden:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{e}_i + t_r\mathbf{r}. \tag{23}$$

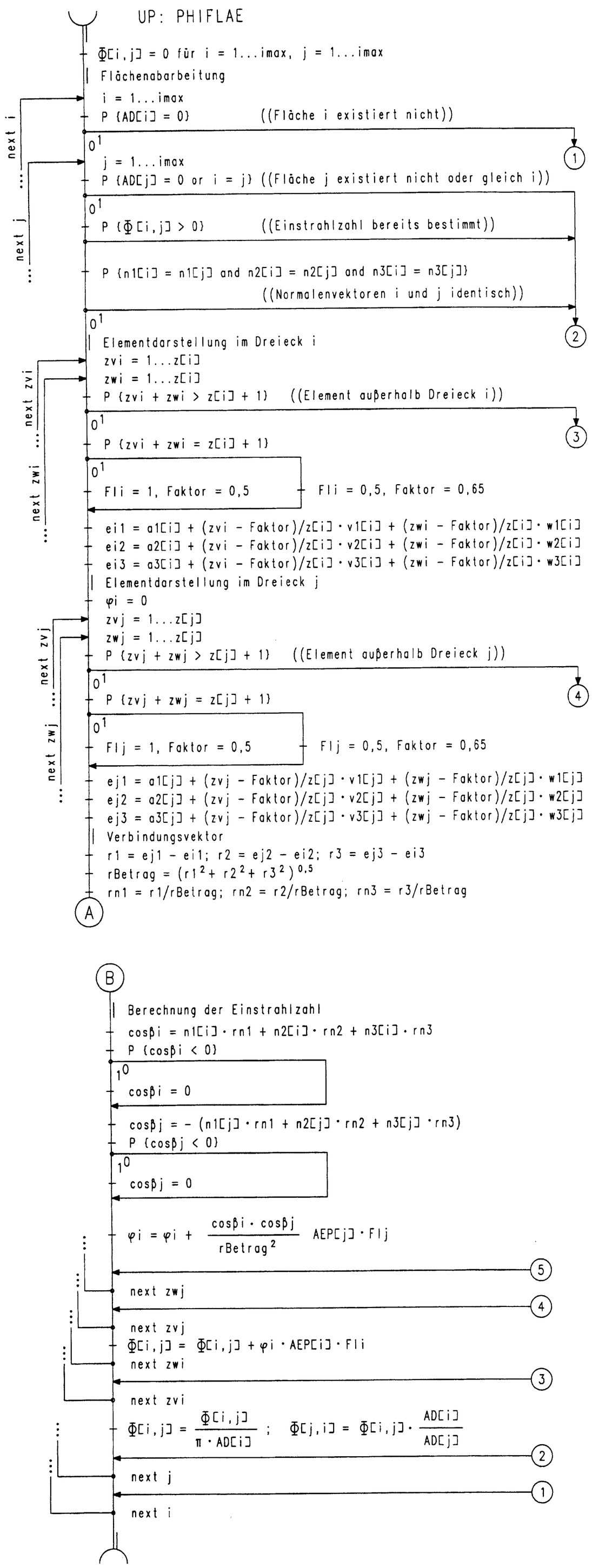
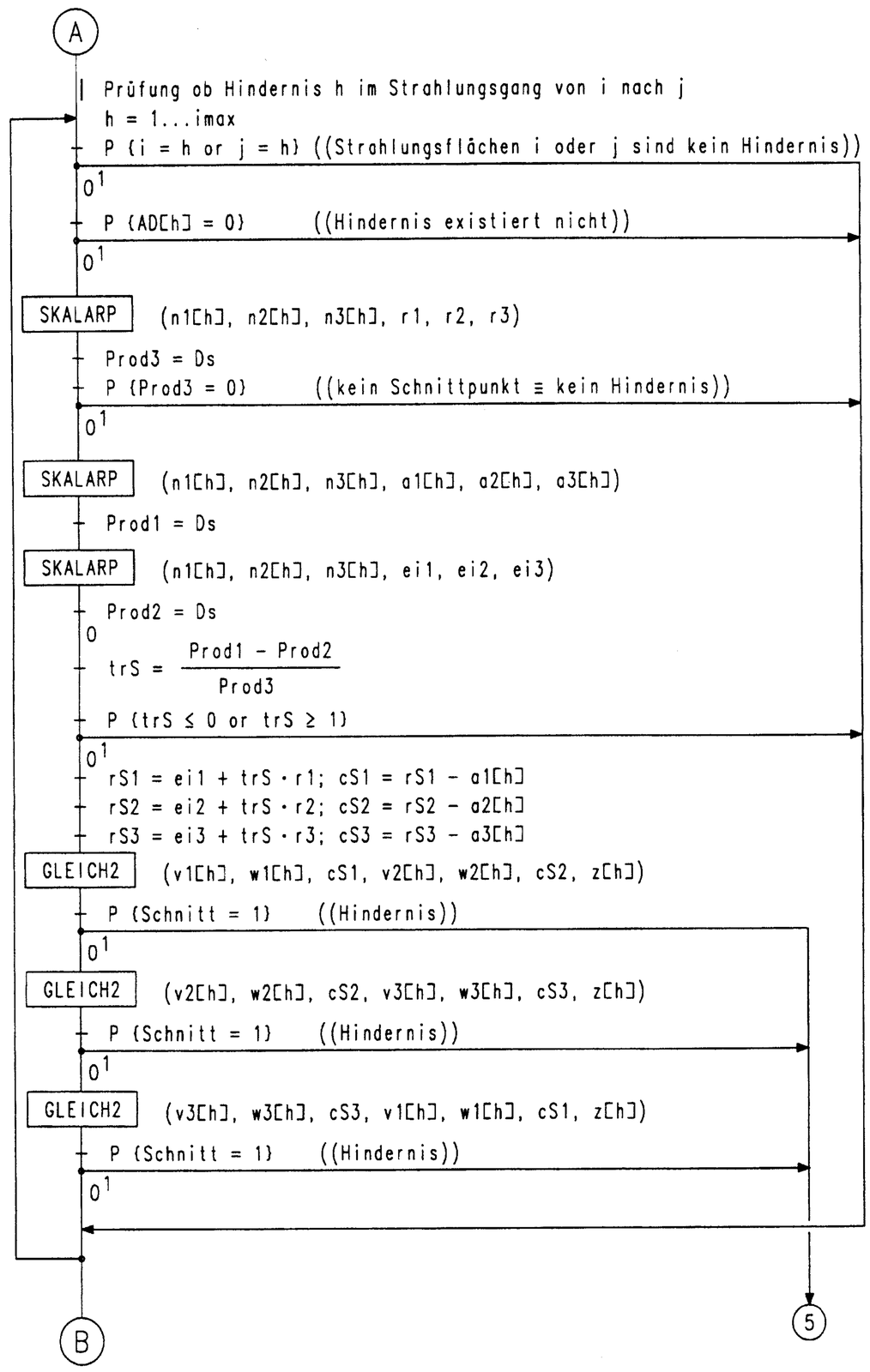


Bild 12. Datenflußplan PHIFLAE zur Berechnung der Einstrahlzahlen $\Phi_{i,j}$ zwischen allen imax Oberflächen eines Raumes.



Existiert ein Schnittpunkt zwischen der Ebene und der Geraden, dann muß

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{r}^* \tag{24}$$

gelten. Die Substitution liefert

$$\mathbf{n}_h(\mathbf{e}_i + t_r\mathbf{r}) = \mathbf{n}_h\mathbf{a}_h$$

und daraus folgt der Geradenparameter

$$t_{rS} = \frac{\mathbf{n}_h\mathbf{a}_h - \mathbf{n}_h\mathbf{e}_i}{\mathbf{n}_h\mathbf{r}}. \tag{25}$$

Die Berechnung der Skalarprodukte erfolgt mit der Routine SKALARP (Skalarprodukt) (*Bild 13*). Der Vektor zum Schnittpunkt (vgl. *Bild 11*) ergibt sich dann zu

$$\mathbf{rS} = \mathbf{e}_i + t_{rS}\mathbf{r}. \tag{26}$$

Schnittpunkte der Geraden r* mit Ebenen h, die nicht zwischen i und j liegen, stellen kein Hindernis im Strahlengang dar. Für sie gilt $t_{rS} \geq 1$ oder $t_{rS} \leq 0$. Nunmehr ist zu prüfen, ob der Schnittpunkt auch innerhalb des Dreiecks A_h, B_h, C_h liegt. Dies ist der Fall, wenn

$$\mathbf{a}_h + zv_h\mathbf{v}_h + zw_h\mathbf{w}_h = \mathbf{rS} \tag{27}$$

und

$$zv_h + zw_h \leq z_h \tag{28}$$

gelten. Das Gleichheitszeichen bedeutet, daß das Hindernis auch beim Tangieren der Dreiecksseiten „wirkt". Das Lösen des überbestimmten Gleichungssystems (27), (28) erfolgt schrittweise. Dabei werden der Reihe nach die Projektionen auf die Tafelebenen x, y; y, z und z, x untersucht. Liegt der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks, dann muß sich dies in mindestens einer Tafelprojektion darstellen. (Im *Flußbild 12* wird dazu der im *Bild 11* dargestellte Vektor $\mathbf{cS} = \mathbf{rS} - \mathbf{a}_h$ eingeführt). Die Lösung des jeweiligen Gleichungssystems erfolgt mittels Determinanten (s. Routine GLEICH2 (*Bild 14*).

Befindet sich kein Hindernis im Strahlengang (es existiert kein Schnittpunkt zwischen der Geraden r* und der Fläche h – s. *Bild 11*), dann kann endlich der Summand $(\cos\beta_i \cos\beta_j \Delta A_j)/r^2$ nach Gln. (13), (14) bzw. $(\cos\beta_j \Delta A_j)/r^2$ nach Gl. (15) ausgewertet werden. Der Einstrahlwinkel β wird zwischen dem Verbindungsvektor **r** bzw. **rn** der im Strahlungsaustausch stehenden Flächen und der jeweiligen Flächennormalen $\mathbf{n}_i$ bzw. $\mathbf{n}_j$ gebildet (s. auch *Bild 9*). Ist $\beta \geq 90°$, so liegt kein Strahlungsaustausch zwischen den betrachteten Flächenelementen vor, d. h., $\cos\beta \leq 0$ wird gleich Null gesetzt. Der auftretende Winkel wird dann exakt wiedergegeben, wenn die beiden Vektoren **rn** und **n** von der Strahlungsfläche wegweisen. Dies ist definitionsgemäß an der Fläche i stets gegeben, an der Fläche j ist – **rn** zu verwenden.

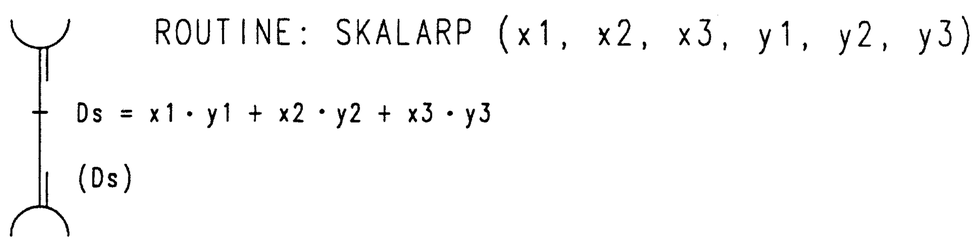


Bild 13. Datenflußplan der Routine SKALARP zur Ermittlung des Skalarproduktes **x** · **y**.

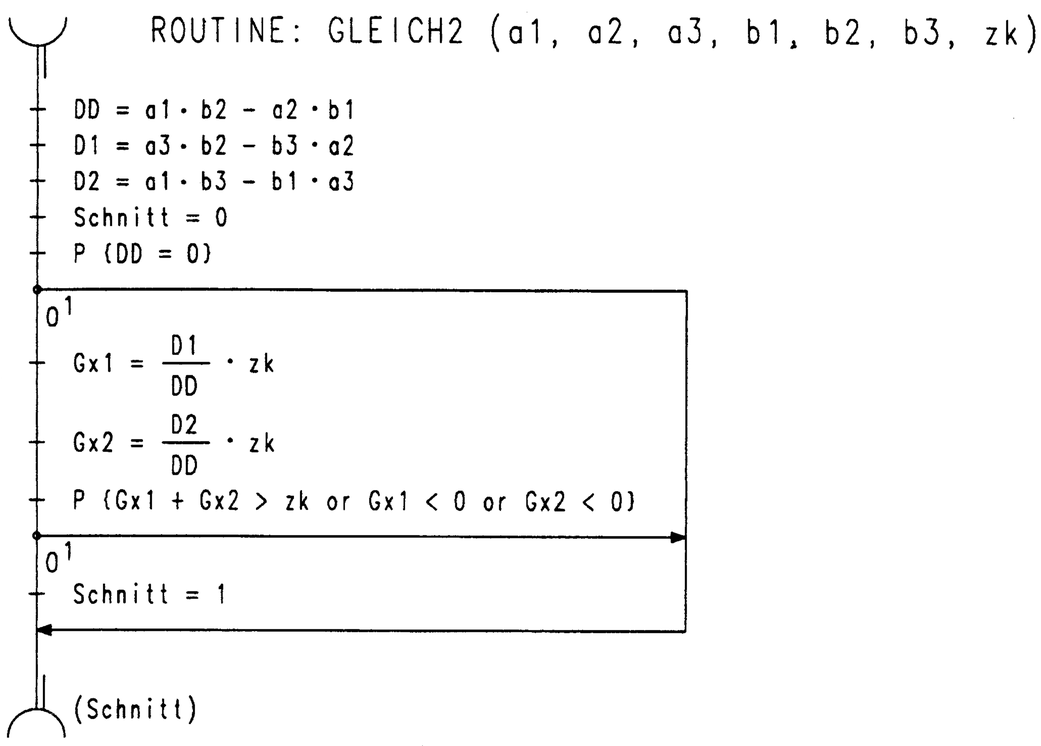


Bild 14. Datenflußplan der Routine GLEICH2 zur Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten. Schnitt = 1 weist auf die Existenz eines Schnittpunktes zwischen einer Geraden **r*** und der Dreiecksfläche h (*Bild 11*) hin.

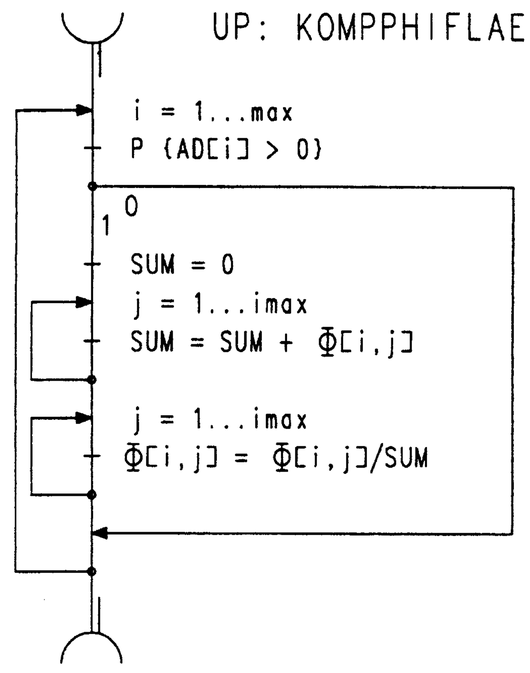


Bild 15. Datenflußplan KOMPPHIFLAE zur zwangsweisen Korrektur der Einstrahlzahlen mit dem Ziel $\Sigma\Phi = 1$.

Ein Exkurs in die Vektorrechnung lehrt: „Unter dem skalaren Produkt der Vektoren **a** und **b** mit dem eingeschlossenen Winkel φ versteht man einen Skalar, der durch die Gleichung $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\varphi$ definiert ist". Auf das vorliegende Problem angewandt, vereinfacht sich die Berechnung deutlich, da mit den Einheitsvektoren (Betrag = 1) gearbeitet wird, zu (vgl. *Bild 11*)

$$\cos\beta_i = \mathbf{n}_i\mathbf{rn} \tag{29}$$

$$\cos\beta_j = -\mathbf{n}_j\mathbf{rn}. \tag{30}$$

Die Einheitsvektoren **n** sind mit den Gln. (6) und (7) bestimmt worden, und **rn** folgte aus den Gln. (19) und (20).

Die weitere Lösung der Gln. (13) bis (15) – das Verknüpfen mit den Flächenelementen usw. ist rechentechnisch trivial zu organisieren. Verkürzungen der Abarbeitung sind weitestgehend zu nutzen. So können komplette numerische Einstrahlzahlermittlungen $\Phi_{j,i}$ durch Verwenden der Gl. (12) und Bezugnahme auf bereits berechnete $\Phi_{j,i}$ vermieden werden. Weiterhin wird die Abarbeitung bereits nach dem ersten Element abgebrochen, wenn $\cos\beta = 0$ gilt (Fläche i und j liegen in einer Ebene) u. a. m. Die Einstrahlzahl eines kugelförmigen Elementes i auf eine Fläche j nach Gl. (15) vereinfacht sich, durch Wegfall des Terms $\cos\beta_i$. (Ein Strahl ausgehend vom Mittelpunkt einer Kugel steht stets senkrecht auf der Oberfläche, $\cos\beta_i = 1$.).

Die vorgestellten Grundlagen finden in mehreren Unterprogrammen Anwendung (siehe auch Folgeaufsatz „Berechnung der Elementeinstrahlzahlen in einem neuartigen Raummodell").

Einstrahlzahlen von Flächen auf Flächen

Die numerische Ermittlung der Einstrahlzahlen zwischen den Raumoberflächen einschließlich des Interieurs wird mit dem Unterprogramm PHIFLAE (Phi-Flächen) vorgenommen. Der Datenflußplan ist aus *Bild 12*, die Routinen SKALARP (Skalarprodukt) und GLEICH2 (Gleichung mit zwei Unbekannten) aus den *Bildern 13* und *14* ent-

i	j	Phi[i,j]	AD[i]	AD[j]
-	-	-	m²	m²
1	1	0,00000	15,00000	15,00000
1	2	0,00000	15,00000	15,00000
1	3	0,11585	15,00000	15,00000
1	4	0,07825	15,00000	15,00000
1	5	0,10777	15,00000	7,50000
1	6	0,04159	15,00000	7,50000
1	7	0,01615	15,00000	7,50000
1	8	0,02185	15,00000	7,50000
1	9	0,19765	15,00000	25,00000
1	10	0,07227	15,00000	25,00000
1	11	0,43359	15,00000	25,00000
1	12	0,04666	15,00000	25,00000
Summe		1,13163		
2	1	0,00000	15,00000	15,00000
2	2	0,00000	15,00000	15,00000
2	3	0,07825	15,00000	15,00000
2	4	0,11585	15,00000	15,00000
2	5	0,01615	15,00000	7,50000
2	6	0,02185	15,00000	7,50000
2	7	0,10777	15,00000	7,50000
2	8	0,04159	15,00000	7,50000
2	9	0,34399	15,00000	25,00000
2	10	0,12439	15,00000	25,00000
2	11	0,11728	15,00000	25,00000
2	12	0,14953	15,00000	25,00000
Summe		1,11666		
3	1	0,11585	15,00000	15,00000
3	2	0,07825	15,00000	15,00000
3	3	0,00000	15,00000	15,00000
3	4	0,00000	15,00000	15,00000
3	5	0,04597	15,00000	7,50000
3	6	0,10337	15,00000	7,50000
3	7	0,01749	15,00000	7,50000
3	8	0,02054	15,00000	7,50000
3	9	0,14953	15,00000	25,00000
3	10	0,11728	15,00000	25,00000
3	11	0,12439	15,00000	25,00000
3	12	0,34399	15,00000	25,00000
Summe		1,11667		
4	1	0,07825	15,00000	15,00000
4	2	0,11585	15,00000	15,00000
4	3	0,00000	15,00000	15,00000
4	4	0,00000	15,00000	15,00000
4	5	0,01749	15,00000	7,50000
4	6	0,02054	15,00000	7,50000
4	7	0,04597	15,00000	7,50000
4	8	0,10337	15,00000	7,50000
4	9	0,04666	15,00000	25,00000
4	10	0,43359	15,00000	25,00000
4	11	0,07227	15,00000	25,00000
4	12	0,19765	15,00000	25,00000
Summe		1,13164		

i	j	Phi[i,j]	AD[i]	AD[j]
-	-	-	m²	m²
5	1	0,21554	7,50000	15,00000
5	2	0,03230	7,50000	15,00000
5	3	0,09194	7,50000	15,00000
5	4	0,03497	7,50000	15,00000
5	5	0,00000	7,50000	7,50000
5	6	0,00000	7,50000	7,50000
5	7	0,02187	7,50000	7,50000
5	8	0,02123	7,50000	7,50000
5	9	0,20524	7,50000	25,00000
5	10	0,04691	7,50000	25,00000
5	11	0,31017	7,50000	25,00000
5	12	0,02861	7,50000	25,00000
Summe		1,00879		
6	1	0,08318	7,50000	15,00000
6	2	0,04370	7,50000	15,00000
6	3	0,20674	7,50000	15,00000
6	4	0,04108	7,50000	15,00000
6	5	0,00000	7,50000	7,50000
6	6	0,00000	7,50000	7,50000
6	7	0,02123	7,50000	7,50000
6	8	0,02187	7,50000	7,50000
6	9	0,28237	7,50000	25,00000
6	10	0,05648	7,50000	25,00000
6	11	0,17726	7,50000	25,00000
6	12	0,07475	7,50000	25,00000
Summe		1,00865		
7	1	0,03230	7,50000	15,00000
7	2	0,21554	7,50000	15,00000
7	3	0,03497	7,50000	15,00000
7	4	0,09194	7,50000	15,00000
7	5	0,02187	7,50000	7,50000
7	6	0,02123	7,50000	7,50000
7	7	0,00000	7,50000	7,50000
7	8	0,00000	7,50000	7,50000
7	9	0,05648	7,50000	25,00000
7	10	0,28237	7,50000	25,00000
7	11	0,07475	7,50000	25,00000
7	12	0,17726	7,50000	25,00000
Summe		1,00871		
8	1	0,04370	7,50000	15,00000
8	2	0,08318	7,50000	15,00000
8	3	0,04108	7,50000	15,00000
8	4	0,20674	7,50000	15,00000
8	5	0,02123	7,50000	7,50000
8	6	0,02187	7,50000	7,50000
8	7	0,00000	7,50000	7,50000
8	8	0,00000	7,50000	7,50000
8	9	0,04691	7,50000	25,00000
8	10	0,20524	7,50000	25,00000
8	11	0,02861	7,50000	25,00000
8	12	0,31017	7,50000	25,00000
Summe		1,00873		

i	j	Phi[i,j]	AD[i]	AD[j]
-	-	-	m²	m²
9	1	0,11859	25,00000	15,00000
9	2	0,20640	25,00000	15,00000
9	3	0,08972	25,00000	15,00000
9	4	0,02800	25,00000	15,00000
9	5	0,06157	25,00000	7,50000
9	6	0,08471	25,00000	7,50000
9	7	0,01694	25,00000	7,50000
9	8	0,01407	25,00000	7,50000
9	9	0,00000	25,00000	25,00000
9	10	0,00000	25,00000	25,00000
9	11	0,31434	25,00000	25,00000
9	12	0,13840	25,00000	25,00000
Summe		1,07275		
10	1	0,04336	25,00000	15,00000
10	2	0,07464	25,00000	15,00000
10	3	0,07037	25,00000	15,00000
10	4	0,26015	25,00000	15,00000
10	5	0,01407	25,00000	7,50000
10	6	0,01694	25,00000	7,50000
10	7	0,08471	25,00000	7,50000
10	8	0,06157	25,00000	7,50000
10	9	0,00000	25,00000	25,00000
10	10	0,00000	25,00000	25,00000
10	11	0,13840	25,00000	25,00000
10	12	0,31434	25,00000	25,00000
Summe		1,07857		

i	j	Phi[i,j]	AD[i]	AD[j]
-	-	-	m²	m²
11	1	0,26015	25,00000	15,00000
11	2	0,07037	25,00000	15,00000
11	3	0,07464	25,00000	15,00000
11	4	0,04336	25,00000	15,00000
11	5	0,09305	25,00000	7,50000
11	6	0,05318	25,00000	7,50000
11	7	0,02243	25,00000	7,50000
11	8	0,00858	25,00000	7,50000
11	9	0,31434	25,00000	25,00000
11	10	0,13840	25,00000	25,00000
11	11	0,00000	25,00000	25,00000
11	12	0,00000	25,00000	25,00000
Summe		1,07850		
12	1	0,02800	25,00000	15,00000
12	2	0,08972	25,00000	15,00000
12	3	0,20640	25,00000	15,00000
12	4	0,11859	25,00000	15,00000
12	5	0,00858	25,00000	7,50000
12	6	0,02243	25,00000	7,50000
12	7	0,05318	25,00000	7,50000
12	8	0,09305	25,00000	7,50000
12	9	0,13840	25,00000	25,00000
12	10	0,31434	25,00000	25,00000
12	11	0,00000	25,00000	25,00000
12	12	0,00000	25,00000	25,00000
Summe		1,07269		

Legende:

i	Nummer der abstrahlenden Dreiecksfläche
j	Nummer der bestrahlten Dreiecksfläche
Phi[i,j]	Einstrahlzahl der Fläche i auf die Fläche j
AD[i]	Fläche des abstrahlenden Dreiecks i
AD[j]	Fläche des bestrahlten Dreiecks j

Bild 16. Rechnerausdruck aller Einstrahlzahlen $\Phi_{i,j}$ des Testraumes.

nehmbar. PHIFLAE verkörpert die Lösung der Gl. (14) für alle Flächen i und j mit den Ergebnissen $\Phi_{i,j}$. Die Zähler i und j durchlaufen die Gesamtmenge der Flächen $1 \cdots i$ max. Dabei werden alle Flächen h – die ebenfalls $h = i \cdots i$ max durchlaufen – geprüft, ob eine Fläche davon ein Hindernis darstellt.

Input PHIFLAE

i max	i max	–	maximale Anzahl der Flächen
$a1_i, a2_i, a3_i$	a1[i], a2[i], a3[i]	m	Vektor **a** zum Flächenpunkt A
$v1_i, v2_i, v3_i$	v1[i], v2[i], v3[i]	m	Vektor **v** der Dreiecksseite AC
$w1_i, w2_i, w3_i$	w1[i], w2[i], w2[i]	m	Vektor **w** der Dreiecksseite AB
z_i	z[i]	–	Anzahl der Seitenunterteilungen
$A_{D,i}$	AD[i]	m^2	Fläche des Dreiecks ABC
$A_{EP,i}$	AEP[i]	m^2	Fläche eines Parallelogrammelementes
$n1_i, n2_i, n3_i$	n1[i], n2[i], n3[i]	–	Einheitsvektor in Normalenrichtung der Fläche in den Raum zeigend

Diese Eingaben sind nach Abarbeitung des Unterprogramms FLAEAUFBER (Flächenaufbereitung) vorhanden.

Output PHIFLAE

Φi,j	Φ[i,j]	–	numerisch ermittelte Einstrahlzahl der Fläche i auf die Fläche j

Die Ausgabe wird im Unterprogramm PHIFLAEAUS (Phi – Flächenausgabe) vorgenommen (Beispielausdruck: *Bild 16*).

Die numerische Berechnung der Einstrahlzahlen führt infolge der Diskretisierung der Fläche in endlich große Elemente zu Fehlern. Je feiner die Unterteilung erfolgt, desto geringer sind zwar die Fehler, die Rechenzeit wächst aber enorm an. Für einige weiterführende Rechnungen ist es zweckmäßig, die Summe der Einstrahlzahlen auf den Wert Eins (vgl. Gl. (11)) zu bringen. Dazu dient das Unterprogramm KOMPPHIFLAE (Kompensation der Flächeneinstrahlzahlen) gemäß dem im *Bild 15* dargestellten Flußplan.

Input KOMPPHIFLAE

Φi,j	Φ[i,j]	–	numerisch ermittelte Einstrahlzahl der Fläche i auf die Fläche j

Die erforderlichen Eingabedaten sind im Output PHIFLAE enthalten.

Output KOMPPHIFLAE

Φi,j	Φ[i,j]	–	kompensierte Einstrahlzahl der Fläche i auf Fläche j

Zur Ausgabe wird wiederum das Unterprogramm PHIFLAEAUS (Phi-Flächenausgabe) benutzt.

Beispiel Flächeneinstrahlzahlen

Für den im *Bild 6* gezeigten und in den *Bildern 7* sowie *8* datenmäßig aufbereiteten Raum sind alle Flächeneinstrahlzahlen zu bestimmen.

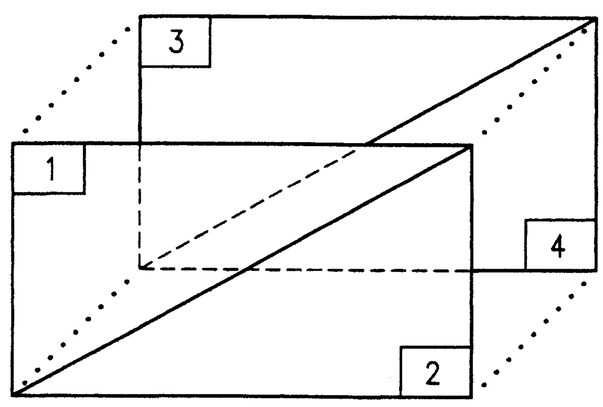
Die Ergebnisse für die gleichmäßige Unterteilung aller Dreiecksseiten in $z_i = 10$ Abschnitte sind nach Abarbeitung von PHIFLAE ermittelt. Ein Beispielausdruck ist im *Bild 16* gegeben.

Die Summenbildung ergibt beispielsweise

$$\sum_{j=1}^{12} \Phi_{1,j} = 1{,}13163.$$

Kompensiert man diese große Abweichung mit KOMPPHIFLAE, dann werden alle $\Phi_{1,j}$ durch 1,13163 dividiert. So gilt z.B. für $\Phi_{1,3}$ neu: 0,10237 (alt: 0,11585). Diese Verfahrensweise ist insofern nicht korrekt, da die Abweichungen der einzelnen $\Phi_{1,j}$ – die zur Summe 1,13163 führten – stark unterschiedlich sind. Flächenelemente, die einen geringen Abstand zueinander haben, verursachen bei sonst gleichen Abmessungen größere Fehler als solche mit großen Abständen usw. Das Anwenden von KOMPPHIFLAE stellt somit nur einen Notbehelf dar und verletzt auch die Reziprozitätsbeziehung (Gl. (12)). Genauigkeitsverbessernd wirkt lediglich eine feinere Unterteilung. Die nachfolgenden Bilder sollen diese Aussagen verdeutlichen.

Im *Bild 17* werden die Einstrahlzahlen von der vorderen Wand (Flächen: 1,2) auf die hintere Wand (Flächen: 3,4) berechnet. Die Summe $\Phi_{1,3} + \Phi_{1,4}$ ist identisch mit $\Phi_{(1+2),\ (3+4)}$, wodurch der Vergleich mit der analytischen Berechnung möglich wird. Selbst bei nur 10 Unterteilungen weicht das Rechenergebnis lediglich 0,4 % vom exakten Wert ab. Die Kompensation führt zu bedeutend größeren Fehlern, bis –11,3 %.



$$\Phi_{(1+2),(3+4)}(A_1 + A_2) = \Phi_{1,3}A_1 + \Phi_{1,4}A_1 + \Phi_{2,3}A_2 + \Phi_{2,4}A_2$$

wegen

$$\Phi_{1,3} + \Phi_{1,4} = \Phi_{2,3} + \Phi_{2,4}$$

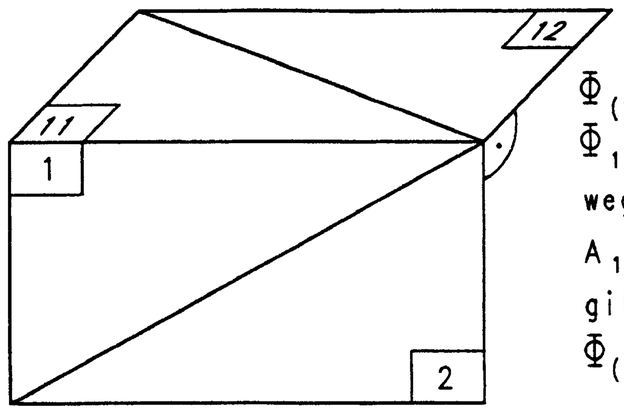
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

gilt:

$$\Phi_{(1+2),(3+4)} = \Phi_{1,3} + \Phi_{1,4}$$

$\Phi_{1,3}$	$\Phi_{1,4}$	$\Phi_{1,3} + \Phi_{1,4}$		Bemerkungen
0,11585	0,07825	0,19410	(+0,4%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 10
0,10237	0,06915	0,17152	(-11,3%)	kompensiertes Ergebnis; Unterteilung: 10
0,11544	0,07815	0,19359	(+0,1%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 20
0,10824	0,07327	0,18151	(-6,1%)	kompensiertes Ergebnis; Unterteilung: 20
0,11531	0,07811	0,19342	(0%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 100
		0,1934	(0%)	analytische Rechnung

Bild 17. Ergebnisgegenüberstellung von Φ-Werten parallel zueinander liegender Flächen bei unterschiedlich genauer Berechnung.



$$\Phi_{(1+2),(11+12)}(A_1 + A_2) = \Phi_{1,11}A_1 + \Phi_{1,12}A_1 + \Phi_{2,11}A_2 + \Phi_{2,12}A_2$$

wegen

$$A_1 = A_2 = A_{11} = A_{12}$$

gilt:

$$\Phi_{(1+2),(11+12)} = 0{,}5(\Phi_{1,11} + \Phi_{1,12} + \Phi_{2,11} + \Phi_{2,12})$$

$\Phi(1,11)$ $\Phi(1,12)$	$\Phi(2,11)$ $\Phi(2,12)$	$0{,}5[\Phi(1,11) + \Phi(1,12) + \Phi(2,11) + \Phi(2,12)]$	Bemerkungen
0,43359 0,04666	0,11728 0,14953	0,37353 (20,0%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 10
0,38315 0,04123	0,10503 0,13391	0,33166 (6,6%)	kompensiertes Ergebnis; Unterteilung: 10
0,37692 0,04667	0,11535 0,14675	0,34285 (10,2%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 20
0,35341 0,04376	0,10853 0,13809	0,32190 (3,4%)	kompensiertes Ergebnis; Unterteilung: 20
0,32822 0,04670	0,11456 0,14566	0,31757 (2%)	numerisches Ergebnis; Unterteilung: 100
		0,31120 (0%)	analytische Rechnung

Bild 18. Ergebnisgegenüberstellung von Φ-Werten rechtwinklig zueinander liegender Flächen bei unterschiedlich genauer Berechnung.

Generell anders fügen sich die Ergebnisse im *Bild 18*. Die Einstrahlzahl der vorderen Wand (Flächen: 1, 2) auf die Decke (Flächen: 11, 12) ist zu ermitteln. Es besteht die Identität: $\Phi_{(1+2),(11+12)} = 0{,}5\ (\Phi_{1,11}+\Phi_{1,12}+\Phi_{2,11}+\Phi_{2,12})$. Bei grober Unterteilung ergeben sich sehr große Fehler (bis 20%). Die Kompensation wirkt sich vorteilhaft aus, Reduktion des Fehlers auf 6,6%. Interessant ist auch die Betrachtung der einzelnen Summanden. Die verfeinerte Unterteilung der Flächen 1 und 11 verbessern das Ergebnis $\Phi_{1,11}$ erheblich. Im Falle der Flächen 1 und 12 bewirkt dies praktisch keine Änderung von $\Phi_{1,12}$, da der durchschnittliche Elementabstand bedeutend größer ist.

Eine Verbesserung des Moduls PHIFLAE wäre z. B. möglich, wenn aneinandergrenzende Flächen (mit einer gemeinsamen Seite) generell feiner unterteilt würden bzw. wenn die Flächendiskretisierung abhängig von den Größen des Integranden ($\cos\beta_i$, $\cos\beta_j$,r) erfolgte. Ein ausgeklügeltes Korrektursystem in KOMPPHIFLAE wäre ebenfalls vorteilhaft, wobei nur die aneinandergrenzenden Flächen entsprechend ihrer Berührungslänge Berücksichtigung fänden. Am einfachsten erscheint jedoch eine verfeinerte Unterteilung. Es wird auf die Entwicklung immer leistungsfähigerer Rechner gesetzt.

Literatur

[1] *Glück, B.:* Strahlungsheizung – Theorie und Praxis. Berlin: Verlag für Bauwesen; Karlsruhe: Verlag C. F. Müller, 1982.

[2] *Glück, B.:* Wärmeübertragung, Wärmeabgabe von Raumheizflächen und Rohren (Reihe: Bausteine der Heizungstechnik). Berlin: Verlag für Bauwesen, 2. Auflage 1990.

[3] *Yoo, S.-H.:* Einstrahlzahlen für die Strahlungsaustausch-Berechnung in schiefwinkligen Räumen. Gesundheits-Ingenieur 115 (1994) H. 5, S. 252–256.

[4] *Glück, B.:* Berechnung von Einstrahlzahlen – Stand und mögliche Weiterentwicklung im Anwendungsbereich der Heizungstechnik. Gesundheits-Ingenieur 107 (1986) H. 2, S. 98–118.

[5] *Kollmar, A.* und *Liese, W.:* Strahlungsheizung. 4. Aufl. München: Oldenbourg 1957.

[6] VDI-Wärmeatlas. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1994.