Heiz- bzw. Kühlleistung einer homogenen, mehrschichtigen Platte mit eingeformtem Rohrregister unter stationären Randbedingungen

Bernd Glück

Die Bestimmung der Wärmestromdichten an den Oberflächen mehrschichtiger Platten mit eingeformtem Rohrregister ist mit dem Algorithmus von *Faxén,* der die Lösung bereits im Jahre 1937 angab [1], unter Verwendung der heutigen Rechentechnik gut möglich. *Fraaß* bestätigte in [2], dass es sich dabei um eine sehr gute Näherung handelt. Obwohl der Originalalgorithmus in [3] detailliert nachvollzogen und veröffentlicht wurde, hat sich seine Anwendung bis heute nicht durchgesetzt. Dies wäre bei der gegenwärtigen Vielfalt der thermisch aktiven Bauelemente als Boden-, Wand- und/oder Deckenelemente aber wünschenswert, da es für verschiedene Anordnungen keine genormten Prüfmethoden gibt, da der angesprochene Algorithmus bei raumbegrenzenden Flächen aufwändige Prüfmethoden sehr gut ersetzen kann und da beispielsweise Bauteiloptimierungen außerordentlich kostengünstig möglich sind. Da die *Faxénsche* Lösung vielfach Verständnisprobleme hervorruft, wird nachfolgend ein einheitlicher Algorithmus für eine Dreischichtenplatte mit zweidimensionaler Wärmeleitung vorgestellt, wobei durch entsprechende Variation der Eingaben auch Zwei- und Einschichtplatten berechenbar sind. Es werden problemorientierte „Endgleichungen" angegeben, die man ohne detaillierte Kenntnis der Herleitung nutzen kann.

1. Kurzcharakteristik der Modellierung

Einen beispielhaften Aufbau zeigt das *Bild 1,* wobei die nachfolgenden Merkmale gelten.

- Es ist mindestens eine Massivschicht mit einem Rohrregister vorhanden, wobei die Rohre formschlüssig eingebettet sind. Alle Rohre haben die gleiche Geometrie, bestehen aus dem gleichen Material und weisen gleiche Rohrabstände auf. Sie liegen in einer parallelen Ebene zur Schichtberandung.
- Die rohrführende Schicht wird als homogener, isotroper Körper mit einer zweidimensionalen Wärmeleitung im Querschnitt betrachtet. Die Wärmeleitung in der Rohrschicht ist quellenfrei. Somit gilt die *Laplace*sche Differentialgleichung für den ebenen Fall

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \,. \qquad (1)$$

  Die Rohraußenfläche hat eine konstante Temperatur (Randbedingung erster Art).
- Zusätzlich zur Rohrschicht können sich beidseitig je eine Wärmeleitschicht K und L mit unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten anschließen, in denen wiederum eine zweidimensionale Wärmeleitung im Querschnitt angenommen wird. Zwischen der Rohrschicht und den eventuell vorhandenen Wärmeleitschichten K und L gelten Randbedingungen erster und zweiter Art.
- Generell erfolgt kein Wärmetransport in Richtung der Rohrachse. Somit ist das Modell nur für stationäre Randbedingungen unter Annahme von mittleren Flüssigkeitstemperaturen im Rohr bei gleichzeitig kleinen Temperaturspreizungen geeignet. Diese Bedingungen werden beispielsweise bei Fußbodenheizungen, Wandheizungen, Kühldecken sowie ähnlichen Einsatzfällen sehr gut erfüllt.
- In einer beliebigen Anzahl von inneren und äußeren Deckschichten erfolgt nur eine eindimensionale Wärmeleitung in y-Richtung. Dies ist dann gegeben, wenn diese Schichten gegenüber der Rohrschicht und den zusätzlichen Schichten K und L nur unbedeutend zum Wärmetransport zwischen den Rohren beitragen. Das trifft generell auf Wärmedämmschichten oder auch

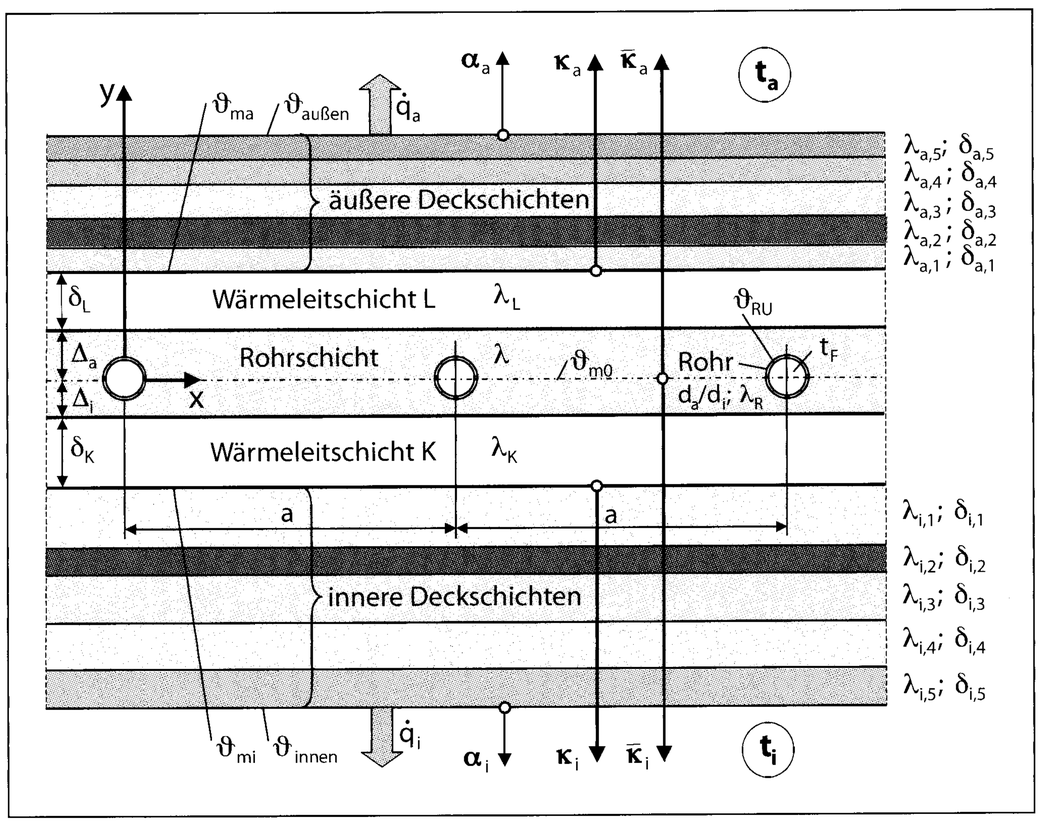

Bild 1. Querschnitt durch eine Massivplatte mit Rohrregister und zwei Wärmeleitschichten K und L, die zusammen mit der rohrführenden Schicht an der zweidimensionalen Wärmeleitung teilhaben, sowie durch innere und äußere Deckschichten, in denen nur eine eindimensionale Wärmeleitung (hier in vertikaler Richtung) wirkt. Die geometrischen und wärmetechnischen Größen sind für die Formeldarstellungen verbindlich.

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, F+E TGA, Goethestraße 8, 08547 Jößnitz (Plauen) und Westsächsische Hochschule Zwickau (FH).

auf Deckschichten, die nach Dämmschichten angeordnet sind, zu. Als Beispiel seien Fußbodenbeläge, die sich auf Trittschalldämmungen befinden, zu nennen.

- An der inneren und äußeren Bauteiloberfläche erfolgt ein Wärmeübergang durch Konvektion und Strahlung, der zusammengefasst nach [4] mit einem Wärmeübergangskoeffizienten gemäß Basiskennlinie darstellbar ist. Die Wärmeleitwiderstände der Deckschichten werden zweckmäßigerweise mit dem jeweiligen Wärmeübergangskoeffizienten zu einem Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ zusammengefasst, der dann die Randbedingung dritter Art repräsentiert. Es gelten für m äußere und n innere Deckschichten, die sich an die im *Bild 1* dargestellten Plattenoberflächen anschließen:

$$\kappa_a = \left[\frac{1}{\alpha_a} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_{a,j}}{\lambda_{a,j}}\right]^{-1}; \quad \kappa_i = \left[\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{i,j}}{\lambda_{i,j}}\right]^{-1}. \tag{2}$$

2. Übertemperaturfeld in der Dreischichtplatte für gleiche Umgebungstemperaturen $t_i = t_a$

Im Weiteren erfolgt die Angabe der Lösungsschritte nur so weit, wie diese zur Aufstellung des Rechenprogramms und für dessen verständnisvolle Anwendung erforderlich sind. Hierbei wird generell auf eine *Dreischichtplatte* mit zweidimensionaler Wärmeleitung orientiert. Die Ein- bzw. Zweischichtplatte sollte dann als Sonderlösung daraus darstellbar sein. Diese Vorgehensweise ist zwar im Einzelfall rechentechnisch aufwändiger als die direkte Nutzung von separaten Lösungen für die Ein- bzw. Zweischichtplatte, aber es besteht der Vorteil, nur ein Rechenprogramm entwickeln zu müssen.

Für die Übertemperaturen $\vartheta = t - t_i$ in den zweidimensional wärmeleitenden Schichten gelten für die näherungsweise Lösung der Differentialgleichung (Ableitung in [1, 3]):

Rohrschicht

$$\vartheta = -A\left\{\frac{\pi}{a}[G_a\, y + G_i + |y|\,] - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[\underbrace{e^{-\frac{2\pi s}{a}|y|}}_{\substack{\text{Term kennzeichnet}\\ \text{die rohrführende}\\ \text{Schicht}}} + g_a(s)\; e^{-\frac{2\pi s}{a}y} + g_i(s)\; e^{\frac{2\pi s}{a}y}\right]\cos\left(\frac{2\pi s}{a}\,x\right)\right\}. \tag{3}$$

Wärmeleitschicht L ($y > 0$)

$$\vartheta_L = -A\left\{\frac{\pi}{a}[G_{La}\, y + G_{Li} + y\,] - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[g_{La}(s)\; e^{-\frac{2\pi s}{a}y} + g_{Li}(s)\; e^{\frac{2\pi s}{a}y}\right]\cos\left(\frac{2\pi s}{a}\,x\right)\right\}. \tag{4}$$

Wärmeleitschicht K ($y < 0$)

$$\vartheta_K = -A\left\{\frac{\pi}{a}[G_{Ka}\, y + G_{Ki} - y\,] - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[g_{Ka}(s)\; e^{-\frac{2\pi s}{a}y} + g_{Ki}(s)\; e^{\frac{2\pi s}{a}y}\right]\cos\left(\frac{2\pi s}{a}\,x\right)\right\}. \tag{5}$$

Die *Konstanten* A, G_a, G_i, G_{La}, G_{Li}, G_{Ka}, G_{Ki}, $g_a(s)$, $g_i(s)$, $g_{La}(s)$, $g_{Li}(s)$, $g_{Ka}(s)$ und $g_{Ki}(s)$ sind aus den *Randbedingungen* zu bestimmen. Zusammengefasst gelten:

- am äußeren Rohrumfang (Randbedingung erster Art: konstante Temperatur t_{RU})

$$\vartheta = \vartheta_{RU} = t_{RU} - t_i \tag{6}$$

- an der äußeren Oberfläche der Wärmeleitlamelle L (Randbedingung dritter Art: Wärmeübergang feste Körperfläche an den Raum)

$$\left.\frac{\partial\vartheta_L}{\partial y}\right|_{y=\Delta_a+\delta_L} = -\,h_a\,\vartheta_L \quad \text{mit} \quad h_a = \frac{\kappa_a}{\lambda_L} \tag{7}$$

- an der inneren Oberfläche der Wärmeleitlamelle K (Randbedingung dritter Art: Wärmeübergang feste Körperfläche an den Raum)

$$\left.\frac{\partial\vartheta_K}{\partial y}\right|_{y=-\Delta_i-\delta_K} = h_i\,\vartheta_K \quad \text{mit} \quad h_i = \frac{\kappa_i}{\lambda_K} \tag{8}$$

- an der Schichtgrenze zwischen Rohrschicht und Wärmeleitschicht L (Randbedingungen erster und zweiter Art: Temperaturen an den Schichtgrenzen gleich und austretender Wärmestrom betragsmäßig gleich eintretender Wärmestrom)

$$\vartheta(x,\, y = \Delta_a) = \vartheta_L(x,\, y = \Delta_a) \tag{9}$$

$$\lambda\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{x,\,y=\Delta_a} = \lambda_L\left.\frac{\partial\vartheta_L}{\partial y}\right|_{x,\,y=\Delta_a} \tag{10}$$

- an der Schichtgrenze zwischen Rohrschicht und Wärmeleitschicht K (Randbedingungen erster und zweiter Art: Temperaturen an den Schichtgrenzen gleich und austretender Wärmestrom betragsmäßig gleich eintretender Wärmestrom)

$$\vartheta(x,\, y = -\Delta_i) = \vartheta_K(x,\, y = -\Delta_i) \tag{11}$$

$$\lambda\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{x,\,y=-\Delta_i} = \lambda_K\left.\frac{\partial\vartheta_K}{\partial y}\right|_{x,\,y=-\Delta_i}. \tag{12}$$

Aus den Randbedingungen gemäß Gln. (7) bis (12) folgen die nachfolgenden Bestimmungsgleichungen für die *Hauptterme:*

$$G_{La} + 1 = -h_a\,[G_{La}\,(\Delta_a + \vartheta_L) + G_{Li} + (\Delta_a + \vartheta_L)] \tag{13}$$

$$G_{Ka} - 1 = h_i\,[G_{Ka}\,(-\Delta_i - \vartheta_K) + G_{Ki} + (\Delta_i + \vartheta_K)] \tag{14}$$

$$(G_a + 1)\,\Delta_a + G_i = (G_{La} + 1)\,\Delta_a + G_{Li} \tag{15}$$

$$\lambda\,(G_a + 1) = \lambda_L\,(G_{La} + 1) \tag{16}$$

$$-\,G_a\,\Delta_i + G_i = -\,G_{Ka}\,\Delta_i + G_{Ki} \tag{17}$$

$$\lambda\,(G_a - 1) = \lambda_K\,(G_{Ka} - 1). \tag{18}$$

Die Lösung des vorstehenden Gleichungssystems liefert mit den modifizierten Teilwärmedurchgangskoeffizienten bezogen auf die Ebene y = 0 (siehe *Bild 1)*

$$\bar{\kappa}_a = \left[\frac{1}{\kappa_a} + \frac{\Delta_a}{\lambda} + \frac{\delta_L}{\lambda_L}\right]^{-1} \tag{19}$$

$$\bar{\kappa}_i = \left[\frac{1}{\kappa_i} + \frac{\Delta_i}{\lambda} + \frac{\delta_K}{\lambda_K}\right]^{-1} \tag{20}$$

die Konstanten

$$G_a = \frac{\bar{\kappa}_a - \bar{\kappa}_i}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \tag{21}$$

$$G_i = \frac{-2\,\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i} \quad . \tag{22}$$

Die Randbedingungen auf die *Reihenausdrücke* angewandt, liefern für jede Laufvariable s an den Stellen x, wo $\cos(2\,\pi\,s\,x\,/\,a) = 1$ gilt:

$$\left(h_a - \frac{2\pi s}{a}\right) g_{La}(s)\, e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_a + \delta_L)} + \left(h_a + \frac{2\pi s}{a}\right) g_{Li}(s) = 0 \tag{23}$$

$$\left(h_i + \frac{2\pi s}{a}\right) g_{Ka}(s)\, e^{\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i + \delta_K)} + \left(h_i - \frac{2\pi s}{a}\right) g_{Ki}(s) = 0 \tag{24}$$

$$g_{Li}(s) - g_i(s) + [\,g_{La}(s) - g_a(s) - 1]\, e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a} = 0 \tag{25}$$

$$\lambda_L\, g_{Li}(s) - \lambda\, g_i(s) + [\lambda + \lambda\, g_a(s) - \lambda_L\, g_{La}(s)]\, e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a} = 0 \tag{26}$$

$$-g_{Ka}(s) + g_a(s) + [1 + g_i(s) - g_{Ki}(s)]\, e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_i} = 0 \tag{27}$$

$$\lambda_K\, g_{Ka}(s) - \lambda\, g_a(s) + [\,\lambda\, g_i(s) + \lambda - \lambda_K\, g_{Ki}(s)]\, e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_i} = 0. \tag{28}$$

Zur Berechnung der Wärmeströme müssen die Temperaturen in den verschiedenen Schichten nicht explizit bekannt sein, deshalb wird nur das Endergebnis für $g_a(s)$ und $g_i(s)$ mitgeteilt. Mit den Abkürzungen

$$F1 = \frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s} + \frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\delta_L} \tag{29}$$

$$F2 = \frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_a} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_a + \delta_L)} \tag{30}$$

$$F3 = \frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_i} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_i + \delta_K)} \tag{31}$$

$$F4 = \frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s} + \frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\delta_K} \tag{32}$$

folgen die für die rohrführende Schicht geltenden Konstanten

$$g_a(s) = \frac{F1\,F3 - F2\,F3}{F2\,F3 - F1\,F4} \tag{33}$$

$$g_i(s) = \frac{F2\,F4 - F2\,F3}{F2\,F3 - F1\,F4} \tag{34}$$

bzw. in ausführlicher Darstellung

$$g_a(s) = \frac{\left(\frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s} + \frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\delta_L}\right)\left(\frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_i} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_i + \delta_K)}\right) - \left(\frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_a} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_a + \delta_L)}\right)\left(\frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_i} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_i + \delta_K)}\right) - \left(\frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_a} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_a + \delta_L)}\right)\left(\frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s}\,\frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\Delta_i} + e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}(\Delta_i + \delta_K)}\right)}{-\left(\frac{h_a\, a + 2\,\pi\, s}{h_a\, a - 2\,\pi\, s} + \frac{\lambda_L - \lambda}{\lambda_L + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\delta_L}\right)\left(\frac{h_i\, a + 2\,\pi\, s}{h_i\, a - 2\,\pi\, s} + \frac{\lambda_K - \lambda}{\lambda_K + \lambda}\, e^{-\frac{4\,\pi\, s}{a}\delta_K}\right)} \tag{35}$$

$$g_i(s)=\frac{\left(\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\,\frac{\lambda_L-\lambda}{\lambda_L+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a}+e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_a+\delta_L)}\right)\left(\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}+\frac{\lambda_K-\lambda}{\lambda_K+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\delta_K}\right)-}{\left(\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\,\frac{\lambda_L-\lambda}{\lambda_L+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a}+e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_a+\delta_L)}\right)\left(\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}\,\frac{\lambda_K-\lambda}{\lambda_K+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_i}+e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\delta_K)}\right)-}\cdots$$

$$\cdots\frac{-\left(\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\,\frac{\lambda_L-\lambda}{\lambda_L+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a}+e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_a+\delta_L)}\right)\left(\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}\,\frac{\lambda_K-\lambda}{\lambda_K+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_i}+e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\delta_K)}\right)}{-\left(\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}+\frac{\lambda_L-\lambda}{\lambda_L+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\delta_L}\right)\left(\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}+\frac{\lambda_K-\lambda}{\lambda_K+\lambda}\,e^{-\frac{4\pi s}{a}\delta_K}\right)}\,. \quad (36)$$

Abschließend ist noch die Konstante A anhand der Randbedingung Gl. (6) zu bestimmen. Nach aufwändiger Untersuchung des Verhaltens der Reihe im Ursprung des Koordinatensystems und Einführen einer Näherung ergibt sich schließlich

$$A=\frac{\vartheta_{\mathrm{RU}}}{\ln\left(\frac{a}{\pi\,d_a}\right)-\frac{\pi}{a}\,G_i+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_a(s)+g_i(s)}{s}}\,. \quad (37)$$

3. Übertemperaturfeld in der Ein- oder Zweischichtplatte für $t_i = t_a$

Die unter 2 angegebene Lösung gilt auch für Platten mit weniger Schichten, wenn die Dicken der fehlenden Schichten null und die Wärmeleitfähigkeiten der fehlenden Schichten gleich der Wärmeleitfähigkeit der Rohrschicht gesetzt werden. Beispielsweise ergeben sich für die *Einschichtplatte* mit den Merkmalen $\delta_L = 0$ und $\delta_K = 0$ sowie $\lambda_L = \lambda_K = \lambda$ für die Gln. (19) und (20)

$$\bar{\kappa}_a=\left[\frac{1}{\kappa_a}+\frac{\Delta_a}{\lambda}\right]^{-1} \quad (19a)$$

$$\bar{\kappa}_i=\left[\frac{1}{\kappa_i}+\frac{\Delta_i}{\lambda}\right]^{-1}. \quad (20a)$$

Die Konstanten G_a und G_i nach den Gln. (21) und (22) gelten unverändert und aus den Gln. (35) und (36) folgen:

$$g_a(s)=\frac{\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\;e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_i}-e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\Delta_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\Delta_a)}-\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\,\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}} \quad (35a)$$

$$g_i(s)=\frac{\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}\;e^{-\frac{4\pi s}{a}\Delta_a}-e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\Delta_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{a}(\Delta_i+\Delta_a)}-\frac{h_a\,a+2\pi s}{h_a\,a-2\pi s}\,\frac{h_i\,a+2\pi s}{h_i\,a-2\pi s}}\,. \quad (36a)$$

Diese Ergebnisse sind für die Einschichtplatte bereits bekannt ([1, 3]) bzw. wären aus der Konstellation für eine Einschichtplatte analog Abschnitt 2 direkt ableitbar.

4. Wärmestromdichten an den Plattenoberflächen bei $t_i = t_a$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt die *mittlere Übertemperatur* bezogen auf den Rohrabstand a in der beliebigen Ebene y innerhalb der Rohrschicht zu

$$\vartheta_m=\frac{1}{a}\int_0^a\vartheta\,dx=\frac{A\pi}{a}\,(-G_a y-G_i-|y|), \quad (38)$$

da der Summenausdruck in Gl. (3) in a periodisch ist und das zugehörige Integral verschwindet. Für die Rohrebene $y = 0$ gilt somit

$$\vartheta_{m0}=-\frac{A\pi}{a}\,G_i. \quad (38a)$$

Die mittleren Temperaturen an den Schichtgrenzen entsprechen stets den Verhältnissen der zugehörigen $\bar{\kappa}_a/\kappa_a$ bzw. $\bar{\kappa}_i/\kappa_i$ usw. *Fraaß* [2] sieht darin den Näherungscharakter der *Faxén*-Lösung. Für die Oberflächen der zweidimensional wärmeleitenden Schichten gelten damit unter Substitution der Gln. (19) und (20) die im *Bild 1* vermerkten Übertemperaturen:

$$\vartheta_{ma}=-\frac{A\pi}{a}\,G_i\,\frac{\bar{\kappa}_a}{\kappa_a}=\frac{A\pi\,\lambda}{a\,\kappa_a}\,(G_a+1) \quad (39)$$

$$\vartheta_{mi}=-\frac{A\pi}{a}\,G_i\,\frac{\bar{\kappa}_i}{\kappa_i}=\frac{A\pi\,\lambda}{a\,\kappa_i}\,(1-G_a). \quad (40)$$

Mit Kenntnis der mittleren Temperaturen in den markanten Ebenen folgen sofort die *Wärmestromdichten:*

$$\dot{q}_a=\kappa_a\,\vartheta_{ma} \quad (41)$$

$$\dot{q}_i=\kappa_i\,\vartheta_{mi}. \quad (42)$$

5. Besonderheiten bei ungleichen Umgebungstemperaturen $t_a \neq t_i$

Generell wäre die Formulierung der Gl. (3) bis (5) jeweils als Temperaturfeld $t(x,y)$, $t_L(x,y)$, $t_K(x,y)$ und eine entsprechende Modifikation der Randbedingungen durch Einführen der Temperaturen t anstelle der Übertemperaturen ϑ notwendig. Da die Wärmeleitung im Bauteil stationär betrachtet wird, ist es jedoch einfacher, von den bisherigen Ergebnissen für $t_i = t_a$ und $\vartheta = t - t_i$ auszugehen und einen zusätzlichen Wärmestrom infolge $t_i \neq t_a$ zu superponieren. Der Temperaturverlauf t_0, der sich bei *un-*

temperierten Rohren im Bauteil einstellen würde, ist im *Bild 2* symbolisch eingetragen. Er stellt lediglich eine Funktion von y dar:

$$t_{0,y} = t_i + (t_a - t_i)\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_y} = t_i + \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_y} \tag{43}$$

mit

$$\Delta = t_a - t_i \tag{44}$$

$$\kappa_{Platte} = \left[\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{5}\frac{\delta_{i,j}}{\lambda_{i,j}} + \frac{\delta_K}{\lambda_K} + \frac{\Delta_i + \Delta_a}{\lambda} + \frac{\delta_L}{\lambda_L} + \sum_{j=1}^{5}\frac{\delta_{a,j}}{\lambda_{a,j}} + \frac{1}{\alpha_a}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{\bar{\kappa}_i} + \frac{1}{\bar{\kappa}_a}\right]^{-1}. \tag{45}$$

An der im Bild eingetragenen Stelle gilt beispielsweise

$$\kappa_y = \left[\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{5}\frac{\delta_{i,j}}{\lambda_{i,j}} + \frac{\delta_K}{\lambda_K} + \frac{\Delta_i + \Delta_a}{\lambda}\right]^{-1}. \tag{46}$$

Damit ergeben sich die Temperaturen an den relevanten Orten:

Rohrebene

$$t_{0,R} = t_i + \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\bar{\kappa}_i} = t_i + \Delta\frac{1}{\frac{1}{\bar{\kappa}_i} + \frac{1}{\bar{\kappa}_a}}\frac{1}{\bar{\kappa}_i} = \frac{t_i\,\bar{\kappa}_i + t_a\,\bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a} \tag{47}$$

äußere Oberfläche der Wärmeleitschicht L

$$t_{0,a} = t_i + \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\left(\frac{1}{\kappa_{Platte}} - \frac{1}{\kappa_a}\right)^{-1}} = t_a - \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_a} \tag{48}$$

innere Oberfläche der Wärmeleitschicht K

$$t_{0,i} = t_i + \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_i}. \tag{49}$$

Damit berechnen sich für den allgemeinen Fall der *temperierten Rohre* durch die Überlagerung mit den bereits bekannten Lösungen der Gln. (39) und (40) die *mittleren Übertemperaturen* gemäß *Bild 1*

$$\vartheta_{ma} = t_{0,a} + \underbrace{\frac{A\pi\lambda}{a\,\kappa_a}(G_a + 1)}_{Gl.(39)} - t_a = \frac{A\pi\lambda}{a\,\kappa_a}(G_a + 1) - \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_a} \tag{50}$$

$$\vartheta_{mi} = t_{0,i} + \underbrace{\frac{A\pi\lambda}{a\,\kappa_i}(1 - G_a)}_{Gl.(40)} - t_i = \frac{A\pi\lambda}{a\,\kappa_i}(1 - G_a) + \Delta\frac{\kappa_{Platte}}{\kappa_i} \tag{51}$$

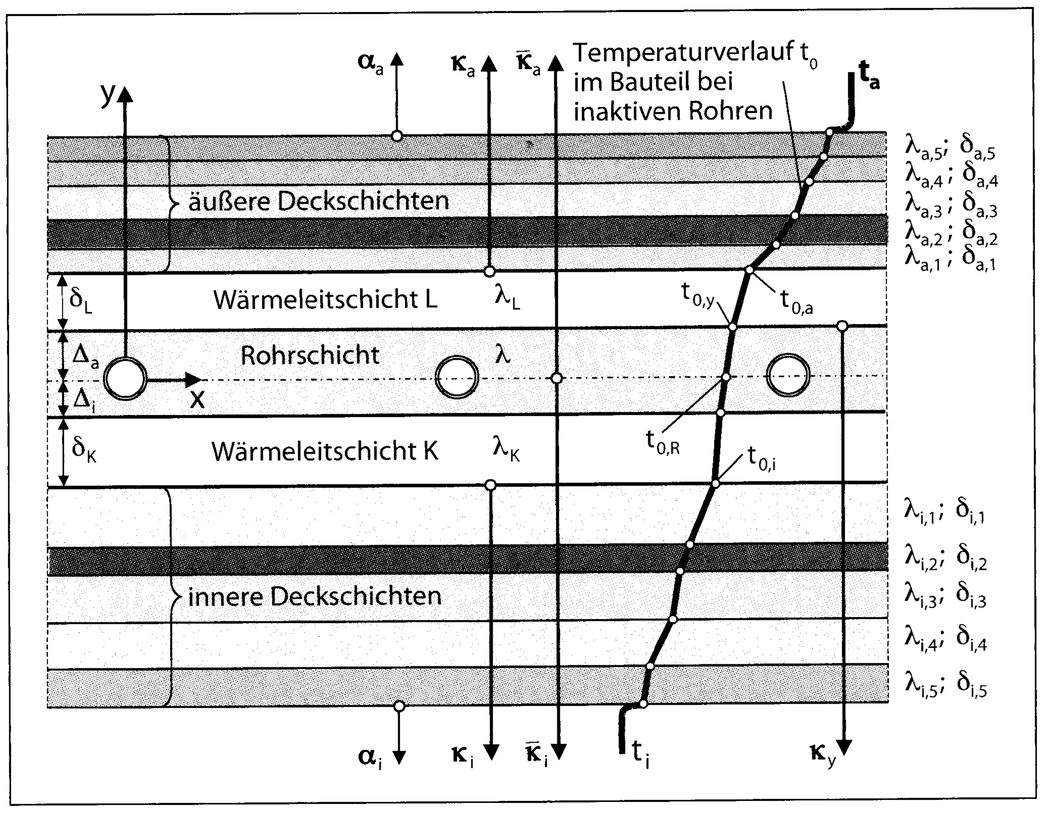

Bild 2. Schematischer Temperaturverlauf t_0 bei nicht temperiertem Rohrregister. κ_y stellt den Teilwärmedurchgangskoeffizienten von der jeweils betrachteten Schichtgrenze bis zum inneren Raum dar.

sowie die *Rohrübertemperatur*

$$\vartheta_{RU} = t_{RU} - t_{0,R} = t_{RU} - \frac{t_i\,\bar{\kappa}_i + t_a\,\bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a}. \tag{52}$$

Die *Wärmestromdichten* folgen aus den bisherigen Gln. (41) und (42), wobei natürlich die Werte nach den Gln. (50) und (51) einzusetzen sind.

Die Rohrübertemperatur gemäß Gl. (52) dient zur Berechnung der *Konstanten A*. Nach Gl. (37) ergibt sich:

$$A = \frac{t_{RU} - \frac{t_i\,\bar{\kappa}_i + t_a\,\bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a}}{\ln\left(\frac{a}{\pi\,d_a}\right) - \frac{\pi}{a}G_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_a(s) + g_i(s)}{s}}. \tag{53}$$

In dieser Gleichung ist der Durchmesser der Materialöffnung in der rohrführenden Schicht bedeutungsvoll. Er ist normalerweise mit dem des Rohraußendurchmessers d_a identisch. Falls ein Luftspalt um das Rohr vorhanden sein sollte, so ist der Durchmesser des äußeren Luftspaltes d_S einzusetzen!

6. Zusammenhang zwischen Wärmestromdichten und mittlerer Fluidtemperatur im Rohr

Die Wärmeabgabe eines Rohres der Länge L beträgt

$$\dot{Q}_R = (\dot{q}_a + \dot{q}_i)\,a\,L. \tag{54}$$

Dieser Wärmestrom muss natürlich auch vom strömenden Fluid im Rohr an den äußeren Umfang übertragen werden. Bei der im *Bild 3* gezeigten Situation ergibt sich der auf den Rohraußendurchmesser bezogene Teilwärmedurchgangskoeffizient zu

$$\kappa_R = \left(\frac{d_a}{2\lambda_R}\ln\frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{2\lambda_S}\ln\frac{d_S}{d_a} + \frac{d_a}{\alpha_R\,d_i}\right)^{-1}, \tag{55}$$

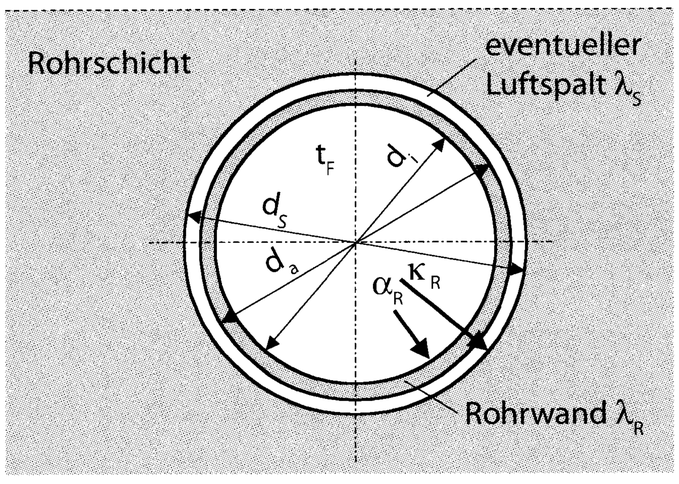

Bild 3. Rohr mit eventuellem Luftspalt in der Rohrschicht mit Kennzeichnung der Abmessungen und der Wärmeleitfähigkeiten. Der Wärmeübergangskoeffizient vom Fluid der Temperatur t_F an die Rohrwand α_R sowie der Teilwärmedurchgangskoeffizient bis zum Material der Rohrschicht κ_R sind symbolisch vermerkt.

woraus sich der Rohrwärmestrom berechnet:

$$\dot{Q}_R = \kappa_R \, \pi \, d_a \, (t_F - t_{RU}) \, L. \tag{56}$$

Das Gleichsetzen liefert

$$t_{RU} = t_F - \frac{(\dot{q}_a + \dot{q}_i) \, a}{\kappa_R \, \pi \, d_a},$$

und die Substitution von Gl. (55) ergibt:

$$t_{RU} = t_F - \frac{(\dot{q}_a + \dot{q}_i) \, a}{\pi} \times \left(\frac{1}{2\lambda_R} \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{1}{2\lambda_S} \ln \frac{d_S}{d_a} + \frac{1}{\alpha_R \, d_i} \right). \tag{57}$$

Nach Addition der Wärmestromdichten erhält man das Zwischenergebnis

$$\dot{q}_a + \dot{q}_i = 2A \, \pi \, \lambda / a. \tag{58}$$

Das Einsetzen von A nach Gl. (53) sowie die Substitution von t_{RU} nach Gl. (57) liefert nach Umformung die Gesamtwärmestromdichte in Abhängigkeit der Fluidtemperatur in den Rohren

$$\dot{q}_i + \dot{q}_a = \frac{2\pi\lambda}{a} \frac{t_F - \dfrac{t_i \, \bar{\kappa}_i + t_a \, \bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a}}{\underbrace{\dfrac{2\lambda}{d_i \, \alpha_R}}_{\text{Wärmeübergangswiderstand vom Fluid an die Rohrwand}} + \underbrace{\dfrac{\lambda}{\lambda_R} \ln\left(\dfrac{d_a}{d_i}\right)}_{\text{Wärmeleitwiderstand in der Rohrwand}} + \underbrace{\dfrac{\lambda}{\lambda_S} \ln\left(\dfrac{d_S}{d_a}\right)}_{\text{Wärmeleitwiderstand im möglichen Luftspalt}} + \underbrace{\ln\left(\dfrac{a}{\pi d_S}\right) - \dfrac{\pi}{a} G_i + \sum_{s=1}^{\infty} \dfrac{g_a(s) + g_i(s)}{s}}_{\text{Wärmeleitwiderstand in der Platte gemäß Faxénschem Algorithmus}}} \tag{59}$$

Charakterisierung des wärmetechnischen Bezuges: →

Diese Berechnungsgleichung kann quasi als *Endergebnis* angesehen werden. Wie man die Ermittlung am rationellsten durchführt, ist Inhalt des Rechenprogramms.

7. Vorschlag eines rationellen Lösungsweges

Aus der bisherigen Darstellung des Algorithmus wird deutlich, welche Berechnungsvielfalt gegeben ist. Die Gl. (59) stellt in idealer Weise den Zusammenhang zwischen der mittleren Fluidtemperatur t_F und der Gesamtwärmestromdichte des thermisch aktiven Bauteils her. Damit kann die hauptsächliche Fragestellung nach der *temperaturabhängigen Leistung* beantwortet werden.

Es ist aber zu beachten, dass in mehreren Termen der Bestimmungsgleichung die Wärmeübergangskoeffizienten an der Bauteilaußen- und -innenfläche α_a und α_i eingehen. Dies betrifft beispielsweise $\bar{\kappa}_a$ sowie $\bar{\kappa}_i$ und damit auch G_i, aber auch die Reihenglieder $g_a(s)$ sowie $g_i(s)$ enthalten implizit κ_a mit α_a und κ_i mit α_i nach Gln. (2). Da die genannten Wärmeübergangskoeffizienten in der Regel Funktionen der Oberflächentemperaturen darstellen [4], sind *Iterationen* unerlässlich.

Des Weiteren interessieren natürlich auch die Einzelgrößen der Wärmestromdichten $\dot{q}_a$ und $\dot{q}_i$, die in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen.

Schließlich sind auch die *Temperaturen an signifikanten Stellen* zu bestimmen, so beispielsweise die maximalen Oberflächentemperaturen, die senkrecht über den Rohrscheiteln auftreten. Deren sehr aufwändige Berechnung basiert auf den Gln. (3) bis (5).

Zweckmäßiger Weise geht man bei der Berechnung von der *Vorgabe der mittleren Fluidtemperatur* aus, dies hat den Vorteil, dass der Wärmeübergangskoeffizient α_R sofort bestimmbar ist.

Generell wird der Algorithmus für eine *Dreischichtplatte* aufgestellt, wobei die rechentechnische Abarbeitung bei Zwei- bzw. Einschichtplatten intern durch spezielle Steuerungen zu minimieren ist. Einen Grobablaufplan zeigt *Bild 4.*

8. Beispiele

Beispiel 1: Fußbodenheizung mit konventionellem Rohrregister im Estrich

Im *Bild 5* ist der Aufbau einer Fußbodenheizung mit einem Kunststoff-Rohrregister aus einem mäanderförmig verlegten Rohr 17 × 2 mm (Wärmeleitfähigkeit 0,35 W/(m K)); gerade Rohrlänge 4 m) dargestellt. Es ist in einem Heizestrich (Dicke 68 mm; Wärmeleitfähigkeit 1,2 W/(m K)) eingebettet. Die operativen Raumtemperaturen betragen beiderseits 20 °C. Die Wärmeübergangskoeffizienten sind nach [4] zu bestimmen.

Es sollen die Wärmeleistungen der Fußbodenheizfläche für mittlere Wassertemperaturen von 35 °C bis 45 °C berechnet werden.

Aus *Bild 6* sind die in der Bildschirmmaske eingetragenen Eingabewerte und die Ergebnisse für die höchste Fluidtemperatur zu erkennen. *Tabelle 1 zeigt* den kompletten Rechnerausdruck und *Bild 7* den Leistungsverlauf als Diagramm.

Beispiel 2: Fußbodenheizung mit Kunststoff-Kapillarrohrmatte im Fliesenkleber

Der Aufbau der Fußbodenheizung mit einer Kunststoff-Kapillarrohrmatte, deren parallele Röhrchen 4,3 × 0,8 mm (Wärmeleitfähigkeit 0,21 W/(m K); gerade Rohrlänge 4 m) gleich oder im Wechsel durchströmt werden, geht aus *Bild 8* hervor. Der Fliesenkleber habe die Schichtdicke von 9 mm (Wärmeleitfähigkeit 1,0 W/(m K)). Der Deckenaufbau nach unten (Raum *i*) und die Raumtemperaturen entsprechen dem *Beispiel 1*. Es sind die Wärmeleistungen im Bereich t_F = 24 ... 34 °C zu ermitteln. In *Tabelle 2* sind die markanten Berechnungsergebnisse vermerkt.

Aufgrund der dünnen Rohrschicht, der oberflächennahen Verlegung, des geringen Rohrabstandes und des relativ gut wärmeleitenden Fliesenbelages ergeben sich gegenüber *Beispiel 1* höhere Wärmestromdichten. Lag bei der konventionellen Verlegung bei der Wassertemperatur von 40 °C eine raumseitige Nutzleistung von 60,8 W/m² vor, so ist diese Leistung nunmehr bereits mit einer Wassertemperatur von ca. 28 °C erreichbar.

Da die Wärmeleitfähigkeit des Fliesenbelages der der Rohrschicht entspricht, wäre es richtiger, diese als Wärmeleitschicht L darzustellen und somit in die zweidimensionale Wärmeleitung einzubeziehen. Eine entsprechend veränderte Eingabe führt zu dem in *Tabelle 3* gezeigten Ergebnis. Im vorliegenden Fall – d. h., aufgrund der speziellen wärmetechnischen Parameter – erhöht sich die Leistung aber nur um 0,7 %.

	Einlesen der Maskendaten
	Datenspeicherung
	Bereitstellung von Basiswerten (geometrische und wärmetechnische Werte sowie rechentechnische Abkürzungen), die mehrfach im Rechengang benötigt werden
	Vorgabe von Wärmeübergangskoeffizienten α_a, α_i als Startwerte in Abhängigkeit der Betriebsweise (z.B. Fußbodenheizung, Deckenkühlung, Wandheizung usw.) oder Übernahme vorgegebener Fixwerte (Eingabegrößen) α_{afix}, α_{ifix}
	Festlegung der Temperaturschrittweite in Abhängigkeit von der Differenz $t_{Fmax} - t_{Fmin}$
L0	Beginn der Temperaturschleife t_F (mittlere Fluidtemperatur)
	Berechnung der Stoffwerte für das jeweilige Medium (Wasser oder Tyfocor L 40 % bzw. 50 %)
	Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten im Rohr α_R in Abhängigkeit der Strömungsform und des medienseitigen Teilwärmedurchgangskoeffizienten bezogen auf die Rohraußenfläche
L1	Abarbeitung des Kernalgorithmus für die zweidimensionale Wärmeleitung in der maximal dreischichtigen Platte (Rohrschicht und Wärmeleitschichten L bzw. K) inklusive der zugehörigen Reihensumme mit dem Ergebnis der Gesamtwärmestromdichte ($\dot{q}_a + \dot{q}_i$) und der Berechnung der Konstanten A Die Berechnung der Reihensumme wird abgebrochen, wenn der neue Summand < 0,001 der bisherigen Summe ist.
	Berechnung der mittleren Übertemperaturen an den Außenflächen der zweidimensional wärmeleitenden Platte (ϑ_{ma}, ϑ_{mi}) und für die Achslage des Rohrregisters (ϑ_{m0})
	Bestimmung der Wärmestromdichten außen und innen $\dot{q}_a$ und innen $\dot{q}_i$
	Ermittlung der mittleren Übertemperaturen an den Bauteiloberflächen $\vartheta_{außen}$ und ϑ_{innen}
	Iterationsentscheidung: Neuberechnung bei Abweichungen der äußeren und inneren Übertemperaturen vom vorhergehenden Wert von > 0,01 K Bei Neuberechnung werden – wenn nicht als Fixwerte α_{afix}, α_{ifix} vorgegeben – die Wärmeübergangskoeffizienten α_a, α_i an den Bauteiloberflächen in Funktion von $\vartheta_{außen}$ bzw. ϑ_{innen} bestimmt. Rücksprung zu L1
	Berechnung der mittleren Oberflächentemperaturen des Bauteils, der mittleren Temperatur in der Rohrregisterebene sowie der Rohraußentemperatur
	Ermittlung der Extremtemperaturen auf den Bauteilaußen- und -innenseiten Bei diesen sehr aufwändigen Berechnungen muss zwischen den verschiedenen Konstruktionen unterschieden werden (Vorhandensein der Wärmeleitschichten L bzw. K). Die Berechnungen beinhalten wiederum Reihensummen, die in Abhängigkeit der Gliedgröße, der Exponentengröße der e-Funktion (um Überläufe zu vermeiden) und numerisch bedingter Schwankungen abgebrochen werden.
	Schreiben der zu t_F gehörigen relevanten Ergebnisse in eine Tabellendatei
	Abarbeitung der nächsten mittleren Fluidtemperatur t_F Rücksprung zu L0
	Maskeneintrag der Ergebnisse für die letzte t_F-Variante
	Datenspeicherung, Druckausgabe und/oder Diagrammausgabe

Bild 4. Grobablaufplan des realisierten Rechenprogramms.

Beispiel 3: Deckenkühlung mit Kunststoff-Kapillarrohrmatte im Deckenputz

Im *Bild 9* ist der Aufbau der Kühldecke so nachgebildet, dass er näherungsweise einer Leistungsmessung im genormten Prüfraum nach DIN EN 14240 (Vorgänger DIN 4715) entspricht. Als Prüfling wird von einer untergehängten, geschlossenen Kühldecke ausgegangen, eine 12,5 mm dicke Gipskartonplatte als Putzträger dient.

Es sind die Kühlleistungen für die mittleren Wassertemperaturen 14 ... 24 °C und für die beiderseits geltenden Raumtemperaturen von 26 °C unter nachfolgenden Annahmen zu bestimmen:

- Die beiderseits gleichen Raumtemperaturen entsprechen in guter Näherung den genormten Prüfraumbedingungen, wobei die im *Bild 9* gekennzeichnete Metallplattentemperatur nur maximal ±1 K von der Bezugstemperatur (Raumtemperatur) abweichen darf.

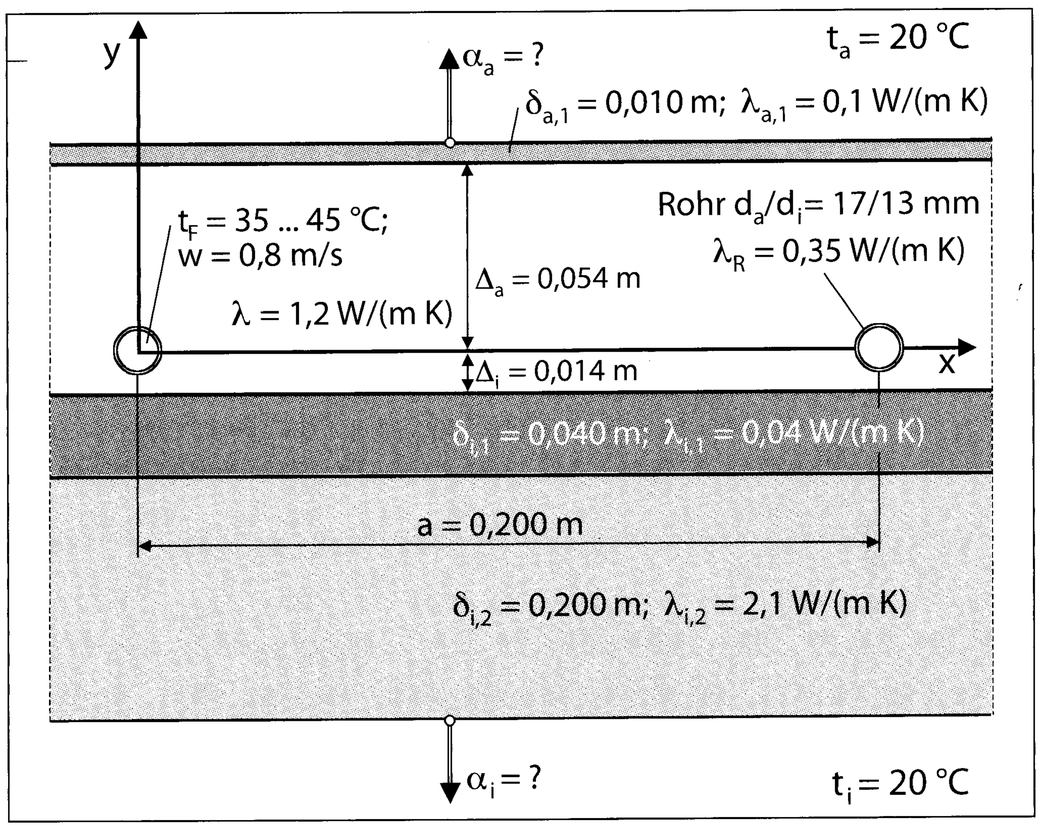

Bild 5. Geometrie und wärmetechnische Daten für *Beispiel 1* – Fußbodenheizung mit konventionellem Rohrregister im Estrich (nicht maßstäblich).

Tabelle 1. Kompletter Rechnerausdruck des *Beispiels 1* (Eingabedaten und Ergebnistabelle).

Objektbezeichnung: F:\SD\FE_WHZ\LowEx3\TAB\Beispiel1

Thermisch aktives Bauteil: Homogene Platte mit integriertem Rohrregister
Fußbodenheizung für den oberen Raum a mit Zusatzwärmeabgabe in den unteren Raum i
Eingabedaten für die Mehrschichtplatte und ihre wärmetechnische Umgebung:
Raumtemperatur: 20,0 °C
Fußboden-Wärmeübergangskoeffizient gemäß Basiskennlinie bestimmt.
Raumtemperatur (unterer Raum): 20,0 °C
Wärmeübergangskoeffizient (Deckenunterseite) gemäß Basiskennlinie bestimmt.

Äußere (bzw. obere) Deckschichten:			Rohrschicht RS (zweiteilig) und zusätzliche Wärmeleitschichten *L* und *K* mit zweidimensionaler Wärmeleitung:			Innere (bzw. untere) Deckschichten:		
Schicht	Lambda W/(m K)	Dicke mm	Schicht	Lambda W/(m K)	Dicke mm	Schicht	Lambda W/(m K)	Dicke mm
5	1,000	0,0	L	1,200	0,0	1	0,040	40,0
4	1,000	0,0	RS	1,200	54,0	2	2,100	200,0
3	1,000	0,0	RS	1,200	14,0	3	1,000	0,0
2	1,000	0,0	K	1,200	0,0	4	1,000	0,0
1	0,100	10,0				5	1,000	0,0

Durchflussmedium und Rohrdaten:

da mm	Dicke mm	di mm	lamR W/(m W)	Spalt mm	a mm	L mm	Medium –	w m/s	mittlere Medientemperatur	
									min. in °C	max. in °C
17,0	2,00	13,0	0,350	0,0	200,0	4,0	Wasser	0,80	35,0	45,0

Legende: da = Rohraußendurchmesser, di = Rohrinnendurchmesser, Dicke = Rohrwanddicke, lamR = Wärmeleitfähigkeit, Spalt = Luftspaltdicke um das Rohr, a = Rohrabstand, L = Rohrregisterlänge, w = Durchflussgeschwindigkeit

Berechnungsergebnisse:

Temperaturen °C									Alphawerte W/(m²K)			Leistungen W/m²		
tF	tR	tRm	tma	Extrema		tmi	Extrema		außen	innen	Rohr	qa	qi	q
35,0	33,6	30,9	24,4	24,7	24,1	21,4	21,7	21,2	10,3	6,3	4675	45,2	8,6	53,9
36,0	34,5	31,7	24,6	25,0	24,3	21,5	21,9	21,3	10,4	6,3	4725	48,3	9,2	57,5
37,0	35,4	32,4	24,9	25,3	24,6	21,5	22,0	21,3	10,5	6,3	4775	51,4	9,8	61,2
38,0	36,4	33,1	25,2	25,6	24,8	21,6	22,1	21,4	10,5	6,3	4823	54,6	10,4	64,9
39,0	37,3	33,8	25,5	25,9	25,1	21,7	22,2	21,5	10,6	6,3	4872	57,7	10,9	68,6
40,0	**38,2**	**34,5**	**25,7**	**26,2**	**25,3**	**21,8**	**22,3**	**21,6**	**10,6**	**6,3**	**4920**	**60,8**	**11,5**	**72,3**
41,0	39,1	35,3	26,0	26,5	25,6	21,9	22,4	21,6	10,7	6,3	4967	63,9	12,1	76,0
42,0	40,0	36,0	26,3	26,8	25,8	22,0	22,5	21,7	10,7	6,3	5014	67,1	12,6	79,7
43,0	40,9	36,7	26,5	27,1	26,1	22,1	22,7	21,8	10,8	6,3	5060	70,2	13,2	83,4
44,0	41,8	37,4	26,8	27,3	26,3	22,2	22,8	21,9	10,8	6,3	5106	73,4	13,8	87,1
45,0	42,7	38,1	27,1	27,6	26,6	22,3	22,9	22,0	10,8	6,4	5151	76,5	14,4	90,9

Legende: tF = mittlere Medientemperatur (Fluidtemperatur), tR = Rohraußentemperatur, tRm = mittlere Temperatur in der Registerebene, tma = mittlere Temperatur an der äußeren Oberfläche, Extrema = Extremtemperaturen (min. bzw. max.) an der äußeren Oberfläche, tmi = mittlere Temperatur an der inneren Oberfläche, Extrema = Extremtemperaturen (min. bzw. max.) an der inneren Oberfläche

Hinweis 1: Bei qa < 0 und qi < 0 geht der Wärmestrom zum Bauteil.

Hinweis 2: Entstehen aufgrund der Umgebungstemperaturen ta und ti sowie der Fluidtemperatur tF Wärmeströme, die der gewählten Betriebsweise widersprechen, so wird dies programmintern durch entsprechende Wahl der Wärmeübergangskoeffizienten beachtet (z. B. wenn bei gewählter Betriebsweise ‚Fußbodenheizung' diese bei bestimmten Temperaturen als Fußbodenkühlung arbeitet).

Die Wärmeleitwiderstände der Luftschichten sind nur mit großer Unsicherheit erfassbar, wobei ihre Summe aber gegenüber dem Wärmeleitwiderstand der Dämmung gering ist.

- Mit α_a kann der Wärmeleitwiderstand im eventuellen Luftspalt über der Dämmung nachgebildet werden. Im vorliegenden Fall liegt die Dämmung dicht an der Metallplatte an, weshalb α_a = 10000 W/(m²K) als Fixwert eingegeben wird.
- Für den ca. 300 mm hohen Luftraum über der Decke gibt DIN ISO 6946 den Wärmeleitwiderstand für den Fall Wärmestrom von oben nach unten mit R_λ = 0,23 m²K/W an. Da bei dieser Deckenabhängung das Flächenverhältnis der Umhüllung zur aktiven Deckenflä-

che etwa 1,34 beträgt, wird der Widerstand um diesen Faktor reduziert und $R_\lambda = 0{,}17$ m²K/W gesetzt.

Die Ergebnisse finden sich in *Tabelle 4.*

9. Verifizierung

Die Überprüfung des Rechenprogramms erfolgte in vielfältiger Weise, so als globale Ergebnisüberprüfungen für die konventionelle Fußbodenheizung sowie für die Kühldecke und in Form zahlreicher Detailüberprüfungen.

Gegenüberstellung von Beispiel 1 und dem Prüfergebnis nach DIN EN 1264

Die wärmetechnische Prüfung der Warmwasser-Fußbodenheizung erfolgt nach einer Rechenmethode, der ein Potenzansatz zugrunde liegt:

$$\dot{q} = B\, a_B\, a_T^{m_T}\, a_Ü^{m_Ü}\, a_D^{m_D}\, \Delta t. \qquad (60)$$

Unter Weglassen der Zwischenschritte folgt für die gegebene Konstruktion *(Bild 5)* und $t_F = 40\,°C$:

$$\dot{q} = 6{,}7 \cdot 0{,}598 \cdot 1{,}156^{-1{,}667} \cdot 1{,}0315^{0{,}05} \cdot 1{,}035^{-0{,}75} \cdot 20 = 61{,}2\ \text{W/m}^2.$$

Bei diesem Ergebnis ist zu beachten, dass die nach Gl. (60) berechnete Wärmestromdichte der raumseitigen Nutzheizleistung entspricht. In diesem Falle gilt nach *Tabelle 1* für $t_F = 40\,°C$ $\dot{q}_a = 60{,}8$ W/m².

Damit beträgt die absolute Abweichung der spezifischen Heizleistung nur 0,4 W/m².

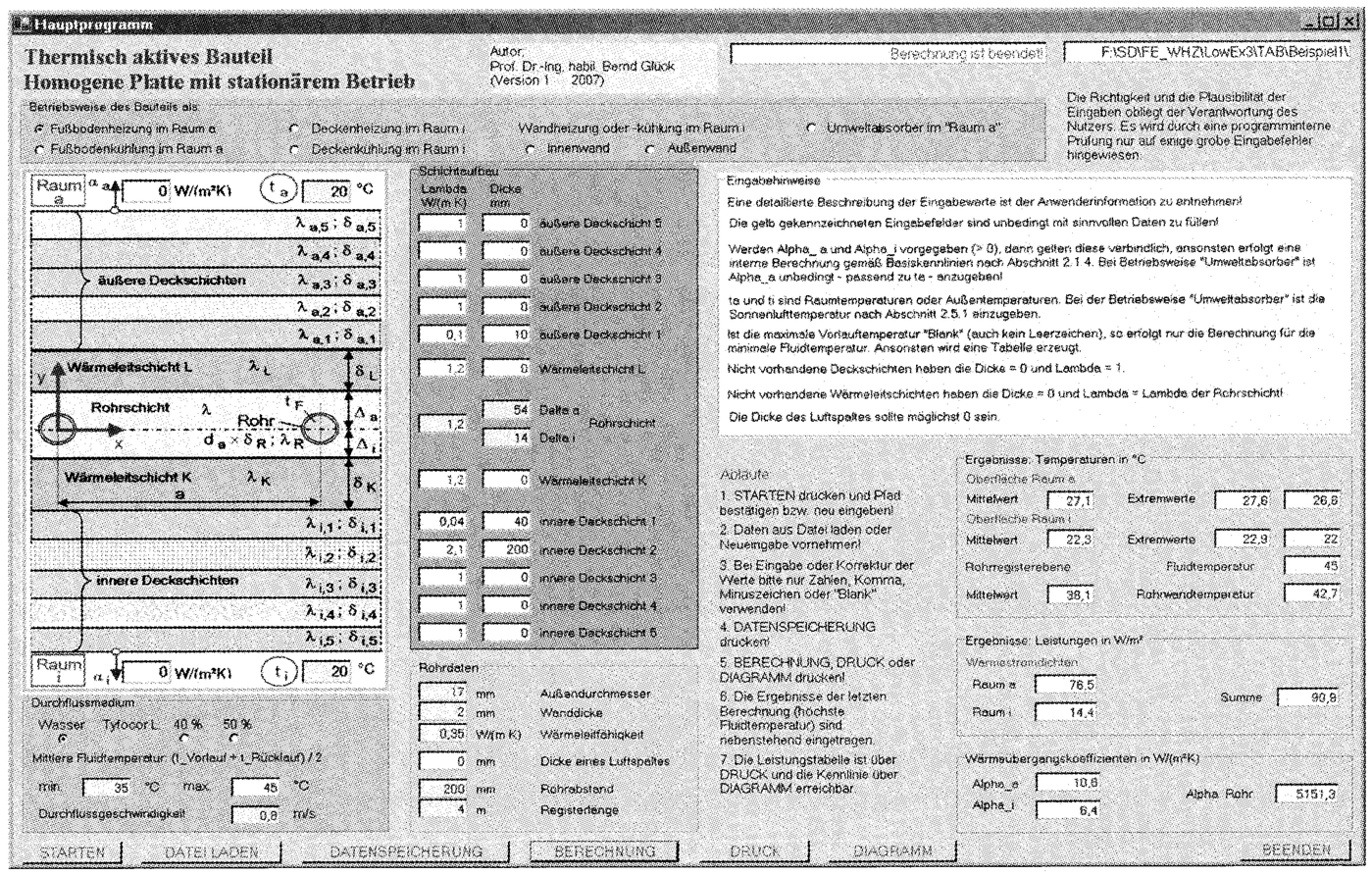

Bild 6. Oberfläche mit den Eingabedaten für *Beispiel 1* und Ergebnisanzeige für die höchste Fluidtemperatur nach erfolgter Berechnung (λ_K und λ_L werden bei der Dicke 0 automatisch gleich λ gesetzt).

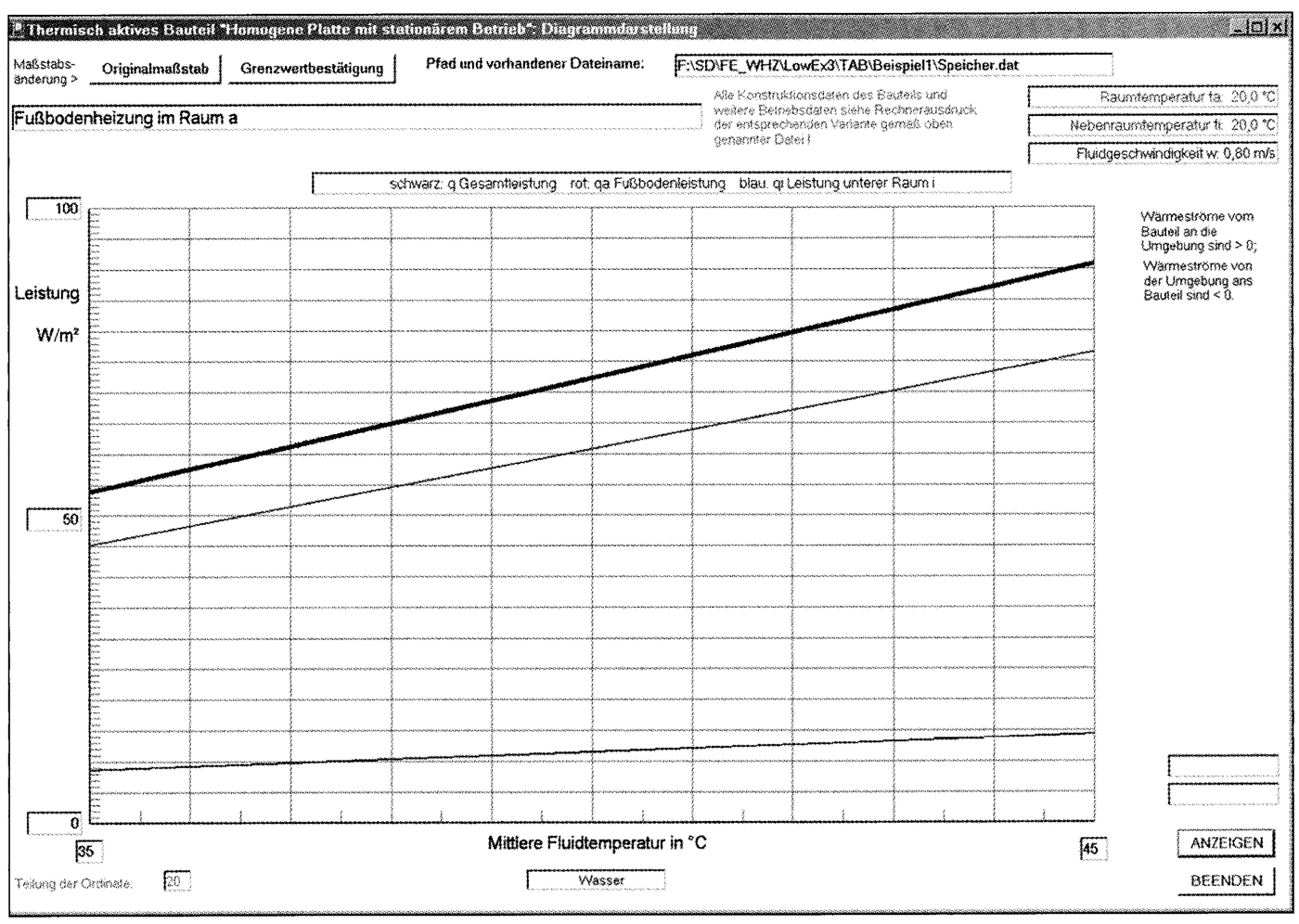

Bild 7. Wärmestromdichten der untersuchten Fußbodenheizung für *Beispiel 1.*

Selbstverständlich wird die Basiskennlinie in diesem Ergebnis korrekt wiedergegeben, wie zwei Vergleichsrechnungen zeigen:

$$\alpha_a = 8{,}92\ \vartheta_{außen}^{0{,}1}\ \text{W/(m}^2\text{K)} = 8{,}92\ (25{,}7-20)^{0{,}1}\ \text{W/(m}^2\text{K)} = 10{,}6\ \text{W/(m}^2\text{K)}$$

$$\dot{q}_a = 8{,}92\ \vartheta_{außen}^{1{,}1}\ \text{W/m}^2 = 8{,}92\ (25{,}7-20)^{1{,}1}\ \text{W/m}^2 = 60{,}5\ \text{W/m}^2 \approx 60{,}8\ \text{W/m}^2.$$

Die übrigen Teilergebnisse der Simulation können nicht an der Normbestimmung überprüft werden, da diese dort nicht Bestandteil der Berechnung sind.

Die Temperaturwelligkeit auf der Fußbodenoberfläche beträgt: 26,2 °C – 25,3 °C = 0,9 K. Sie ist realistisch. Die relativ große Temperaturwelligkeit auf der Deckenunterseite mit 0,7 K ist dem Simulationsmodell geschuldet. Sie wird in der Realität niedriger liegen. Ursache dafür ist die Modellannahme, dass in den inneren Deckschichten (Dämmung und Betondecke) keine Wärmeleitung in horizontaler Richtung – d. h. zwischen den Rohren – erfolgt. Dies trifft für die Betondecke nicht zu. Generell ist die Temperaturwelligkeit aber auch nur auf der Nutzseite eines Heiz- oder Kühlelementes von Interesse, sodass die detaillierten Ergebnisse auf der Deckenunterseite in diesem Fall keine Rolle spielen.

Gegenüberstellung von Beispiel 3 und dem Prüfergebnis nach DIN 4715

Die Leistungsbestimmung für Kühldecken erfolgt nach DIN EN 14240, die eine Weiterentwicklung der DIN 4715 darstellt. Es handelt sich dabei um ein genormtes messtechnisches Verfahren in einem Prüfraum. Für den

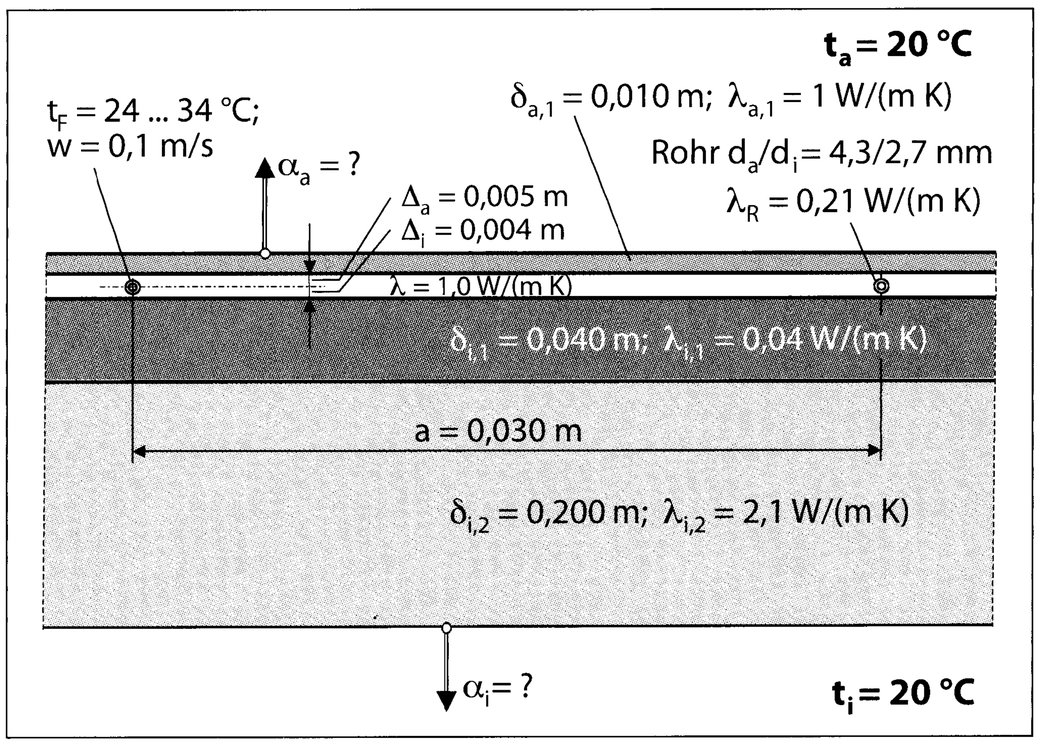

Bild 8. Geometrie und wärmetechnische Daten für *Beispiel 2* – Fußbodenheizung mit Kunststoff-Kapillarrohrmatte im Fliesenkleber (nicht maßstäblich).

im *Bild 9* vorgestellten Prüfling ergab sich gemäß Prüfzeugnis die Normkühlleistung $\dot{q}$ = 80,3 W/m² bei einer logarithmischen Untertemperatur von 10 K.

Die ermittelte Wärmestromdichte, die als Normkennlinie und als Normkühlleistung formuliert ist, stellt – im Gegensatz zur Leistungsbestimmung der Fußbodenheizung – die Gesamtleistung des Prüflings dar. Gemäß *Tabelle 4* gilt bei t_F = 16 °C $\dot{q}$ = 79,1 W/m².

Die absolute Abweichung beträgt 1,2 W/m². Eine Temperaturwelligkeit auf den Oberflächen existiert praktisch nicht, da der Abstand der Röhrchen mit 15 mm sehr klein ist.

Betrachtungen an einem thermisch aktiven Raumteiler

Im *Bild 10* ist ein thermisch aktivierbarer Raumteiler mit symmetrischem Aufbau dargestellt. Zwischen zwei Dekorglasplatten ($\delta_L = \delta_K$ = 4 mm; $\lambda_L = \lambda_K$ = 0,8 W/(m K)) befindet sich ein Zweikomponenten-Epoxid-Gießharz (δ

Tabelle 2. Berechnungsergebnisse des *Beispiels 2.*

Temperaturen °C									Alphawerte W/(m²K)			Leistungen W/m²		
tF	tR	tRm	tma	Extrema		tmi	Extrema		außen	innen	Rohr	qa	qi	q
24,0	23,5	23,4	22,9	23,1	22,8	20,4	20,4	20,4	9,9	6,3	849	29,0	2,7	31,7
25,0	24,4	24,2	23,6	23,8	23,5	20,5	20,6	20,5	10,1	6,3	851	36,8	3,3	40,2
26,0	25,3	25,0	24,3	24,5	24,2	20,6	20,7	20,6	10,3	6,3	854	44,8	4,0	48,8
27,0	26,2	25,8	25,0	25,3	24,9	20,7	20,8	20,7	10,5	6,3	856	52,8	4,6	57,5
28,0	**27,0**	**26,7**	**25,7**	**26,0**	**25,5**	**20,8**	**20,9**	**20,8**	**10,6**	**6,3**	**858**	**61,0**	**5,3**	**66,3**
29,0	27,9	27,5	26,4	26,8	26,2	20,9	21,0	20,9	10,7	6,3	860	69,2	5,9	75,1
30,0	28,8	28,3	27,1	27,5	26,9	21,0	21,1	21,0	10,9	6,3	862	77,4	6,6	84,0
31,0	29,6	29,1	27,8	28,2	27,5	21,1	21,2	21,1	11,0	6,3	864	85,8	7,2	93,0
32,0	30,5	29,9	28,5	28,9	28,2	21,3	21,3	21,2	11,1	6,3	866	94,2	7,9	102,1
33,0	31,4	30,7	29,2	29,7	28,9	21,4	21,4	21,3	11,1	6,3	869	102,6	8,5	111,1
34,0	32,2	31,6	29,9	30,4	29,5	21,5	21,5	21,4	11,2	6,3	871	111,1	9,2	120,3

Legende: wie in *Tabelle 1.*

Tabelle 3. Variation des Simulations*beispiels 2* (Fliesenbelag ist als Wärmeleitschicht L in die zweidimensionale Wärmeleitung einbezogen).

Temperaturen °C									Alphawerte W/(m²K)			Leistungen W/m²		
tF	tR	tRm	tma	Extrema		tmi	Extrema		außen	innen	Rohr	qa	qi	q
28,0	**27,0**	**26,7**	**25,8**	**25,8**	**25,7**	**20,8**	**20,9**	**20,8**	**10,6**	**6,3**	**858**	**61,4**	**5,3**	**66,7**

Legende: wie in *Tabelle 1.*

Tabelle 4. Berechnungsergebnisse des *Beispiels 3.*

Temperaturen °C									Alphawerte W/(m²K)			Leistungen W/m²		
tF	tR	tRm	tma	Extrema		tmi	Extrema		außen	innen	Rohr	qa	qi	q
14,0	14,6	14,9	26,0	26,0	26,0	17,7	17,6	17,7	10^4	11,0	994	–4,1	–91,9	–96,0
15,0	15,6	15,8	26,0	26,0	26,0	18,3	18,3	18,4	10^4	10,9	997	–3,8	–83,8	–87,5
16,0	**16,5**	**16,7**	**26,0**	**26,0**	**26,0**	**19,0**	**19,0**	**19,0**	**10^4**	**10,8**	**1000**	**–3,4**	**–75,7**	**–79,1**
17,0	17,5	17,6	26,0	26,0	26,0	19,7	19,7	19,7	10^4	10,7	1003	–3,1	–67,6	–70,7
18,0	18,4	18,6	26,0	26,0	26,0	20,4	20,4	20,4	10^4	10,6	1006	–2,7	–59,6	–62,4
19,0	19,4	19,5	26,0	26,0	26,0	21,1	21,1	21,1	10^4	10,5	1009	–2,4	–51,7	–54,1
20,0	20,3	20,4	26,0	26,0	26,0	21,7	21,7	21,8	10^4	10,3	1011	–2,1	–43,9	–45,9
21,0	21,2	21,3	26,0	26,0	26,0	22,4	22,4	22,4	10^4	10,1	1014	–1,7	–36,1	–37,8
22,0	22,2	22,3	26,0	26,0	26,0	23,1	23,1	23,1	10^4	9,9	1017	–1,4	–28,4	–29,8
23,0	23,1	23,2	26,0	26,0	26,0	23,8	23,8	23,8	10^4	9,6	1020	–1,0	–20,9	–21,9
24,0	24,1	24,1	26,0	26,0	26,0	24,5	24,5	24,5	10^4	9,3	1023	–0,7	–13,5	–14,2

Legende: wie in *Tabelle 1.*

= 6 mm; λ = 0,2 W/(m K)) in dem mittig eine Kapillarrohrmatte (3,4 × 0,55 mm; λ_R = 0,21 W/(m K); a = 30 mm; Rohrregisterlänge L = 2 m) ohne Luftspalt eingeschlossen ist. Die Kapillarrohrmatte wird von Wasser mit der Geschwindigkeit 0,15 m/s sowie der Temperatur 40 °C durchströmt. Die Raumtemperaturen auf beiden Seiten sind zunächst gleich mit 20 °C angenommen. Die Simulationsergebnisse sind aus *Tabelle 5* ersichtlich. Die Ergebnisse auf beiden Wandseiten sind identisch!

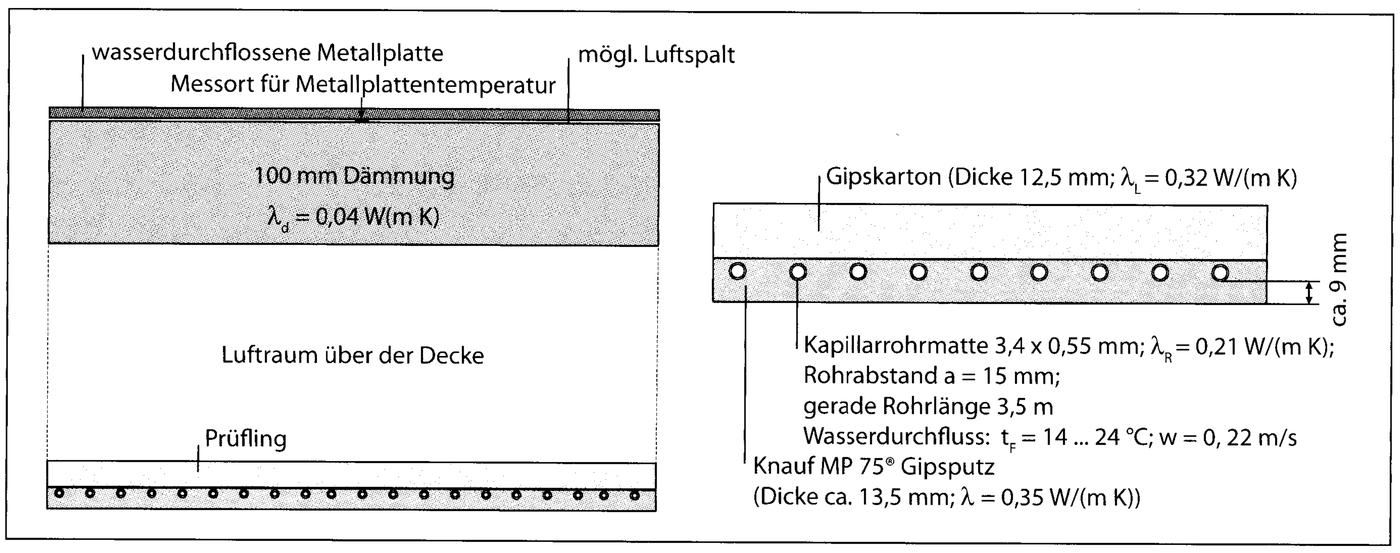

Bild 9. Links: Kühldeckenprüfling und Prüfraumdecke mit wasserdurchflossenen Metallplatten zur Sicherung definierter Prüfbedingungen. Rechts: Putzkühldecke als spezieller Prüfling mit geometrischer und wärmetechnischer Detaillierung (nicht maßstäblich).

Im Weiteren werden unterschiedliche Raumtemperaturen auf beiden Seiten des Raumteilers angesetzt (t_i = 20 °C; t_a = 10 °C). Um Betrachtungen zur Superposition durchführen zu können, sind die Wärmeübergangskoeffizienten auf beiden Seiten als konstante Größen ($\alpha_a = \alpha_i$ = 9 W/(m²K)) vorgegeben.

Die simulierten Wärmestromdichten $\dot{q}_a$ = 168,5 W/m² und $\dot{q}_i$ = 92,2 W/m² sind im *Bild 11a* eingetragen. Da die Wärmeübergangskoeffizienten unabhängig von der Übertemperatur konstant sind, müsste die Gesamtleistung des Raumteilers von 260,7 W/m² der bei einer beiderseits gleichen Raumtemperatur von 15 °C entsprechen. Dies wird durch die entsprechende Simulation bestätigt *(Bild 11b)*.

Da es sich um einen stationären Wärmetransportvorgang handelt, ist auch die Superposition der Einzelvorgänge möglich. Der Wärmedurchgangskoeffizient für den Raumteiler ergibt sich nach Gl. (45) zu:

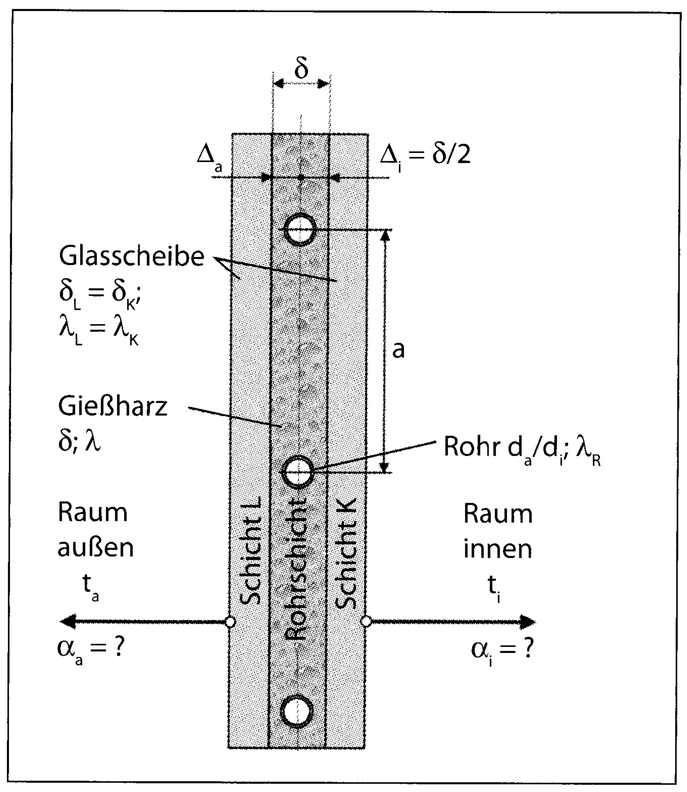

Bild 10. Raumteiler in Form einer symmetrischen Plattenkonstruktion bestehend aus zwei gleichen Glastafeln und einer eingeschlossenen Gießharzschicht mit einem Rohrregister in Form einer Kunststoff-Kapillarrohrmatte, die von einem Wasserstrom durchflossen ist.

Tabelle 5. Berechnungsergebnisse für den Raumteiler nach *Bild 10.*

Temperaturen °C									Alphawerte W/(m²K)			Leistungen W/m²		
tF	tR	tRm	tma	Extrema		tmi	Extrema		außen	innen	Rohr	qa	qi	q
40,0	37,3	33,5	31,4	32,4	30,6	31,4	32,4	30,6	9,4	9,4	1072	107,2	107,2	214,3

Legende: wie in *Tabelle 1.*

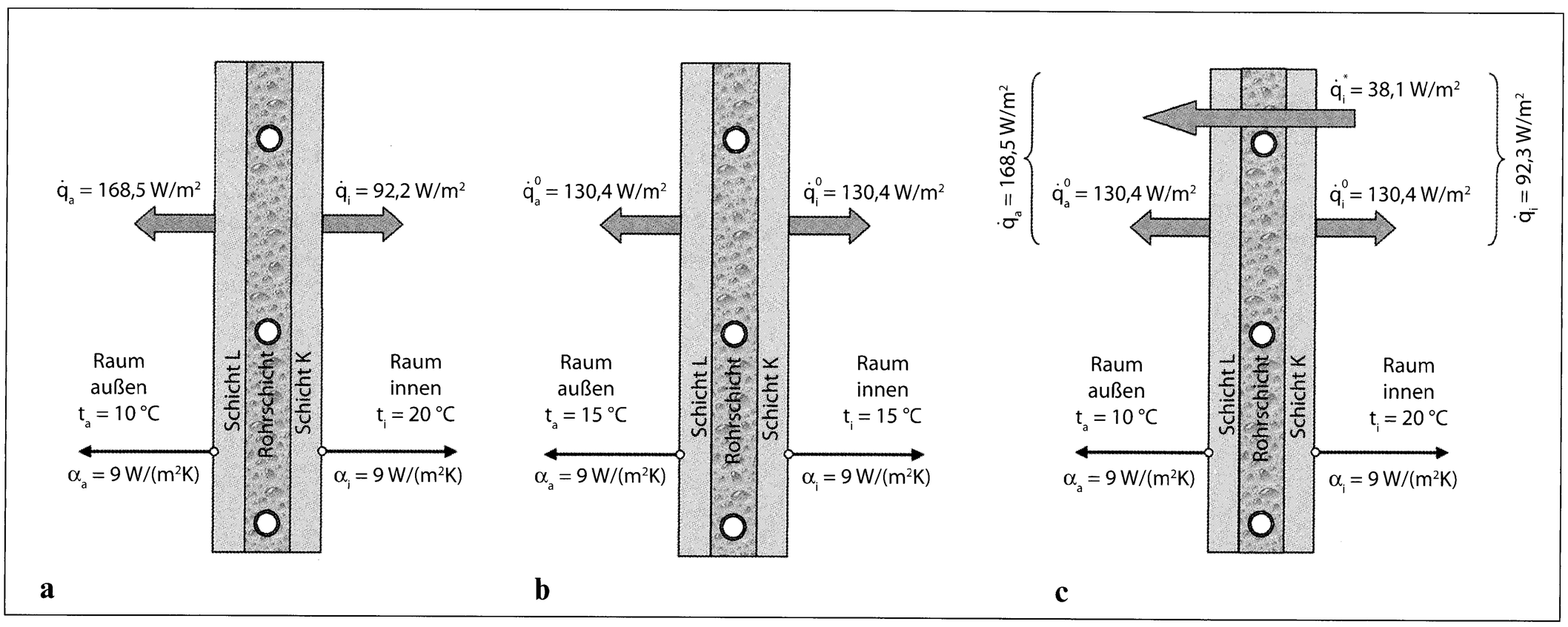

Bild 11. Wärmestromdichten (spezifische Heizleistungen) des Raumteilers nach beiden Räumen: a) Simulationsergebnisse bei um 10 K unterschiedlichen Raumtemperaturen, b) Simulationsergebnisse bei gleichen Raumtemperaturen, c) Superposition der Einzelergebnisse bei um 10 K unterschiedlichen Raumtemperaturen.

$$\kappa_{Platte} = (1/9 + 0{,}004/0{,}8 + 0{,}006/0{,}2 + 0{,}004/0{,}8 + 1/9)^{-1}\ \mathrm{W/(m^2K)} = 3{,}81\ \mathrm{W/(m^2K)}.$$

Daraus folgt bei einer Temperaturdifferenz von 10 K die Wärmestromdichte von Raum *i* zu Raum *a*:

$$\dot{q}^* = \kappa_{Platte}\,(t_i - t_a) = 3{,}81\ (20 - 10)\ \mathrm{W/m^2} = 38{,}1\ \mathrm{W/m^2}.$$

Überlagert man $\dot{q}^*$ mit den bei gleichen Raumtemperaturen von 15 °C ermittelten Größen $\dot{q}_a^0$ und $\dot{q}_i^0$, so ergeben sich die Wärmestromdichten für die asymmetrische Raumtemperatur von 20 °C bzw. 15 °C, wie das *Bild 11c* zeigt.

Der Algorithmus arbeitet also auch bei asymmetrischen Randbedingungen richtig!

10. Fazit

Generell ist festzustellen, dass das Rechenprogramm mit dem hinterlegten Algorithmus die Wirklichkeit sehr genau wiedergibt.

- Das *Beispiel 1* „Fußbodenheizung mit konventionellem Rohrregister und Nassestrich" lieferte im direkten Vergleich zur DIN EN 1264-2 eine Abweichung von 0,7 %.

  Dabei ist anzumerken, dass es sich beim genormten Verfahren um eine rein mathematische Methodik handelt, die auf der Grundlage zahlreicher wärmetechnischer Rechnungen mit der FEM basiert. Diese Berechnungen nehmen beispielsweise wegen der Gitterauflösung weniger Bezug auf die Realität als der hier verwendete Algorithmus. Schließlich stellen der Potenzansatz nach Gl. (60) und die Voraussetzung, dass Superposition der einzelnen Einflussgrößen gilt, lediglich Annahmen dar, deren Gültigkeit nicht a priori für alle Anwendungen gleichermaßen gut gegeben ist. Der vorgenommene Vergleich ist nur dadurch gerechtfertigt, weil das beschriebene Verfahren zur Norm erhoben wurde.

  Die beim Normverfahren vorgegebenen Begrenzungen – z. B. bezüglich der geometrischen Abmessungen (Estrichüberdeckungen ab 15 mm, Rohraußendurchmesser ab 10 mm, Rohrteilungen ab 50 mm) stellen eine große Einschränkung dar und schließen innovative Neuentwicklungen – beispielsweise mit Kunststoff-Kapillarrohrmatten – aus. Derartige Begrenzungen enthält das vorgestellte Simulationsmodell nicht!
- Das *Beispiel 3* „Kühldecke mit Kapillarrohrmatte im Putz" ist mit der nach DIN 4715-1 (Vorläufer von DIN EN 14240) durchgeführten Leistungsprüfung (Messung im genormten Prüfraum) verglichen worden. Dabei ergab sich eine Abweichung von 1,5 %. Die maximale Messunsicherheit nach DIN EN 14240 beträgt 4 %.

  Der Vergleich ist insofern sehr aussagekräftig, da er auf den hergestellten Prüfling Bezug nimmt. Damit sind die realen wärmetechnischen Materialeigenschaften und die Herstellungsmerkmale eingeschlossen.
- Das Simulationsmodell beruht auf der *Faxén*schen Lösung [1, 3] aus dem Jahre 1937. Diese stellt das Problem der Temperaturverteilung in einer Platte mit einem Rohrregister erstmals so dar, dass die Rohre nicht als linienförmige Wärmequellen approximiert werden, sondern mit einem endlichen Durchmesser versehen sind. *Fraaß* untersuchte in [2] mit der Randelementenmethode (Boundary Element Method, BEM) das wärmetechnisch interessante Problem der eingebetteten Rohrregister sehr präzise und kam zu dem Schluss, dass die *Faxén*sche Lösung ein sehr genaues Näherungsverfahren darstellt.

Damit ist das Simulationsmodell hinreichend verifiziert und könnte die Grundlage für eine *wärmetechnische Normprüfung für stationär arbeitende, durch Rohrregister thermisch aktivierbare, geschlossene Raumumfassungen* bilden.

Selbstredend darf es keine Unterschiede zwischen den real vorhandenen und den in Rechnung gestellten Stoffwerten sowie konstruktiven Aufbauten geben. Diese Aussage gilt jedoch generell, so auch für messtechnische Normprüfverfahren. Die dafür gefertigten Probanden müssen identisch mit der realen Objektausführung sein, was leider oftmals durch Lieferung von „geschönten Probanden" verletzt wird!

Das vorgestellte Simulationsmodell eignet sich ideal zur *Konstruktionsoptimierung*, da sehr schnell und ohne jeglichen herstellungsbedingten sowie experimentellen Aufwand eine Aussage getroffen werden kann.

Literatur

[1] *Faxén:* Beräkning av värmeavgivning fran rör, ingjutna i betonplattor. Teknisk Tidskrift Mekanik 1937, Heft 3.

[2] *Fraaß, M.:* Ein Beitrag zur Theorie des thermisch aktivierbaren Bauteils. Dissertation an der TU Berlin, Fakultät III, 2001.

[3] *Glück, B.:* Strahlungsheizung – Theorie und Praxis. Berlin: Verlag für Bauwesen und Karlsruhe: C. F. Müller-Verlag 1982 (ISBN 3-7880-7157-5). Berechnungsverfahren nach *Faxén* ist sehr detailliert dargestellt.

[4] *Glück, B.:* Wärmeübergangskoeffizienten an thermisch aktiven Bauteiloberflächen und der Übergang zu Basiskennlinien für die Wärmestromdichte. Gesundheits-Ingenieur 128 (2007) H. 1, S. 1–10.