

RECHENPROGRAMM OPTIMIERT HEIZFLÄCHEN

Ein universelles numerisches Berechnungsverfahren für die eindimensionale Temperaturverteilung in Rippen verschiedenster Geometrie und thermodynamischer Randbedingungen

Zur Optimierung der Rippenform von Heizflächen sind Kenntnisse über die tatsächlichen Temperaturverläufe und die lokalen Wärmestromanteile – zumindest aber über die Tendenzen – in Abhängigkeit spezieller Parameter unerlässlich.

Rasche Antworten auf die vom Konstrukteur vorgenommenen Variationen – z.B. der Rippengeometrie – gibt ein numerisches Rechenprogramm, solange das Temperaturfeld näherungsweise als eindimensional betrachtet werden kann. Vergleichende Rechnungen mit analytischen Verfahren sowie praktische Beispiele zeigen die Leistungsfähigkeit des nachfolgend vorgestellten Rechenprogramms.

Dr. sc. techn. Bernd Glück,
VEB Forschung und Rationalisierung,
Technische Gebäudeausrüstung, Leipzig

Grundlagen bekannter Lösungen

Überschaubare Lösungen existieren für Rippen einfacher geometrischer Gestalt mit konstanter Dicke (glatte Rechteckrippe und glatte Kreisrippe). Dabei können an einer oder an beiden Außenkonturen Randbedingungen erster Art (konstante Temperaturen) vorliegen. Dagegen führt die Berechnung des Temperaturverlaufs zu komplizierten Gleichungen, wenn z.B. bei Rechteckrippen die Umgebungstemperaturen der Rippenflächen ungleich sind und sich die Rippenfußtemperaturen der gegenüberliegenden Ränder ebenfalls unterscheiden oder aber wenn einseitig beheizte Rechteckrippen eine nach außen verringerte Materialdicke aufweisen u.a.m. Entsprechende Berechnungsgleichungen finden sich beispielsweise in [1, 2] sowie für spezielle Vergleichsfälle im Abschnitt „Prüfung des numerischen Verfahrens“.

Die Berechnung der Gesamtwärmeabgabe basiert analog des konvektiven Anteils nur auf der linearen Temperaturdifferenz. Der Strahlungsanteil findet durch einen speziellen Strahlungs-Wärmeübergangskoeffizienten Beachtung. Die Flächen für Konvektion und Strahlung werden in gleicher Größe angesetzt.

Weiterhin wird mit konstanten mittleren Gesamt-Wärmeübergangskoeffizienten gearbeitet, die lediglich durch Mehrfachrechnungen iterativ angepaßt werden können.

Gegebenheiten der Praxis

Die vorher beschriebenen einfachen geometrischen Rippenformen führen in vielen Einsatzfällen nicht zu einem

Optimum im wärmetechnischen Sinne. So ist man zur Verbesserung der Konvektion bei räumlicher Begrenzung des Bauteils bemüht, die Zahl der Anlaufstrecken zu vergrößern. Dies geschieht beispielsweise durch Verformung von Rippenelementen zu sogenannten Stolperkanten. Eine besonders extreme Auflösung der Rippenfläche ist bei Verwendung von Streckmetall gegeben.

Außerdem werden Materialdickenänderungen vorgenommen, um zu einem wirtschaftlichen Materialeinsatz zu gelangen. Mitunter entstehen Dickenänderungen auch ungewollt infolge von örtlichen Verformungen z.B. beim Tiefziehen.

Oftmals befriedigen die einfach formulierten Wärmeübergangsbedingungen nicht:

► Die Einstrahlzahlen der Rippenelemente sind z.B. durch Eigenverschattung nicht notwendigerweise stets gleich Eins, so daß daraus resultierend nicht mit der Gleichheit von Konvektions- und Strahlungsfläche gerechnet werden kann.

► Die Wärmeübergangsbedingungen sollten gemäß des physikalischen Zusammenhanges in getrennten Ansätzen für Konvektion und Strahlung erfaßt werden. Es sollte die Möglichkeit bestehen, die konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten auch in Abhängigkeit der örtlichen Übertemperaturen zu bestimmen.

Lösungsvorschlag

Um die komplizierten praktischen Bedingungen einzuarbeiten, wird ein numerisches Lösungsverfahren vorgeschlagen. Im Bild 1 ist das Rippenelement des k -ten Intervalls dargestellt. An der linken Stirnseite tritt durch Leitung der Wärmestrom

$$\dot{Q}' = -\lambda A_k \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)' \quad (1)$$

ein. An der rechten Querschnittsfläche verläßt der Wärmestrom

$$\dot{Q}'' = -\lambda A_{k+1} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)'' \quad (2)$$

das Element. Durch die seitlichen Begrenzungsflächen fließen keine Wärmeströme ($\dot{Q}''' = 0$). Diese einzige Restriktion des Modells besagt, daß in erster Näherung nur ein eindimensionaler Wärmetransport zu betrachten ist. Die praktische Realisierung dieser Forderung kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen:

- Die Seitenflächen sind adiabat gedämmt,
- die Wärmeübergangsbedingungen der Seitenflächen entsprechen denen der Deckflächen (Randbedingungen dritter Art). Ihre Flächen werden näherungsweise zu den Deckflächen addiert,
- aus Symmetriegründen des Gesamtmodells können im betrachteten Element keine seitlichen Wärmeströme auftreten.

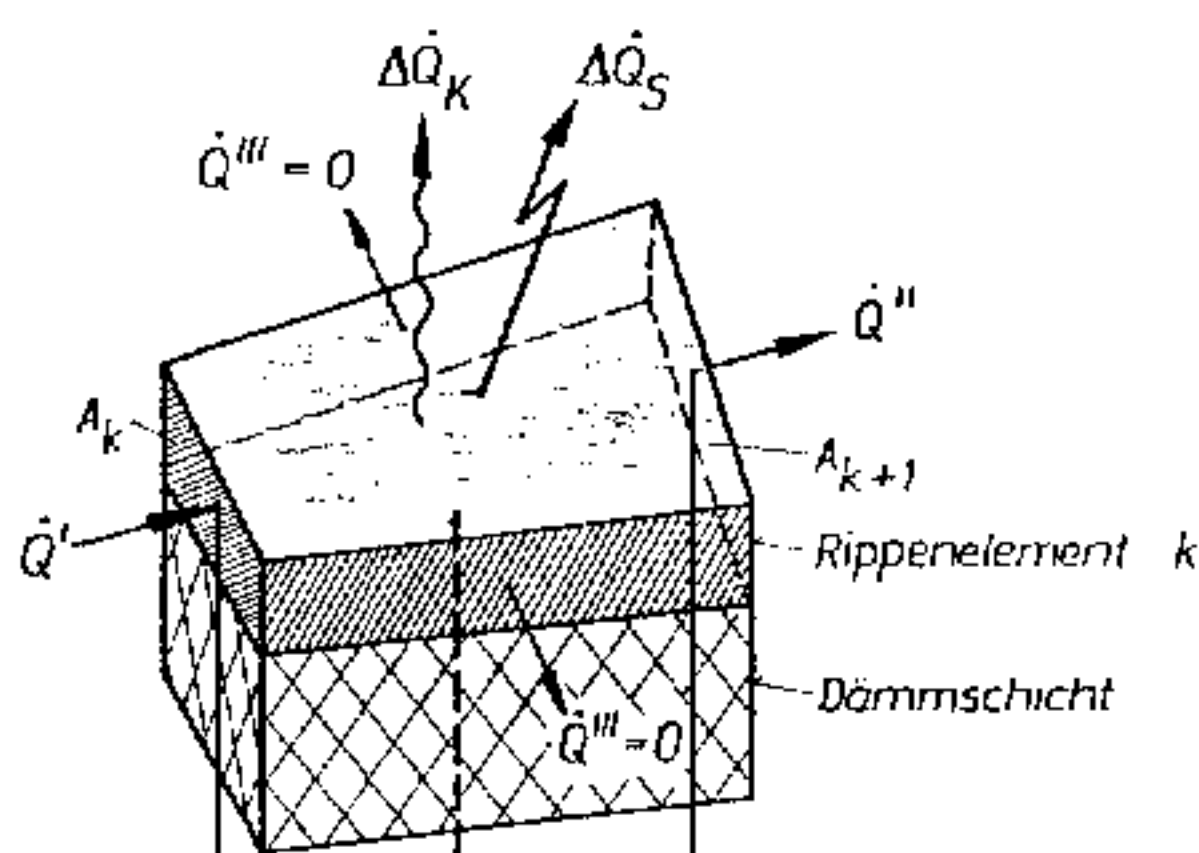


Bild 1: Rippenelement mit allen möglichen Wärmeströmen und näherungsweise nachgebildetem Temperaturverlauf

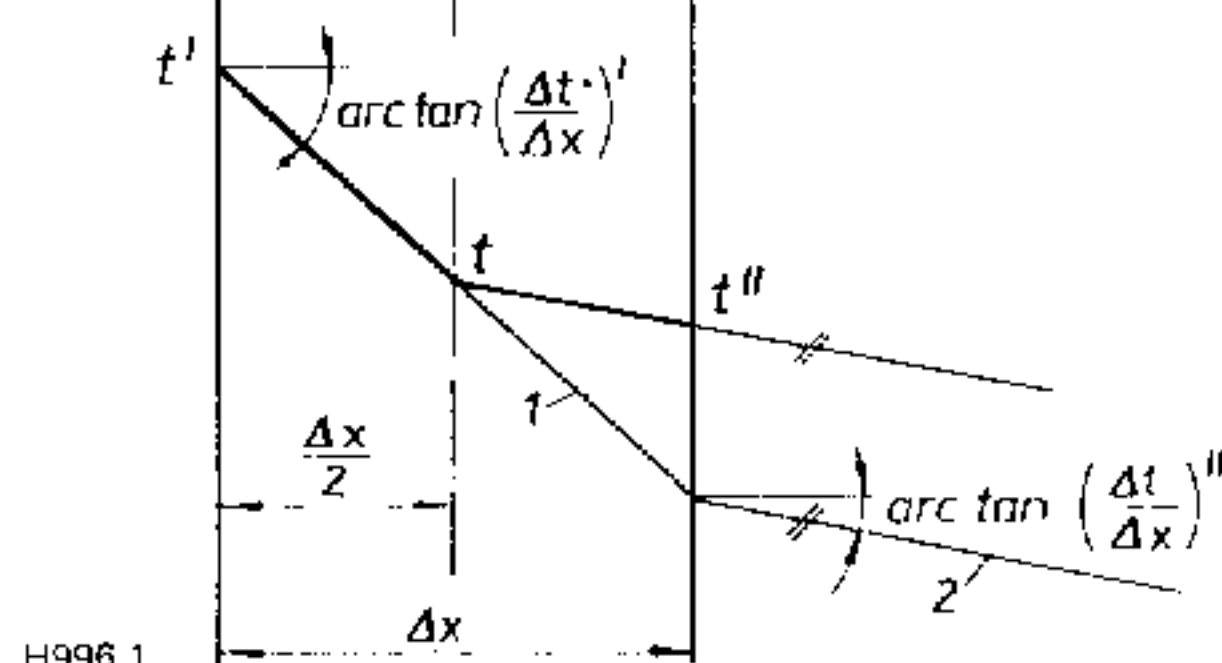
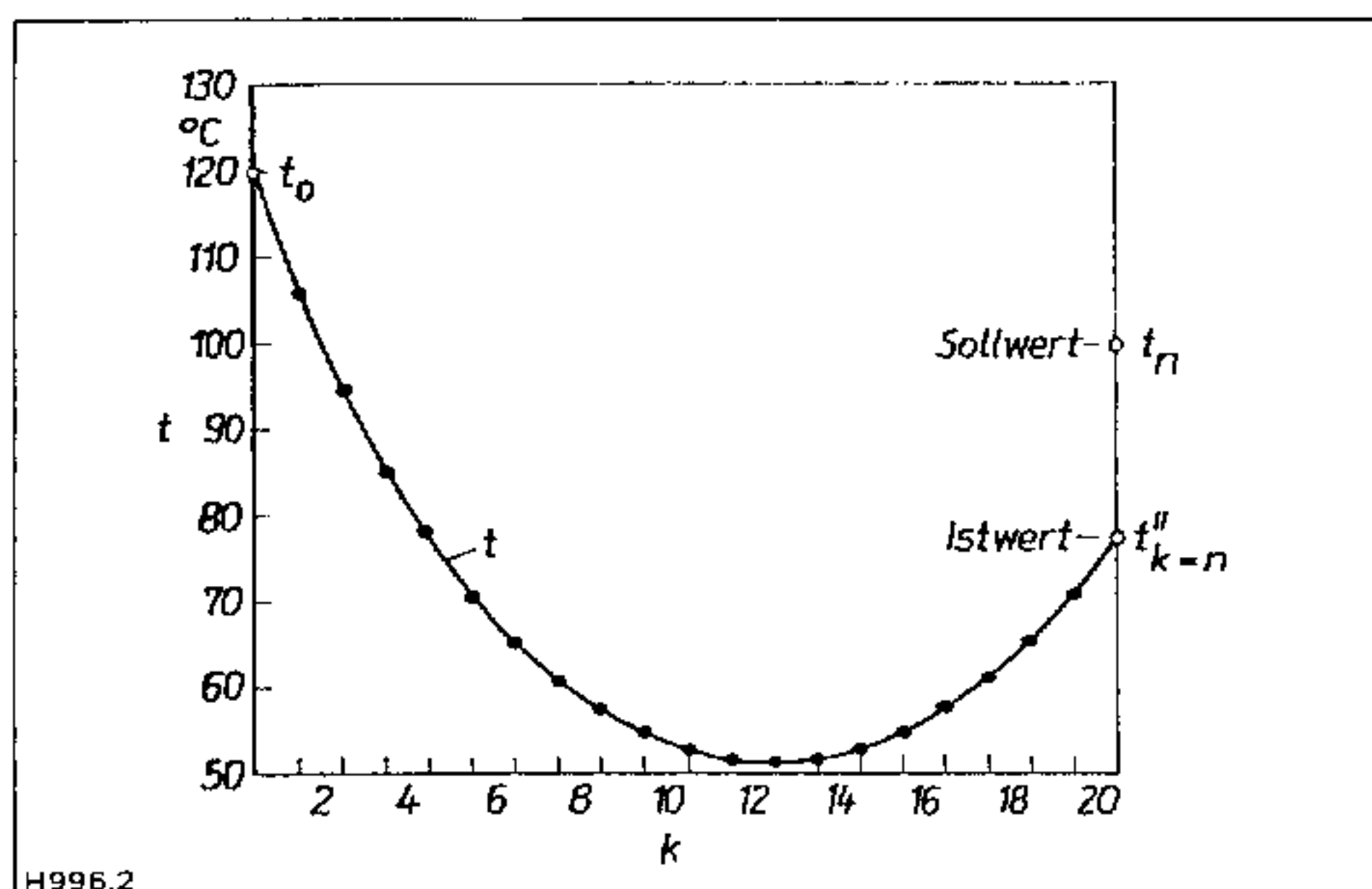


Bild 2: Temperaturverlauf t am Ende eines Iterationszyklusses bei noch nicht erfolgter Anpassung ($t''_{k=n} < t_n$)



ten. Dies dürfte den Hauptanwendungsfall des Verfahrens darstellen.

Die Wärmeströme des Elementes k nach außen können durch folgende drei Grundgleichungen beschrieben werden:

► Für den Wärmestrom durch *Strahlung* gilt

$$\Delta Q_S = \sigma \epsilon_{RU} [(t + 273)^4 - (t_S + 273)^4] A_S \quad (3)$$

mit

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

ϵ_{RU} Gesamtemissionskoeffizient (Rippe-Umgebung) z.B.

$$\epsilon_{RU} = \epsilon_R \epsilon_U$$

t_S Strahlungstemperatur der Umgebung

A_S Fläche, die mit der Umgebung vollkommen im Strahlungsaustausch steht.

Bei Einstrahlzahlen $\phi < 1$ ist die effektive Strahlungsfläche A_S beispielsweise durch Multiplikation der Gesamtoberfläche mit der Einstrahlzahl zu bilden.

► Der Wärmestrom durch *Konvektion* ergibt sich zu

$$\Delta Q_K = \alpha_K (t - t_L) A_K \quad (4)$$

mit

α_K konvektiver Wärmeübergangskoeffizient

t_L Lufttemperatur

A_K Fläche, die direkt an die Luft grenzt.

Der Wärmeübergangskoeffizient könnte ohne weiteres auch als Funktion der Temperaturen t und t_L formuliert werden, z.B. wäre mit den speziellen Konstanten a_1 und a_2 die Approximation

$$\alpha_K = [a_1 + a_2 (t + t_L)] (t - t_L)^{1/3} \quad (5)$$

denkbar, die sowohl die mittlere Grenzschichttemperatur als auch den treibenden Potentialunterschied bei freier Konvektion berücksichtigt.

► Im Falle, daß eine Rippenseite gedämmt ist – beispielsweise die Oberseite von Strahlplatten – wird der Temperaturabfall in der Dämmschicht so groß sein, daß sich eine detaillierte Ermittlung der Wärmeströme an der Außenfläche der Dämmung nicht lohnt.

Es wird deshalb global

$$\Delta Q_G = \kappa_G (t - t_U) A_G \quad (6)$$

angesetzt, wobei bedeuten:

κ_G Teilwärmedurchgangskoeffizient

$$\kappa_G = \left(\frac{1}{\alpha_{\text{ges}}} + \frac{\delta_D}{\lambda_D} \right)^{-1} \quad (7)$$

α_{ges} Gesamtwärmeübergangskoeffizient (Konvektion und Strahlung)

δ_D Dämmschichtdicke

λ_D Wärmeleitfähigkeit der Dämmung

t_U Umgebungstemperatur (Mittelwert aus Luft- und Strahlungstemperatur)

A_G Fläche, die am gemeinsamen Wärmeübergang beteiligt ist.

Abschließend sei nochmals erwähnt, daß die genannten Flächen A_S , A_K und A_G natürlich für jedes Element k anzugeben sind. Ausführlich werden sie $A_S[k]$, $A_K[k]$ sowie $A_G[k]$ genannt.

Prinzipiell wäre eine vom Ort k abhängige Differenzierung auch für weitere Parameter – α_K , κ_G , t_L , t_S , λ usw. – möglich, wenn man dadurch nicht das Modell der eindimensionalen Wärmeleitung verletzt.

Von eminenter Bedeutung ist die Festlegung der Rippenelementtemperatur t . Nach *Bild 1* betrage die Temperatur am Einströmquerschnitt t' . Der Gradient folgt aus Gl. (1) bei bekanntem Q' sofort zu $(\Delta t / \Delta x)'$, so daß sich die im *Bild 1* eingetragene Temperaturkurve 1 ergibt. Am Austritt aus dem Element fließt nur noch der Wärmestrom

$$Q'' = Q' - \Delta Q_S - \Delta Q_K - \Delta Q_G \quad (8),$$

woraus nach Gl. (2) sofort der Temperaturgradient $(\Delta t / \Delta x)''$ folgt und somit Kurve 2 anschließen würde.

Zur Verringerung der Fehler wird jedoch die Temperaturkurve nur bis zur Elementmitte $(\Delta x / 2)$ mit dem Eingangsgradienten gebildet und dann mit dem Ausgangsgradienten fortgesetzt. Es entsteht der im *Bild 1* dick gezeichnete Temperaturverlauf.

Die Eckwerte des Polygonzuges betragen somit:

$$t = t' + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)' \frac{\Delta x}{2} \quad (9)$$

$$t'' = t + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)'' \frac{\Delta x}{2} \quad (10)$$

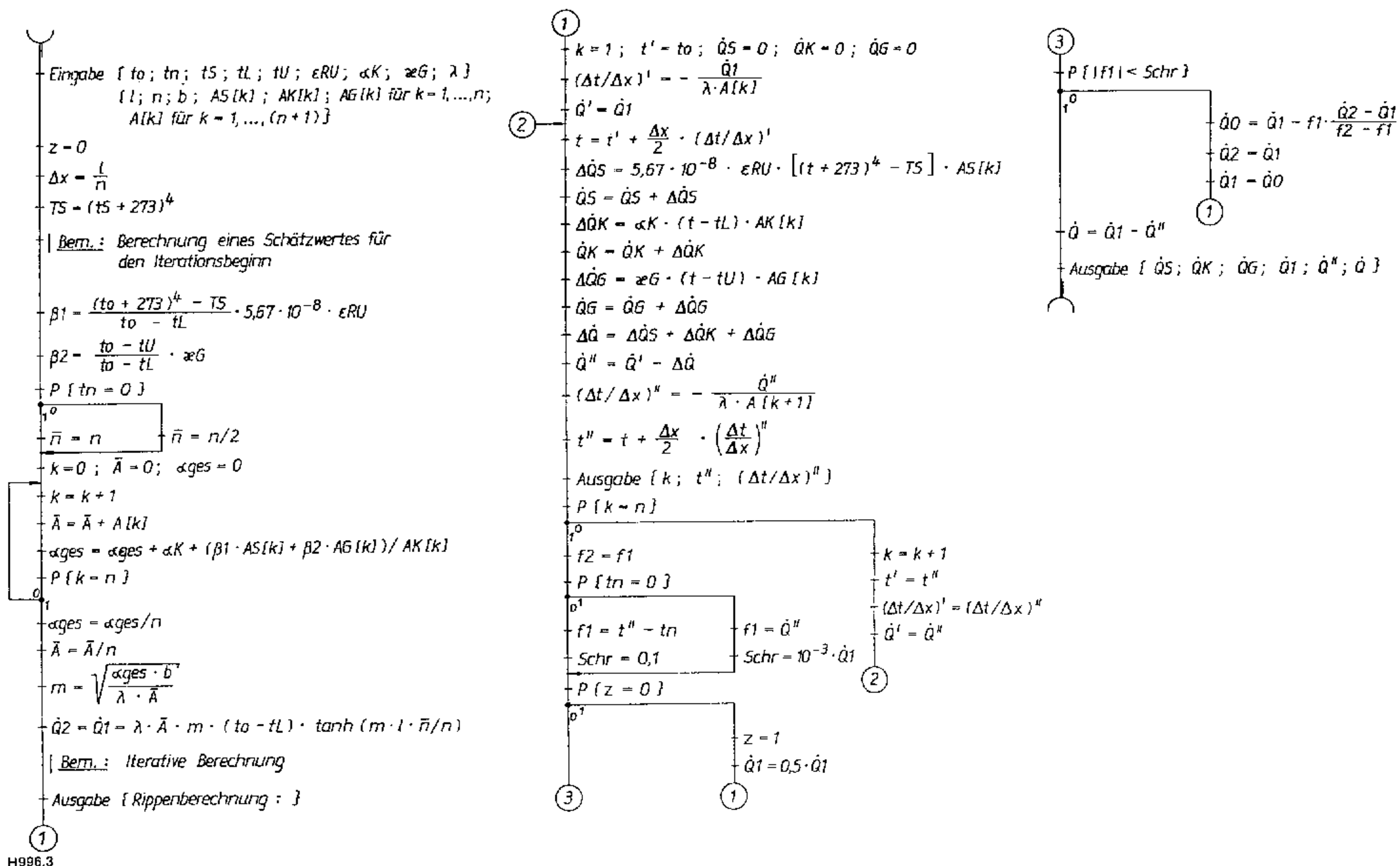


Bild 3: Programmablauf zur numerischen Berechnung eindimensionaler Wärmeleitvorgänge in Rippen (Eingabewerte)

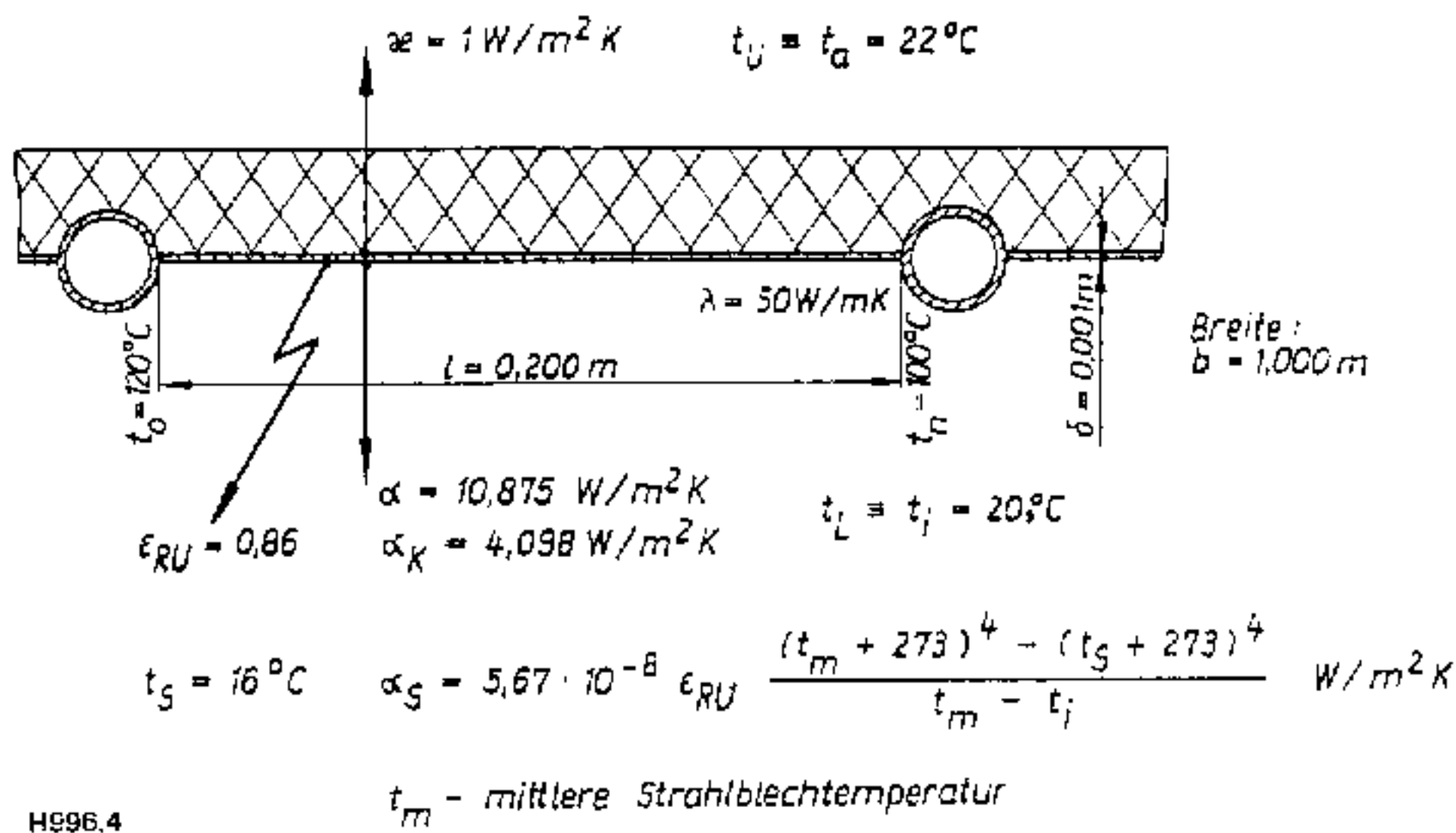
t_0	°C	Rippenfußtemperatur	$AS[k]$	m ²	Strahlungsfläche des Elementes k	für $k = 1, \dots, n$
t_n	°C	Rippenfußtemperatur am gegenüberliegenden beheizten Rand Wenn die Rippe nur einseitig beheizt wird, gilt $t_n = 0$.	$AK[k]$	m ²	Konvektionsfläche des Elementes k	
			$AG[k]$	m ²	Gedämmte Rippenfläche des Elementes k	
t_s	°C	Strahlungstemperatur der Umgebung	$A[k]$	m ²	Querschnittsfläche des Rippenmaterials am Eintritt in das Element k für $k = 1, \dots, n + 1$ ($A[n + 1]$ stellt die Querschnittsfläche am Austritt des n -Elementes dar. Es ist somit gleich der Rippenstirnfläche bzw. der zweiten beheizten Rippenfußfläche!)	
t_L	°C	Lufttemperatur				
t_U	°C	Umgebungstemperatur der gedämmten Rippenfläche				
ϵ_{RU}	—	Gesamtemissionskoeffizient (Rippe – Umgebung). Soll kein Strahlungsaustausch berücksichtigt werden, gilt $\epsilon_{RU} = 0$.	$(\frac{\Delta t}{\Delta x})''$	K/m	Tangente an die Temperaturkurve am Austritt des Elementes k	
α_K	W/m ² K	Konvektiver Wärmeübergangskoeffizient	$\hat{Q}_S$	W	Gesamtwärmestrom infolge Strahlung	
α_G	W/m ² K	Teilwärmedurchgangskoeffizient gedämmter Rippenflächen	$\hat{Q}_K$	W	Gesamtwärmestrom infolge Konvektion	
λ	W/mK	Wärmeleitfähigkeit des Rippenmaterials	$\hat{Q}_G$	W	Gesamtwärmestrom der gedämmten Rippenfläche	
l	m	Rippenlänge (Abstand zwischen Rippenfuß und Stirnfläche; bei kreisförmigen Rippen stellt l die Differenz der Radien dar)	$\hat{Q}_1$	W	Wärmestrom, der am Rippenfuß bei t_0 in die Rippe fließt	
n	—	Anzahl der Intervalle, in die l bei der numerischen Berechnung zerlegt wird	$\hat{Q}''$	W	Wärmestrom, der an der Stirnfläche oder am zweiten Rippenfuß bei t_n aus der Rippe austritt. (Ist $\hat{Q}'' < 0$, so fließt Wärme in die Rippe!)	
b	m	Länge des von t_0 beheizten Rippenfußes	$\hat{Q}$	W	Gesamtwärmestrom, der in die Rippe fließt und von deren Oberfläche abgegeben wird	
k	—	Elementnummer				
t''	°C	Temperatur am Austritt des Elementes k				

Ein Exkurs in die Mathematik zeigt, daß das beschriebene Verfahren ein implizites Einschrittverfahren auf der Grundlage der Trapezformel darstellt. Durch eine verfeinerte Intervalleinteilung ist eine beliebige Genauigkeit erreichbar.

Eine prinzipielle Verbesserung des Verfahrens wird im Hinblick auf die im folgenden Abschnitt dargestellten Er-

gebnisse nicht für erforderlich erachtet.

Unabhängig vom gewählten Modell müssen die Temperatur t_0 und der Gradient $(\Delta t / \Delta x)_0$ am Rippenfuß ($x = 0$) bekannt sein. Während der erste Wert der technischen Vorgabe entspricht, besteht über den Gradienten in der Regel keinerlei Kenntnis. Er wird deshalb durch Vorgabe des Wärmestromes am Rippenfuß $\hat{Q} = \hat{Q}'_{k=1} = \hat{Q}_1$ indirekt ge-



Die Genauigkeitsschranke ist beliebig wählbar. Als zulässiger Fehler wird $f < 0,1 \text{ K}$ gesetzt.

Variante 2

An nur einem Rippenrand gilt eine Randbedingung erster Art. Die gegenüberliegende Stirnseite soll keine Wärme abgeben, so daß $\dot{Q}_{k=n}'' = 0$ gelten muß. (Die tatsächliche Wärmeabgabe der Stirnfläche kann praktisch ohne Fehler in den Gln. (3), (4) bzw. (6) durch entsprechende Flächenvergrößerungen des n-ten Elementes erfaßt werden.)

Die Abweichung des Wärmestromes vom geforderten Nullwert dient direkt zur Fehlerquantifizierung

$$f_1 = \dot{Q}_{k=n}'' \quad (13)$$

Die verbesserte Schätzung wird wiederum auf der Basis zweier Ausgangswerte nach Gl. (12) ermittelt. Als Fehler-schranke sei $f < 10^{-3} \dot{Q}_{k=1}'$ empfohlen.

Um bei beiden Varianten einen guten Einstieg in die iterative Ermittlung zu finden, sollte ein qualifizierter Schätzwert $\dot{Q}_1$ vorliegen. Er wird mit mittleren Werten nach der analytischen Methode [vgl. Gln. (15) bis (17)] erarbeitet. Dazu erfolgen näherungsweise Umrechnungen der Wärmeströme auf einen reinen Konvektionsstrom, wobei die Temperaturdifferenzen und Wärmeübergangsbedingungen bewertet und die speziellen Flächen beachtet werden. Für die Wärmeleitquerschnitte wird ebenfalls ein Mittelwert eingesetzt. Der Wert b stellt die gestreckte Länge des Rippenfußes (beheizter Rippenrand) dar.

Im Verlauf der schrittweisen Berechnung werden die einzelnen Wärmestromanteile $\Delta \dot{Q}_S$, $\Delta \dot{Q}_K$ und $\Delta \dot{Q}_G$ jeweils aufaddiert, so daß die Summen $\dot{Q}_S$, $\dot{Q}_K$ und $\dot{Q}_G$ zum Schluß verfügbar sind. Der Gesamtwärmestrom $\dot{Q}$ ist auf zwei Wegen ermittelbar:

► Summe der von der Rippe nach außen abgegebenen Wärmeströme

$$\dot{Q} = \dot{Q}_S + \dot{Q}_K + \dot{Q}_G$$

► Differenz der in die Rippe ein- und ausgetretenen Wärmeströme

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1' - \dot{Q}_n''$$

Der Programmablauf ist detailliert im Bild 3 dargestellt. Im Abschnitt „Iterative Berechnung“ findet sich der beschriebene Algorithmus [Gln. (1) bis (13)] für vorgegebene α_K und κ_G , d.h. ohne Gln. (5) und (7) wieder. Die Indizes wurden auf Zeilenhöhe gerückt, ansonsten besteht Identität mit den bisher verwendeten Bezeichnungen.

Prüfung des numerischen Verfahrens

Die Ergebnisse des numerischen Verfahrens sollen den genauen analytischen Resultaten gegenübergestellt werden. Dabei ist auf einfache Rippengeometrien zurückzugreifen, da nur dafür geschlossene Lösungen existieren.

1. Vergleich

Für eine ebene, beidseitig beheizte Rippe (z.B. Lamelle einer Strahlplatte) gelten die im Bild 4 dargestellten geometrischen und wärmetechnischen Verhältnisse.

Zur analytischen Berechnung stehen nach [2, S. 41] für den Fall ungleicher Rippenfußtemperaturen und ungleicher Umgebungstemperaturen folgende Gleichungen zur Verfügung:

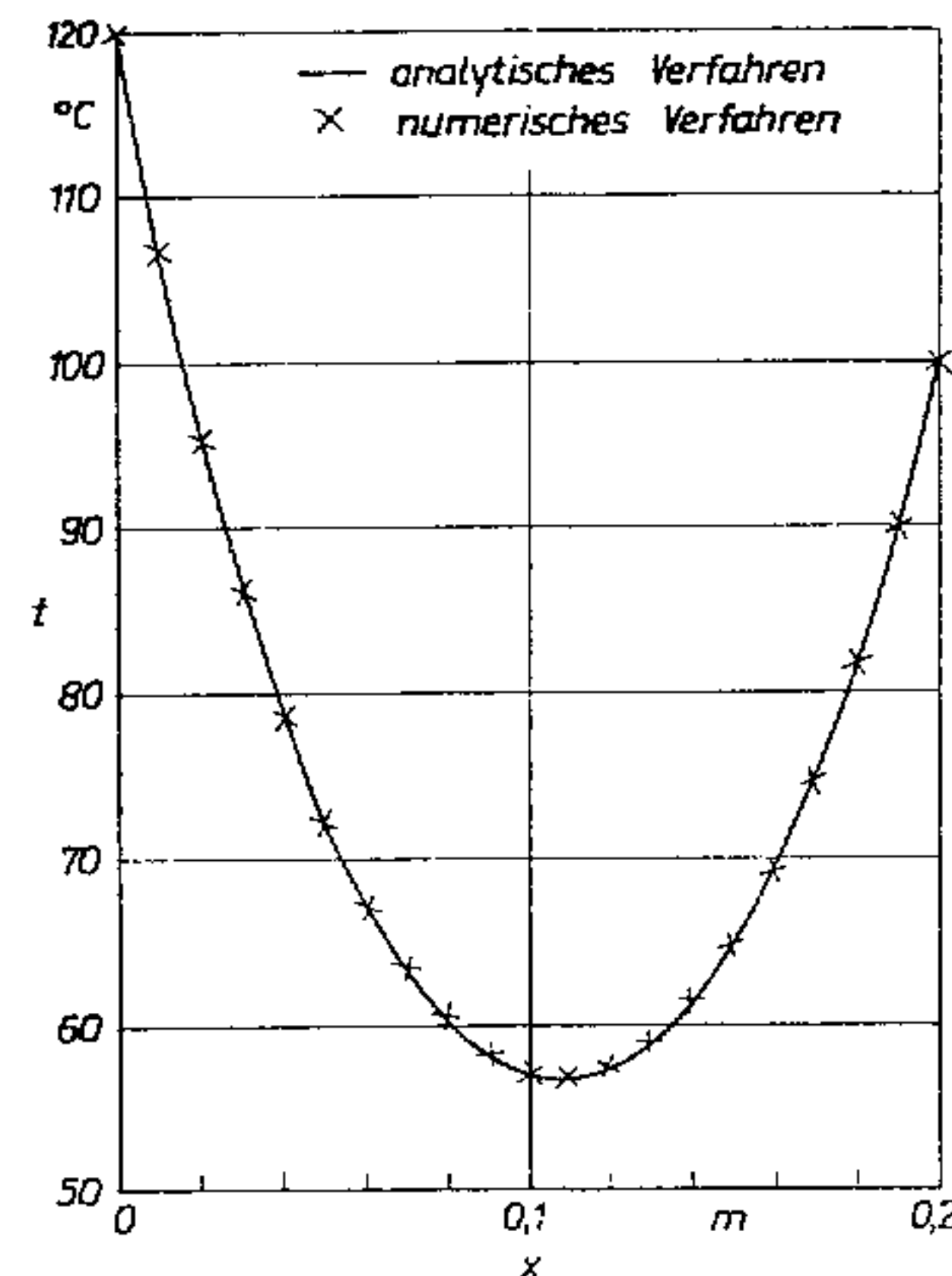


Bild 4: Lamelle einer Strahlplatte einschließlich der wärmetechnischen Kennwerte (Vergleich 1)

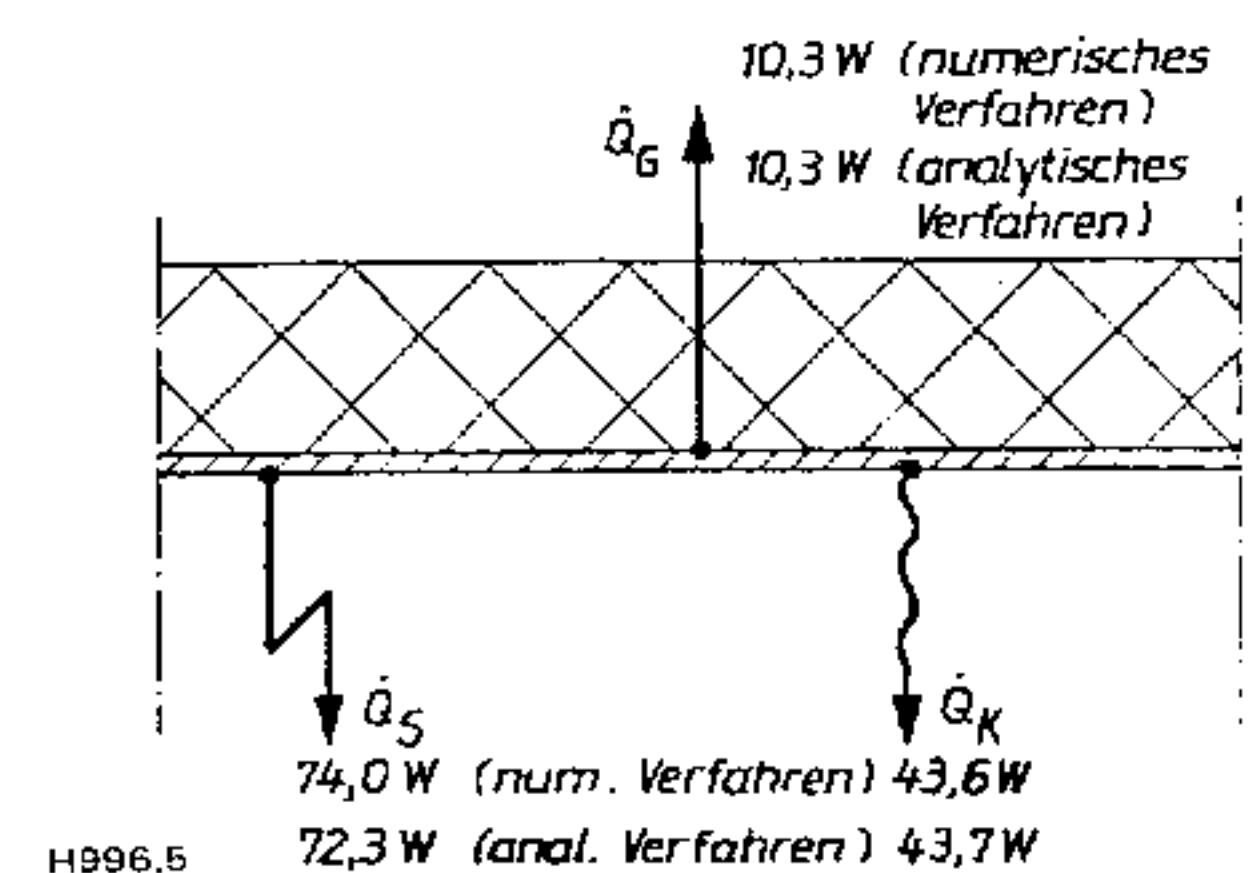


Bild 5: Temperaturverläufe in der Lamelle einer Strahlplatte und Einzelwärmeströme (Vergleich 1)

schätzt und mit einem Näherungsverfahren (regula falsi) angepaßt. Für die Entnahme der abzugleichenden Werte gibt es mehrere Möglichkeiten.

Variante 1

Beide Rippenränder zeichnen sich durch eine Randbedingung erster Art aus. Eine Schätzung von $\dot{Q}_1$ lieferte beispielsweise gemäß Bild 2 eine zu niedrige Temperatur am gegenüberliegenden Rand $t_{k=n}'' < t_n$.

Zur Anpassung wird zunächst die Abweichung

$$f_1 = t_{k=n}'' - t_n \quad (11)$$

ermittelt und dann aus je zwei Rechengängen eine neue Schätzung vorgenommen:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 - f_1 \frac{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1}{f_2 - f_1} \quad (12)$$

Temperaturverlauf in der Rippe (Strahlblech)

$$t = \left[(t_0 - t_i) - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left(m \frac{l}{2} \right)} + \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) - (t_0 - t_i) \frac{\sinh (m x)}{\sinh (m l)} + t_i \quad (14)$$

Mittlere Temperatur der Rippe

$$t_m = \left[t_0 - t_i - \frac{t_0 - t_i}{2} - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{\tanh \left(m \frac{l}{2} \right)}{m \frac{l}{2}} + \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) + t_i \quad (15)$$

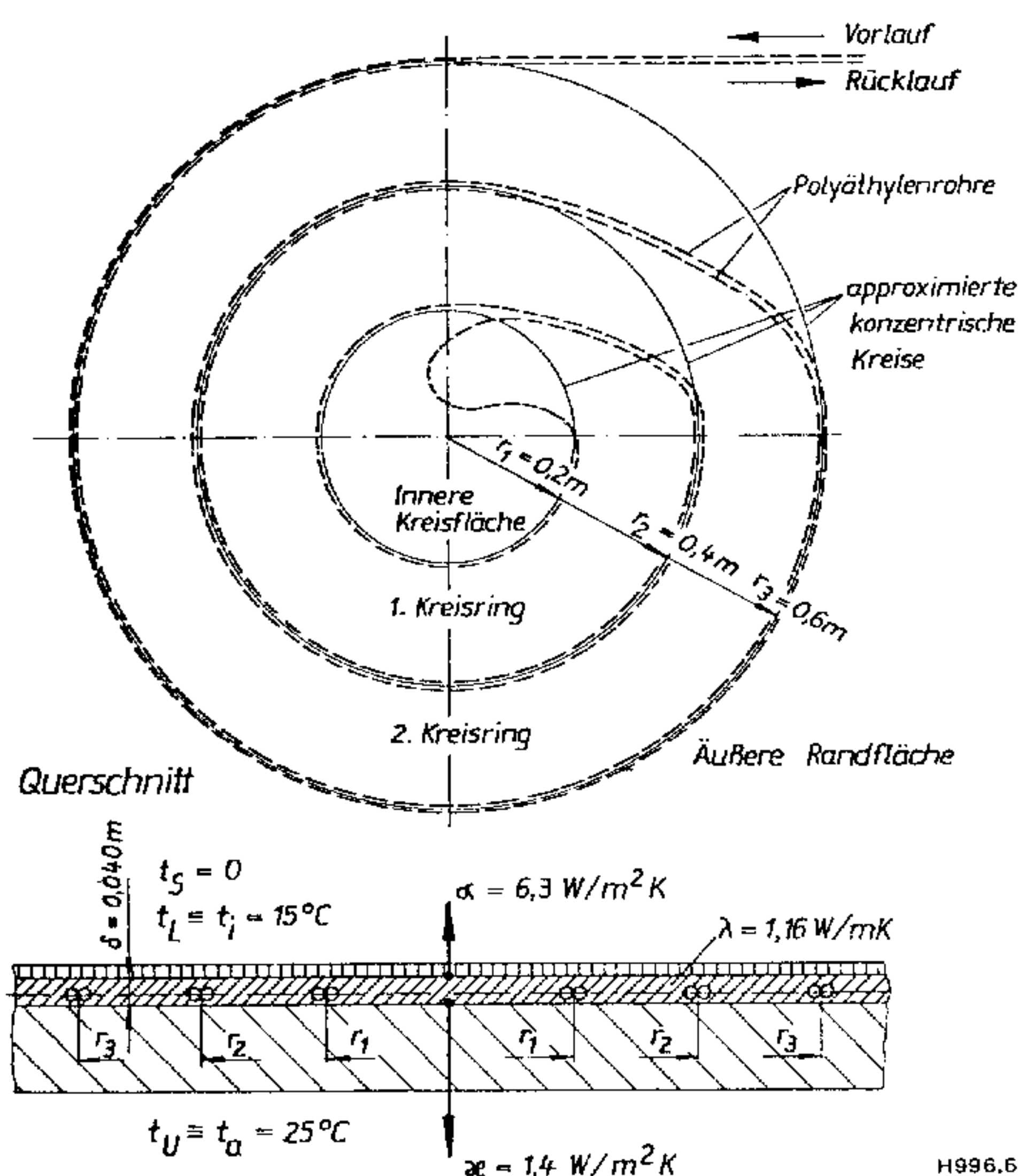


Bild 6: Spiralförmige Rohrverlegung im Estrich eines Fußbodens und die theoretische Überführung des Verlegeplanes in konzentrische Kreise einschließlich der wärmetechnischen Kennwerte

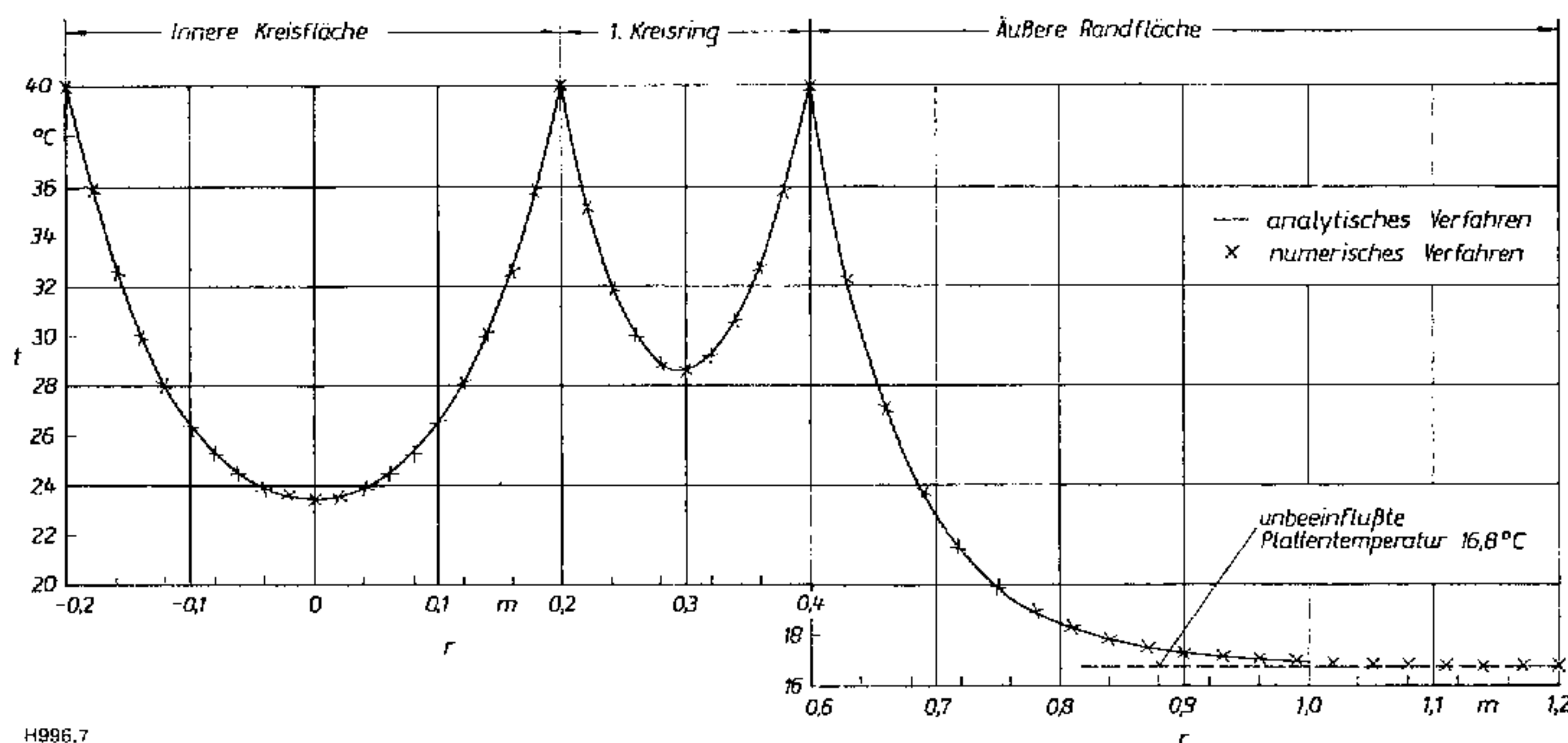


Bild 7: Temperaturverlauf in der Estrichschicht zwischen den konzentrisch angeordneten Rohren

Wärmeströme

$$\dot{Q}_i = \alpha (t_m - t_i) / b; \quad \dot{Q}_a = \kappa (t_m - t_a) / b \quad (16)$$

Abkürzung

$$m = \sqrt{\frac{\kappa + \alpha}{\lambda \delta}} \quad (17)$$

Die iterative Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten lieferte

$$\alpha_K = 4,098 \text{ W/m}^2\text{K}; \quad \alpha_S = 6,777 \text{ W/m}^2\text{K}; \quad \alpha = 10,875 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

Bei der numerischen Berechnung wurde α_K in gleicher Größe verwendet. Für den resultierenden Emissionskoeffizienten galt $\varepsilon_{RU} = 0,86$.

Die Temperaturverläufe und die Wärmeströme sind im Bild 5 aufgezeichnet. Der vom Strahlblech abgegebene Gesamtwärmestrom beträgt:

$$\dot{Q} = 126,3 \text{ W (analytisches Verfahren)}$$

$$\dot{Q} = 127,9 \text{ W (numerisches Verfahren).}$$

Die prinzipielle Übereinstimmung der Temperaturverläufe sowie der Wärmeströme nach oben und der konvektiven Anteile des Wärmestromes nach unten bestätigt die Richtigkeit des numerischen Verfahrens. Die Abweichung des Wärmestromes infolge Strahlung liegt in der unterschiedlichen Modellierung begründet. Das numerische Verfahren ist dabei genauer, da mit den realen Temperaturen der Lamelle – und nicht wie beim analytischen Verfahren mit der Mitteltemperatur – gearbeitet wird.

2. Vergleich

Die Rohrleitungen einer Fußbodenheizung sind spiralförmig nach Bild 6 verlegt. Sie wurden durch konzentrische Kreise approximiert. Das Beispiel geht auf [2, S. 61] zurück. Aus wärmetechnischer Sicht sind drei Fälle zu unterscheiden.

Vorbemerkung:

Die Größe α_i verkörpert infolge der Deckschichten (Fußbodenbelag) in diesem speziellen Fall auch einen Teilwärmedurchgangskoeffizienten analog Gl. (7). Für die Abkürzung m gilt weiterhin Gl. (17). Bei den Zylinderfunktionen handelt es sich um eine Modifikation der Bessel-Funktion I und die MacDonald-Funktion K . Sie sind in [3] und [2] tabelliert.

Fall A (Innere Kreisfläche)

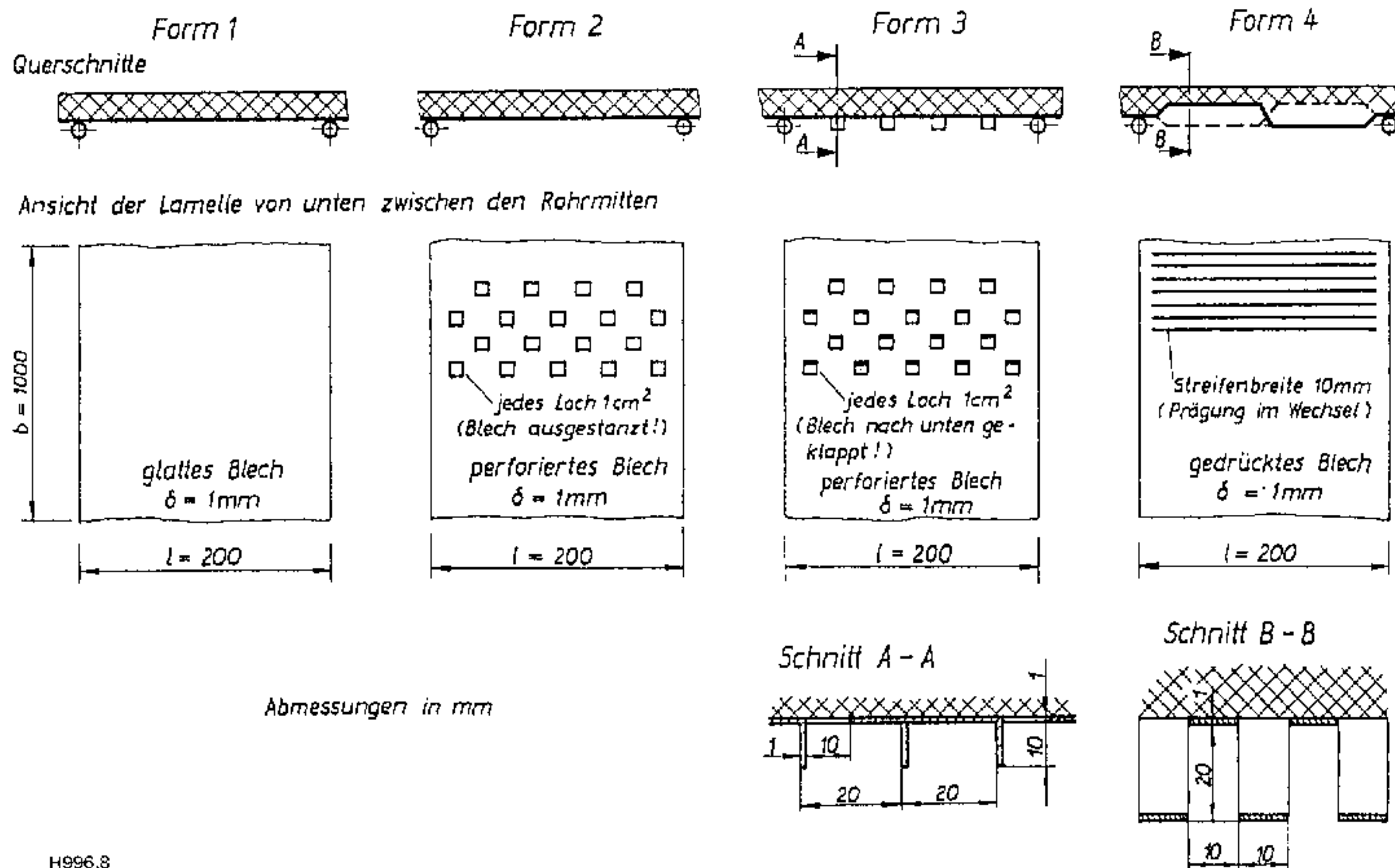


Bild 8: Formen der zu untersuchenden Strahlplattenkonstruktionen

Temperaturverlauf

$$t = \left[(t_0 - t_i) - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{l_0(m, r)}{l_0(m, r_1)} + \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) + t_i \quad (18)$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = 2 \pi r_1 \delta \lambda m \left[t_0 - t_i - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{l_1(m, r_1)}{l_0(m, r_1)} \quad (19)$$

Die numerische Berechnung erfolgte ohne Strahlungsanteil ($\epsilon_{RU} = 0$), um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen. Die Flächen $AK [k]$, $AG [k]$ und $A [k]$ wurden mit einem kleinen Programm für $k = 1 \dots 20$ ermittelt. Die Fläche $A [21]$, die die Rippenquerschnittsfläche am Kreismittelpunkt verkörpert und eigentlich Null ist, wurde durch eine sehr kleine Größe ersetzt, um Division durch Null zu vermeiden. Dies bedeutet, daß die Kreisfläche in der Mitte beispielsweise ein Loch vom Durchmesser 1 mm aufweist.

Die Temperaturverläufe sind im *Bild 7* (linker Abschnitt) gegenübergestellt. Die Wärmeströme betragen:

$\dot{Q} = 13,5 \text{ W}$ (analytisches Verfahren)

$\dot{Q} = 13,4 \text{ W}$ (numerisches Verfahren).

Fall B (Kreisring)

Temperaturverlauf

$$t = \left[(t_0 - t_i) - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{[-K_0(m, r_{n+1}) + K_0(m, r_n)] l_0(m, r) + l_0(m, r_{n+1}) K_0(m, r_n) - [l_0(m, r_{n+1}) - l_0(m, r_n)] K_0(m, r)}{l_0(m, r_n) K_0(m, r_{n+1}) - l_0(m, r_n) K_0(m, r_{n+1})} + \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) + t_i \quad (20)$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = -2 \pi \lambda \delta m \left[t_0 - t_i - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \times \left\{ \frac{[-K_0(m, r_{n+1}) + K_0(m, r_n)] [l_1(m, r_n) r_n - l_1(m, r_{n+1}) r_{n+1}]}{l_0(m, r_{n+1}) K_0(m, r_n) - l_0(m, r_n) K_0(m, r_{n+1})} + \frac{[l_0(m, r_{n+1}) - l_0(m, r_n)] [-K_1(m, r_n) r_n + K_1(m, r_{n+1}) r_{n+1}]}{l_0(m, r_{n+1}) K_0(m, r_n) - l_0(m, r_n) K_0(m, r_{n+1})} \right\} \quad (21)$$

Die numerische Berechnung erfolgte problemlos. Die Temperaturverläufe sind im *Bild 7* (mittlerer Abschnitt) aufgetragen. Weiterhin ergaben sich die Wärmeströme:

$\dot{Q} = 44,7 \text{ W}$ (analytisches Verfahren)

$\dot{Q} = 44,7 \text{ W}$ (numerisches Verfahren).

Fall C (Äußere Randfläche)

Temperaturverlauf

$$t = \left[t_0 - t_i - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{K_0(m, r)}{K_0(m, r_a)} + \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) + t_i \quad (22)$$

Wärmestrom

$$\dot{Q} = 2 \pi r_a \delta \lambda m \left[t_0 - t_i - \frac{\kappa}{\kappa + \alpha} (t_a - t_i) \right] \frac{K_1(m, r_a)}{K_0(m, r_a)} \quad (23)$$

Da die Rippe keine definierte Außenbegrenzung hat, verläuft die Annäherung der Temperaturkurve an die unbeeinflusste Plattentemperatur asymptotisch, d.h., sie wird diese erst im Unendlichen erreichen. Für die numerische Berechnung ist jedoch ein „praktisches Ende“ der abklingenden Temperaturkurve vorzugeben. Man wird mit einem relativ großen Abstand beginnen und je nach Ergebnis bei weiteren Rechnungen dann evtl. näher an den Rippenfuß rücken. Im vorliegenden Beispiel genügte jedoch eine einzige Rechnung. Es wurde der Bereich $r = 0,60 \dots 1,20 \text{ m}$ betrachtet. Die Temperaturkurve ist wiederum im *Bild 7* (rechter Abschnitt) aufgezeichnet.

Die Wärmeströme
 $Q = 55,5 \text{ W}$ (analytisches Verfahren)
 $Q = 54,4 \text{ W}$ (numerisches Verfahren)
 zeigen Unterschiede, die aus der „unnatürlichen“ Festlegung des Rippenrandes resultieren.

Insgesamt demonstrieren die Vergleiche 1 und 2 deutlich die Leistungsfähigkeit des numerischen Verfahrens. Die Ergebnisse berechtigen zur Anwendung des Rechenprogramms auch auf bisher noch nicht lösbare Fälle.

Praktische Anwendungsbeispiele

Strahlplattengestaltung

Es besteht die Aufgabe, eine Strahlplatte mit einem hohen Strahlungsanteil zu entwickeln, die zusätzlich schallabsorbierende Eigenschaften aufweist. Ausgehend vom glat-

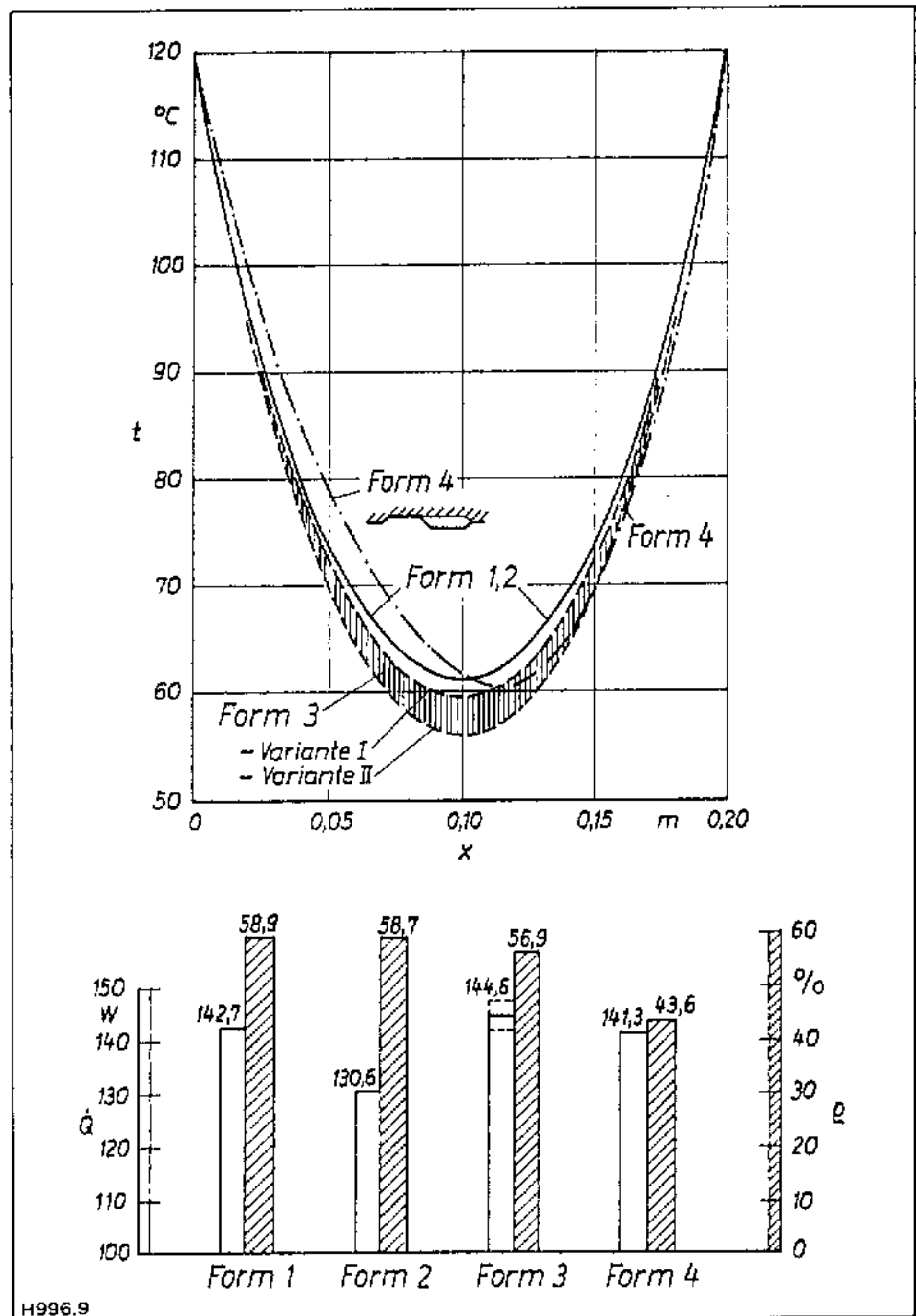


Bild 9: Ergebnisse der Strahlplattenuntersuchungen (Temperaturverläufe; Wärmeströme; Strahlungsanteile)

	Form A	Form B	Form C	Form D
Rippen- dicke in m	$\delta = 0,002$	$\delta = 0,001$	$\delta = 0,00225 - 0,025 \cdot r$ $\delta_1 = 0,002$ $\delta_2 = 0,001$	$\delta = 0,002378 e^{-17,33r}$ $\delta_1 = 0,002$ $\delta_2 = 0,001$
Rippen- volumen in m ³	$V = 15,080 \cdot 10^{-6}$	$V = 7,540 \cdot 10^{-6}$	$V = 10,472 \cdot 10^{-6}$	$V = 10,044 \cdot 10^{-6}$

Bild 10: Formen der zu untersuchenden Rippen

ten Strahlblech sind drei weitere Lamellengeometrien (*Bild 8*) aus wärmetechnischer Sicht zu beurteilen.

Das numerische Verfahren ist besonders geeignet, alle geometrischen Besonderheiten zu erfassen. Dennoch muß eine typisch ingenieurmäßige Bearbeitung erfolgen, um die Eingabewerte realitätsbezogen und bezüglich der einzelnen Varianten vergleichbar zu ermitteln.

Es wurden folgende Basisannahmen getroffen:

- $t_0 = t_n = 120 \text{ °C}$ Rippenfußtemperaturen
- $t_s = 16 \text{ °C}$ Strahlungstemperatur der Umgebung
- $t_L = 20 \text{ °C}$ Lufttemperatur
- $t_G = 22 \text{ °C}$ Umgebungstemperatur oberhalb der Platte
- $\epsilon_{RU} = 0,86$ Gesamtemissionskoeffizient
- $\alpha_K = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$ Wärmeübergangskoeffizient
- $\kappa_G = 1 \text{ W/m}^2\text{K}$ Teilwärmedurchgangskoeffizient
- $\lambda = 50 \text{ W/mK}$ Wärmeleitkoeffizient.

Der konvektive Wärmeübergangskoeffizient ist relativ niedrig angenommen worden, da die gesamte Plattenkonstruktion einen wirksamen Konvektionsschutz erhalten soll. Die Länge der Lamelle beträgt jeweils $l = 0,2 \text{ m}$ und die betrachtete Breite $b = 1 \text{ m}$. Die Länge l wird in $n = 20$ Intervalle unterteilt.

Sehr differenziert sind die Flächen $A_S[k]$, $A_K[k]$, $A_G[k]$ und $A[k]$ zu ermitteln:

- Berücksichtigung der Schnittflächen des Bleches bei durchbrochenen Lamellen in bezug auf A_S , A_K und A_G .
- Einarbeitung der Einstrahlzahlen in die Strahlflächen A_S . (Besonders ist die Eigenverschattung zu beachten, so beispielsweise bei Form 4.)
- Bei perforierten Platten müßte eigentlich eine zweidimensionale Wärmeleitung angesetzt werden. Um makroskopisch weiterhin mit der eindimensionalen Theorie arbeiten zu können, muß die Intervalleinteilung bei den Formen 2 und 3 so erfolgen, daß anteilmäßig kleine und große Werte A erfaßt werden. Problematisch ist die Annahme, inwieweit bei Form 3 die herabgeklappten Blechelemente noch an der Wärmeleitung zwischen den Rohren zu beteiligen sind. Da rein überlegungsmäßig keine Quantifizierung möglich ist, werden zwei Varianten – Variante I: voller Ansatz, wie bei Form 1; Variante II: keine Berücksichtigung, wie bei Form 2 – betrachtet. Die Realität wird zwischen beiden Annahmen liegen.

Die im *Bild 9* dargestellten Ergebnisse sind sehr aussagekräftig:

- Die Temperaturverläufe der Formen 1 und 2 unterscheiden sich kaum, die Gesamtwärmeströme Q jedoch auf Grund der Flächenverringerung (Perforation) beträchtlich. Der Strahlungsanteil $\rho = (Q_S/Q) \cdot 100\%$ bleibt praktisch unverändert, da sich die Flächen A_S , A_K und A_G in gleichem Maße reduzieren.

► Der Temperaturverlauf der Lamellenform 3 ist von der gewählten Variante abhängig. Erwartungsgemäß liegt die Kurve bei kleinerem Wärmeleitquerschnitt A (Variante II) tiefer als bei Variante I. Die Wärmeströme beider Varianten wurden gemittelt. Das Ergebnis liegt in der Größenordnung der glatten Lamelle (Form 1). Demgegenüber fällt der Strahlungsanteil um ca. 2% ab. Dies resultiert aus der Flächenvergrößerung der konvektiven Fläche A_K (beide Seiten der Aufklappung werden von Luft umspült) und der nahezu gleichbleibenden Strahlungsfläche A_S gegenüber Form 1, da etwa 50% der Strahlung von den senkrechten Flächenelementen die Lamelle trifft.

► Die Ausführungsform 4 zeigt einen asymmetrischen Temperaturverlauf, da die nach unten gebogenen Blechstreifen eine bevorzugte Wärmeabgabe durch Konvektion und Strahlung aufweisen. Die Gesamtwärmeabgabe $\dot{Q}$ entspricht etwa der Form 1, allerdings hat die Konvektion gegenüber der Strahlung zugenommen, so daß der Strahlungsanteil stark gesunken ist. Die Ursache liegt in der Zunahme der Konvektionsfläche (unterer Blechstreifen wird beidseitig von Luft umspült) und der durch Eigenverschattung verringerten Strahlfläche (oberer Blechstreifen kann nicht ungehindert in den Halbraum emittieren).

Zusammenfassend erscheint Form 3 am vorteilhaftesten. Blicke der Materialeinsatz unbeachtet, dann wäre Form 2 zu bevorzugen.

Rippenquerschnitt

Eine in den äußeren Abmessungen ($r_1 = 0,010$ m; $r_2 = 0,050$ m) vorgegebene Kreisrippe aus Stahl ($\lambda = 50$ W/mK) ist hinsichtlich des Materialeinsatzes zu optimieren. Es soll auf engstem Raum ein großer Wärmestrom übertragen werden. Der Lamellenabstand liegt bereits fest, wodurch $\alpha_K = 30$ W/m²K determiniert ist. Die Rippenfußtemperatur (Rohrtemperatur) betrage $t_0 = 80$ °C, die aufzuheizende Luft ist mit $t_L = 20$ °C anzunehmen.

Die aus technologischen Gegebenheiten verfügbaren Rippenquerschnitte können Bild 10 entnommen werden. Die Rippendicken δ und die aus der Integration der Rotationskörper ermittelten Volumen V – die den Materialeinsatz kennzeichnen – sind vermerkt.

Zur Lösung wird wiederum das numerische Verfahren verwendet. Die Radiendifferenz der Rippe (40 mm) sei in $n = 20$ Elemente (Zylinderringe) aufgeteilt. Die zugehörigen Flächen $A_K[k]$ und $A[k]$ ermittelt man mit einem separaten, kleinen Programm. In erster Näherung bleiben die Oberflächen $A_K[k]$ für alle vier Varianten gleich. Die Wärmeübertragung durch Strahlung wird vernachlässigt.

Die Ergebnisse sind im Bild 11 zusammengefaßt. Es folgen die Aussagen:

- Die Temperaturkurven liegen um so höher, je größer der Materialeinsatz ist.
- Da ein hoher Wärmestrom gefordert wurde, scheidet Form B aus.
- Die spezifische Wärmeabgabe der Rippe, bezogen auf das eingesetzte Materialvolumen V , ist bei den Formen C und D bedeutend günstiger als bei Form A.

Zusammenfassung

Das vorgestellte numerische Berechnungsverfahren kann auf jedem Kleinstcomputer abgearbeitet werden. Die Genauigkeit ist, wie der Vergleich mit bekannten analytischen Verfahren zeigte, sehr gut. Es ermöglicht damit die effektive Bearbeitung zahlreicher eindimensionaler Wärme-

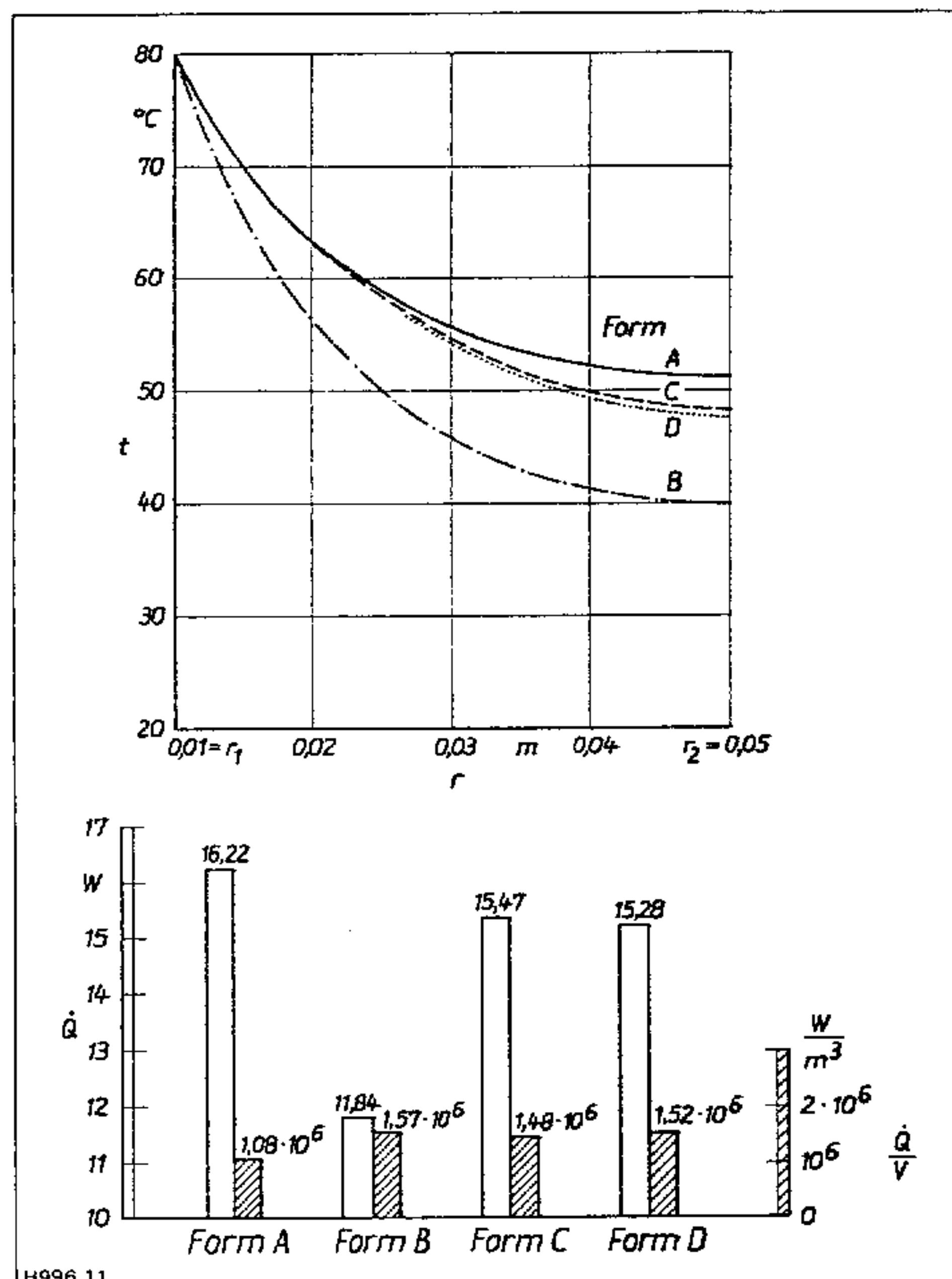


Bild 11: Ergebnisse der Rippenuntersuchungen (Temperaturverläufe; Wärmeströme; Materialeinsatzbezogene Wärmeleistung)

leitprobleme. Variationen der Wärmeübergangsbedingungen und der Materialien lassen unter Beachten spezieller Temperaturbedingungen sofort die Auswirkungen auf die Ergebnisse erkennen. Durch die gezielte Veränderung der Geometrie können optimale Trends weiterverfolgt und optimale Konstruktionen erreicht werden.

Im VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung ist mit dieser Berechnungsmethode eine weitere Etappe der etwa 20jährigen wissenschaftlich-konstruktiven Entwicklung von Stahlheizflächen (Plattenheizkörper und Strahlplatten) eingeleitet worden. [H 996]

Literaturangaben

- [1] Michejew, M. A.: Grundlagen der Wärmeübertragung. Berlin: VEB Verlag Technik 1964.
- [2] Glück, B.: Strahlungsheizung – Theorie und Praxis. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen und Karlsruhe: C. F. Müller-Verlag 1982.
- [3] Bronstein/Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960