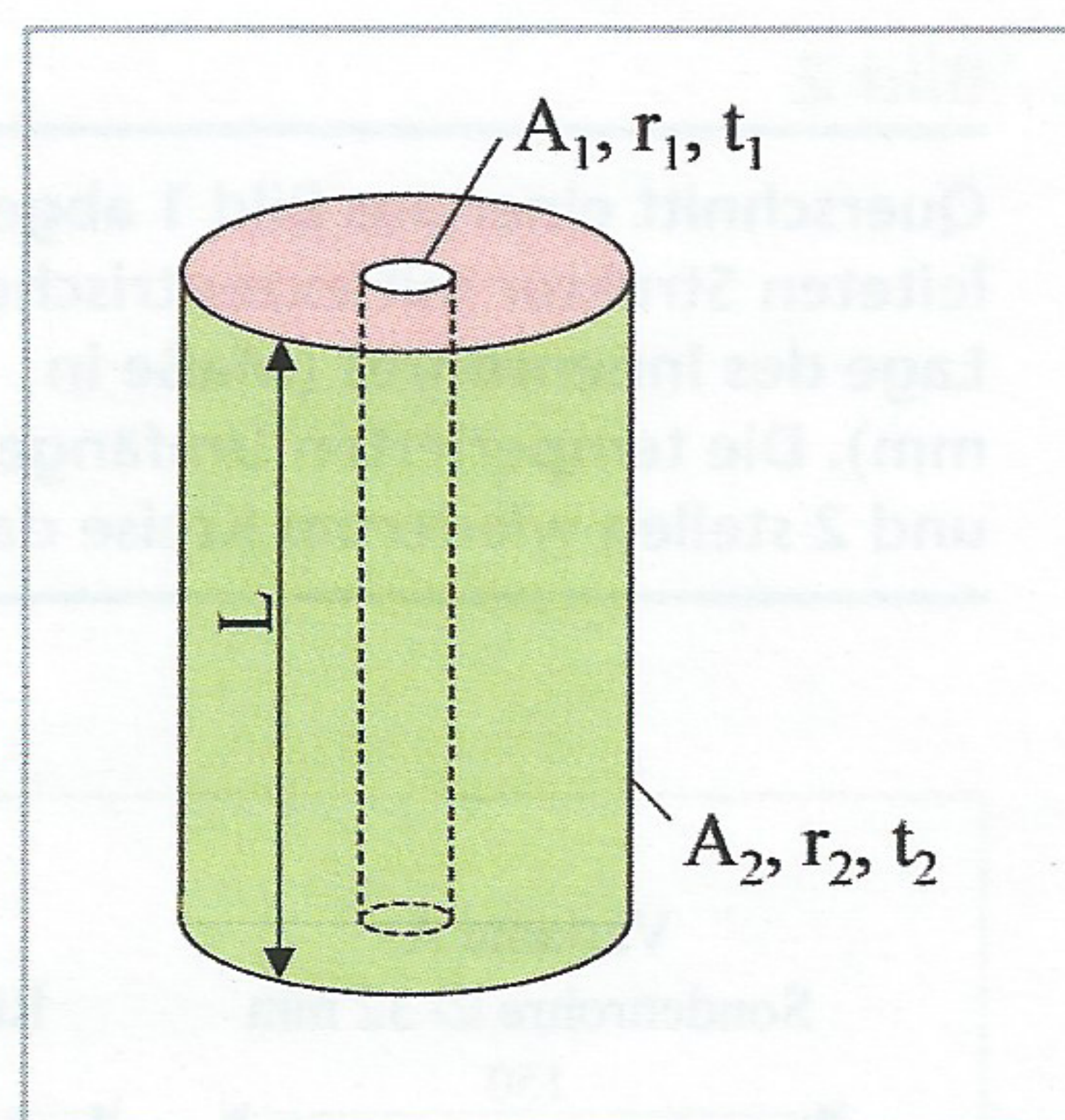


Formfaktoren zur Simulation von Erdwärmesonden¹⁾

Bernd Glück,
Jößnitz (Plauen)

Berechnung der stationären, mehrdimensionalen Wärmeleitung mittels Formfaktoren bei drei Körperoberflächen mit vorgegebenen Temperaturen und ihre Anwendung zur wärmetechnischen Simulation von Erdwärmesonden.

Wird ein zusammenhängender Festkörper von zwei Oberflächen A_1 und A_2 mit den aufgetragenen Temperaturen t_1 und t_2 und eventuell von n weiteren adiabaten Oberflächen begrenzt, kann der stationäre Wärmestrom von A_1 zu A_2 mit Hilfe eines sogenannten Formfaktors S bestimmt werden. In der Literatur [1; 2] finden sich entsprechende Zusammenstellungen für zahlreiche Konstruktionen. Im Weiteren wird gezeigt, dass eine analoge Anwendung auch bei drei Oberflächen A_0 , A_1 und A_2 mit den Temperaturen t_0 , t_1 und t_2 möglich ist. Das Ergeb-



nis lässt sich vorteilhaft zur Simulation von Erdwärmesonden verwenden.

Formfaktoren zur Beschreibung der mehrdimensionalen, stationären Wärmeleitung

Für einen Körper mit gleich bleibender axialer Gestalt der Länge L gilt für den Wärmestrom von A_1 zu A_2 allgemein:

$$\dot{Q}_{12} = \lambda S L (t_1 - t_2) \quad (1)$$

Beispielsweise ergibt sich für einen Hohlzylinder nach Bild 1 zwischen innerer und äußerer Oberfläche bei als adiabaten angenommenen Deckflächen der Formfaktor

$$S = \frac{2\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2)$$

Somit folgt z. B. für die Wärmeabgabe eines gedämmten Heizrohres der bekannte Zusammenhang

$$\dot{Q}_{12} = \lambda S L (t_1 - t_2) = \lambda \frac{2\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}} L (t_1 - t_2) \quad (3)$$

Die Bestimmung der Formfaktoren kann aus dem FOURIERSchen Erfahrungsgesetz für den Wärmestrom abgeleitet werden. Allgemein gilt

$$\dot{Q}_{12} = -\lambda \int_{A_1} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) dA_1 \quad (4)$$

¹⁾ Ein neues Simulationsmodell für Erdwärmesonden auf Basis der Formfaktoren wird im Oktoberheft der HLH vorgestellt.

Bild 1

Hohlzylinder mit den Zylinderflächen A_1 , A_2 und den Temperaturen t_1 , t_2 sowie mit zwei adiabaten Kreisringflächen der Radien r_1 und r_2 . Die Kreisringdurchmesser $2r_1$ und $2r_2$ sind konzentrisch angeordnet. Die Wärmeleitfähigkeit des Zwischenraummaterials sei λ

und für den hier zu betrachtenden Längskörper gleichbleibenden Querschnitts z. B. am Umfang des Innenrohres (Bild 1)

$$\dot{Q}_{12} = -\lambda L \int_{U_1} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) dU_1 \quad (5)$$

Die Feldtemperatur t ersetzt man zweckmäßigerweise durch die Übertemperatur

$$\vartheta = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \quad (6)$$

Somit nimmt Gl. (5) die Form

$$\dot{Q}_{12} = -\lambda L (t_1 - t_2) \int_{U_1} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right) dU_1 \quad (7)$$

an, woraus nach Gleichsetzen mit Gl. (1) folgt:

$$S = - \int_{U_1} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right) dU_1 > 0 \quad (8)$$

Beim Wärmestrom von Fläche 1 zu Fläche 2 gelten $t_1 > t_2$ und $(\partial \vartheta / \partial n)_1 < 0$, so dass $S > 0$ folgt, was die übliche Darstellung ist.

Hinweis: Für die Wärmeleitung zwischen zwei beliebigen Oberflächen des Körpers – z. B. zwischen zwei konzentrischen Kugeln – wird Gl. (1) $\dot{Q}_{12} = \lambda S_K (t_1 - t_2)$ geschrieben. Hierbei stellt S_K den mit der Dimension einer Länge behafteten Formkoeffizienten dar. Dieser sprachlich richtige Unterschied wurde bereits in [1] eingeführt. Die Bestimmungsgleichung hat dann analog zu Gl. (8) die Form:

Autor



Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, Jahrgang 1942, betreibt ein Forschungs- und Entwicklungsbüro für Technische Gebäudeausrüstung. Gleichzeitig ist er als Honorarprofessor an der Westsächsischen Hochschule Zwickau (FH) tätig.

$$S_K = - \int_{A_1} (\partial \vartheta / \partial n)_1 dA_1 > 0$$

Die Komplexität der Berechnung der mehrdimensionalen Wärmeleitung in einem beliebig berandeten Körper ist somit nur einmal zu lösen, da das Potenzialfeld der dimensionslosen Übertemperatur ϑ im ausgewählten Körper stets gleich ist.

In [1; 2] sind für eine Vielzahl von Körperformen die Formfaktoren S angegeben. Die Ermittlung erfolgte in der Regel nach anspruchsvollen analytischen Methoden. Es sind aber auch experimentelle Auswertungen der Potenzialfelder, die beispielsweise auf elektrisch leitendem Papier erzeugt wurden, üblich gewesen. Derzeit wird die Wärmeleitung in den mitunter komplizierten Körperstrukturen in der Regel numerisch simuliert und S aus dem ermittelten Wärmestrom eliminiert:

$$S = \frac{\dot{Q}_{12}}{\lambda L (t_1 - t_2)} \quad (9)$$

So wurde vom Verfasser mit einem selbst erarbeiteten finite Elementverfahren für eine Kreisscheibe gemäß Bild 1 mit den Radien $r_1 = 16$ mm und $r_2 = 75$ mm bei einer quadratischen Gitterteilung von 0,5 mm $S_{\text{SIM}} = 4,041$ bestimmt. Aus Gl. (2) folgt der exakte Wert zu $S = 4,067$ (Fehler: -0,6 %).

Als weitere Verifikation dient die Struktur nach Bild 2, für die nach [2] die Lösung

$$S = \frac{2\pi}{\operatorname{arcosh} \frac{r_1^2 + r_2^2 - e^2}{2r_1 r_2}} \quad (10)$$

existiert.

Mit den Werten des Bildes 2, folgt der exakte Wert nach Gl. (10) zu $S = 4,622$. Demgegenüber liefert die numerische Simulation $S_{\text{SIM}} = 4,582$ (Abweichung: -0,9 %).

Analogie für drei temperierte Oberflächen

Sind gemäß Bild 3 drei Oberflächen A_0 , A_1 , A_2 des umhüllten Körpers die unterschiedlichen Temperaturen t_0 , t_1 , t_2 aufgebracht, so können formal analog zu Gl. (9) zwei Formfaktoren S_{10} und S_{20} definiert werden, wobei die Indizes auf die Temperaturbezüge hinweisen:

$$S_{10} = \frac{\dot{Q}_{10}}{\lambda L (t_1 - t_0)} \quad (11)$$

$$S_{20} = \frac{\dot{Q}_{20}}{\lambda L (t_2 - t_0)} \quad (12)$$

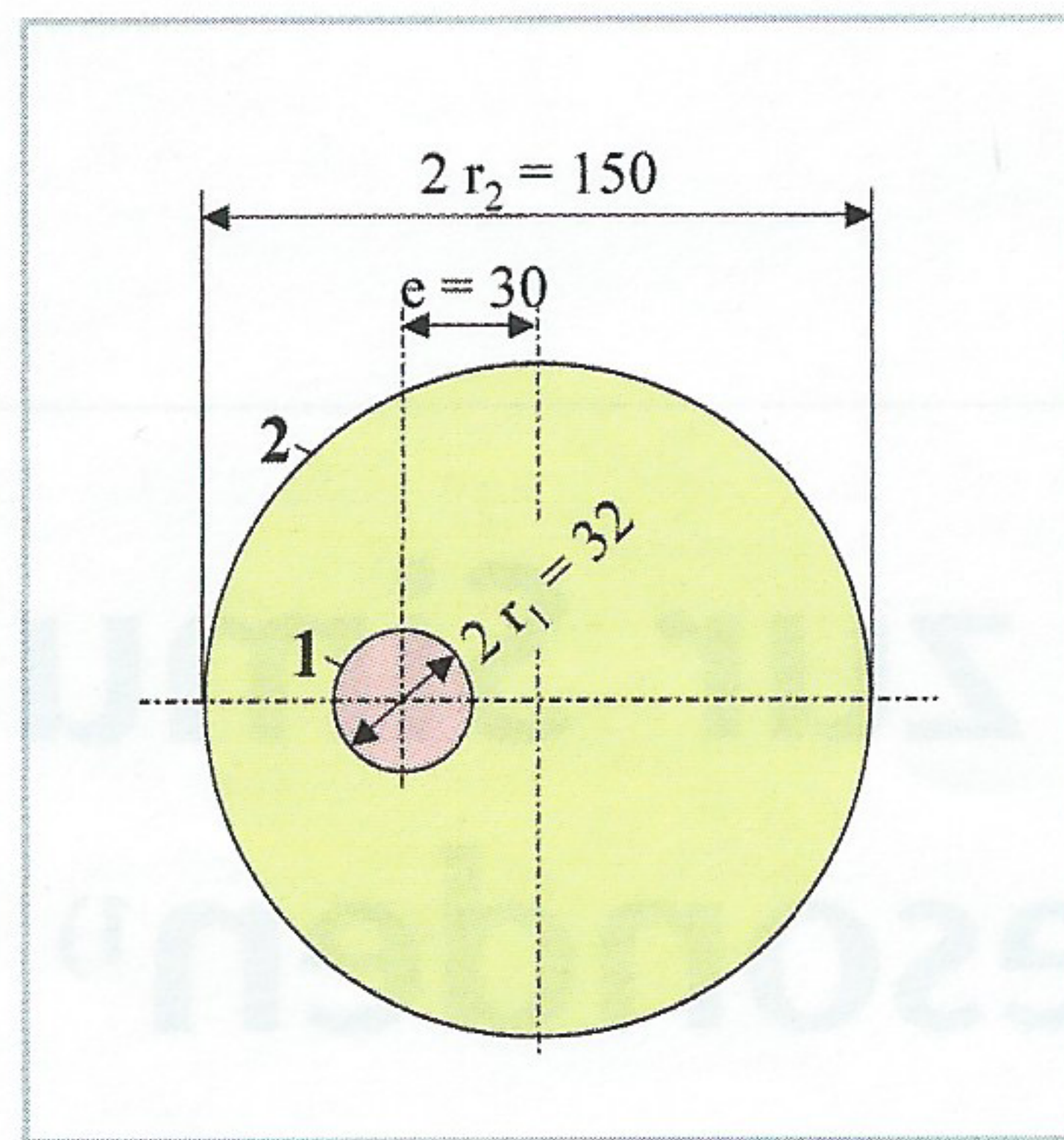


Bild 2

Querschnitt einer aus Bild 1 abgeleiteten Struktur mit exzentrischer Lage des Innenrohres (Maße in mm). Die temperierten Umfänge 1 und 2 stellen wiederum Kreise dar.

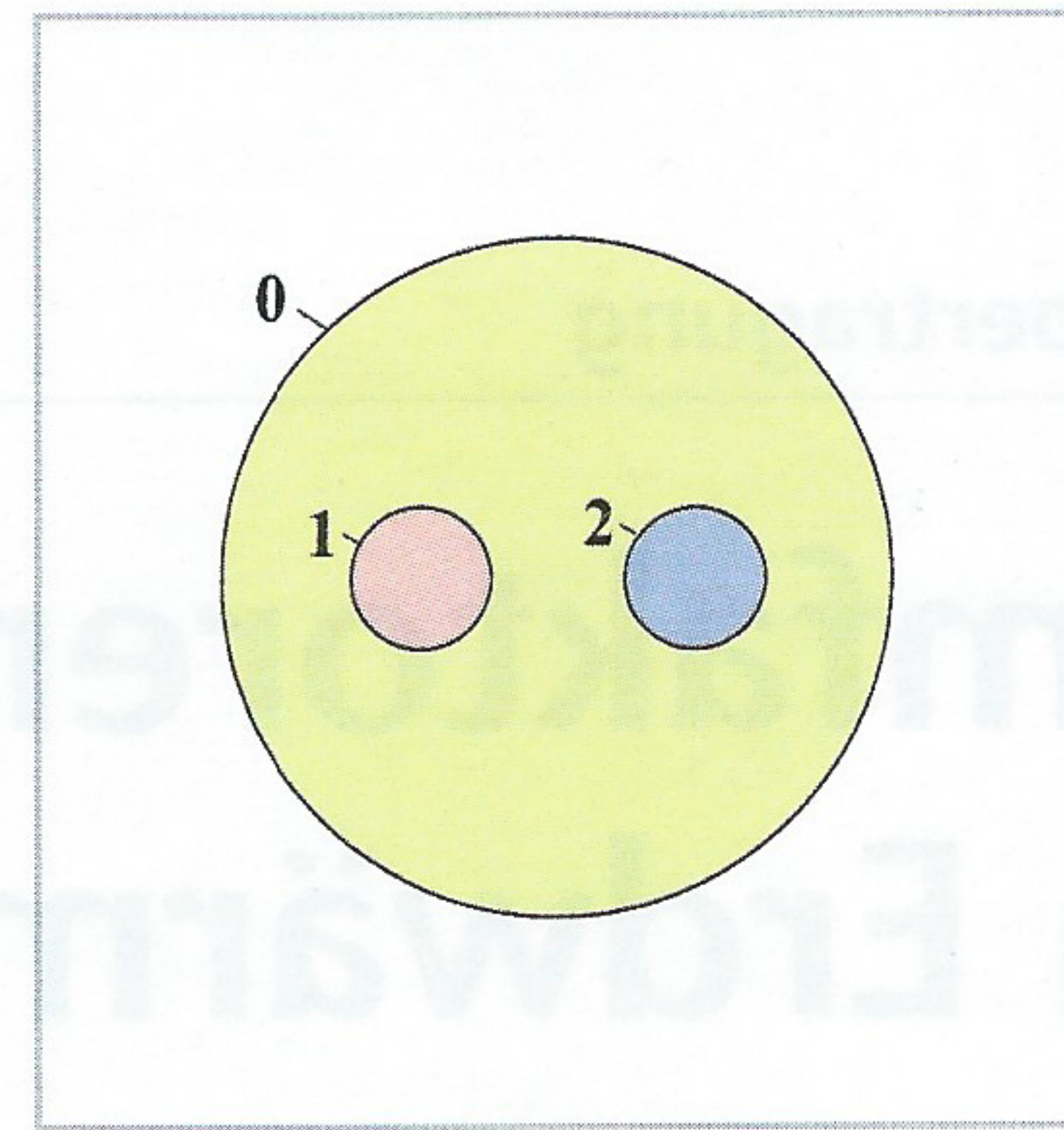


Bild 3

Querschnitt durch eine längenunabhängige Struktur mit den Oberflächen 1, 2 und 0, denen die konstanten Temperaturen t_1 , t_2 und t_0 aufgeprägt sind

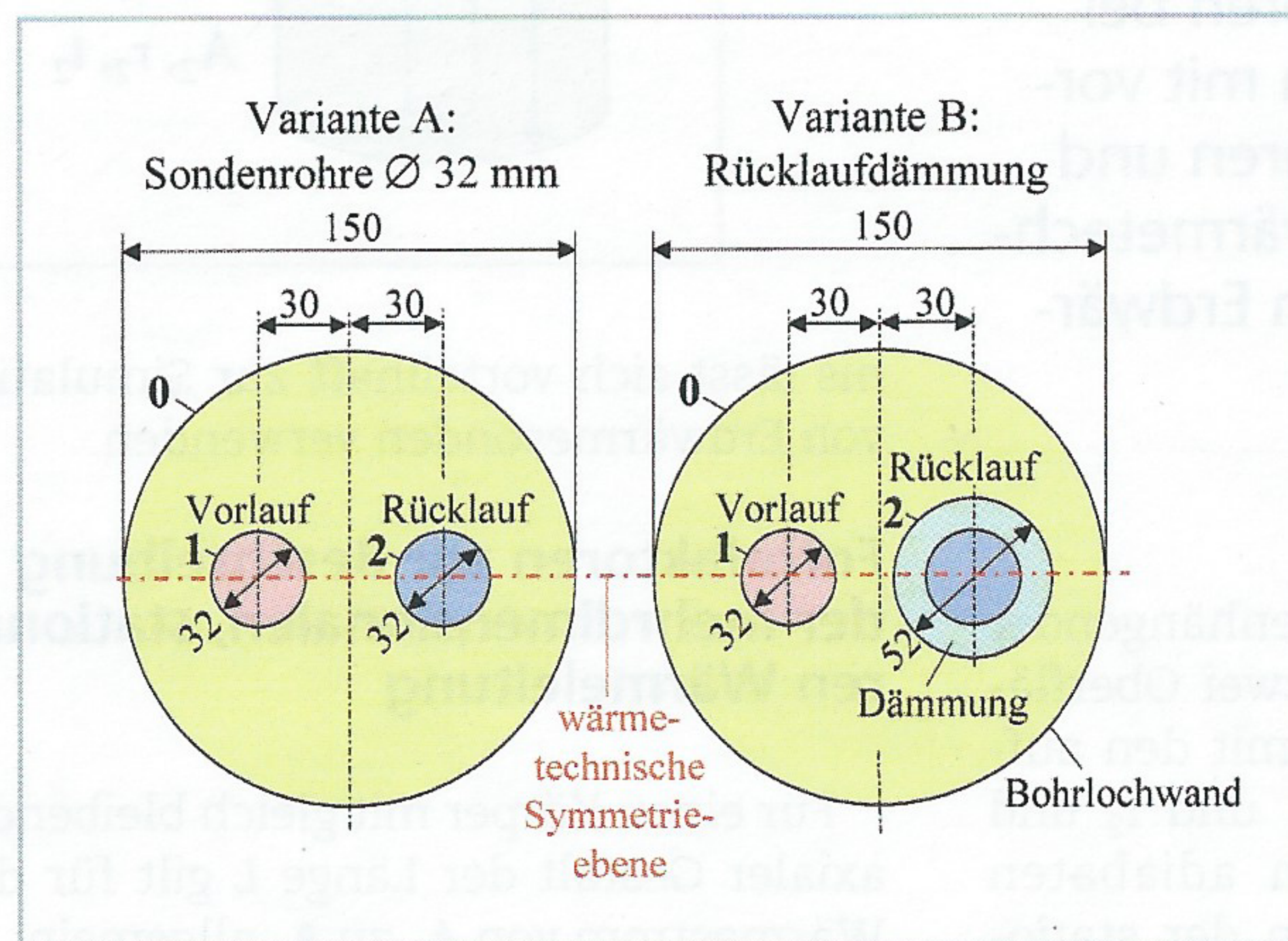


Bild 4

Querschnitte durch die Sondenvarianten A und B (Maße in mm). Variante A zeigt eine üblicherweise eingesetzte U-Rohr-Sonde (sogenannte Einfachsonde). Bei Variante B ist das austretende Rohr (Rücklauf) beispielsweise in der Nähe der Erdoberfläche zusätzlich gedämmt

Hinweis: $\dot{Q}_{10}$ bedeutet, dass der Wärmestrom von der Oberfläche 1 abgegeben wird und das der Wärmestrom mit der Temperaturdifferenz $t_1 - t_0$ zu bilden ist. Ungeachtet von der Bezugstemperaturdifferenz können Teilwärmeströme an die Oberflächen 0 und 2 fließen.

Bei zwei temperierten Flächen ist das dimensionslose Übertemperaturfeld ϑ und somit auch der Differenzialquotient $(\partial \vartheta / \partial n)_1$ am Umfang des Rohres 1 unabhängig von der Temperaturdifferenz $(t_1 - t_2)$ stets gleich, so dass $S = \text{const}$ gilt.

Es ist leicht einzusehen, dass bei drei unterschiedlich temperierten Flächen das Potenzialfeld z. B. vom Verhältnis der Übertemperaturen

$$\Theta = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \quad (13)$$

beeinflusst wird. Somit sind S_{10} und S_{20} von Θ abhängige Größen, also im eigentlichen Sinne keine reinen Formfaktoren mehr.

Hinweis: Selbstverständlich könnte das Verhältnis der Übertemperaturen beispielsweise auch als $\Theta^* = (t_2 - t_0) / (t_1 - t_0)$ definiert werden. Man sollte eine Form wählen, die bei der Nutzung des praktisch infrage kommenden Temperaturbereichs keine Unendlichkeitsstelle (Nenner gleich null) verursacht.

Tabelle 1

Formfaktoren für die Sondenquerschnitte A und B gemäß Bild 4 als Funktion des Übertemperaturverhältnisses Θ (Variante A: S_{10} und S_{20} ; Variante B: S_{10}^* und S_{20}^*)

	Variante A		Variante B	
Θ	S_{10}	S_{20}	S_{10}^*	S_{20}^*
0,5	2,486	4,394	1,402	7,289
1	3,758	3,758	3,472	6,256
2	4,394	2,486	4,507	4,192

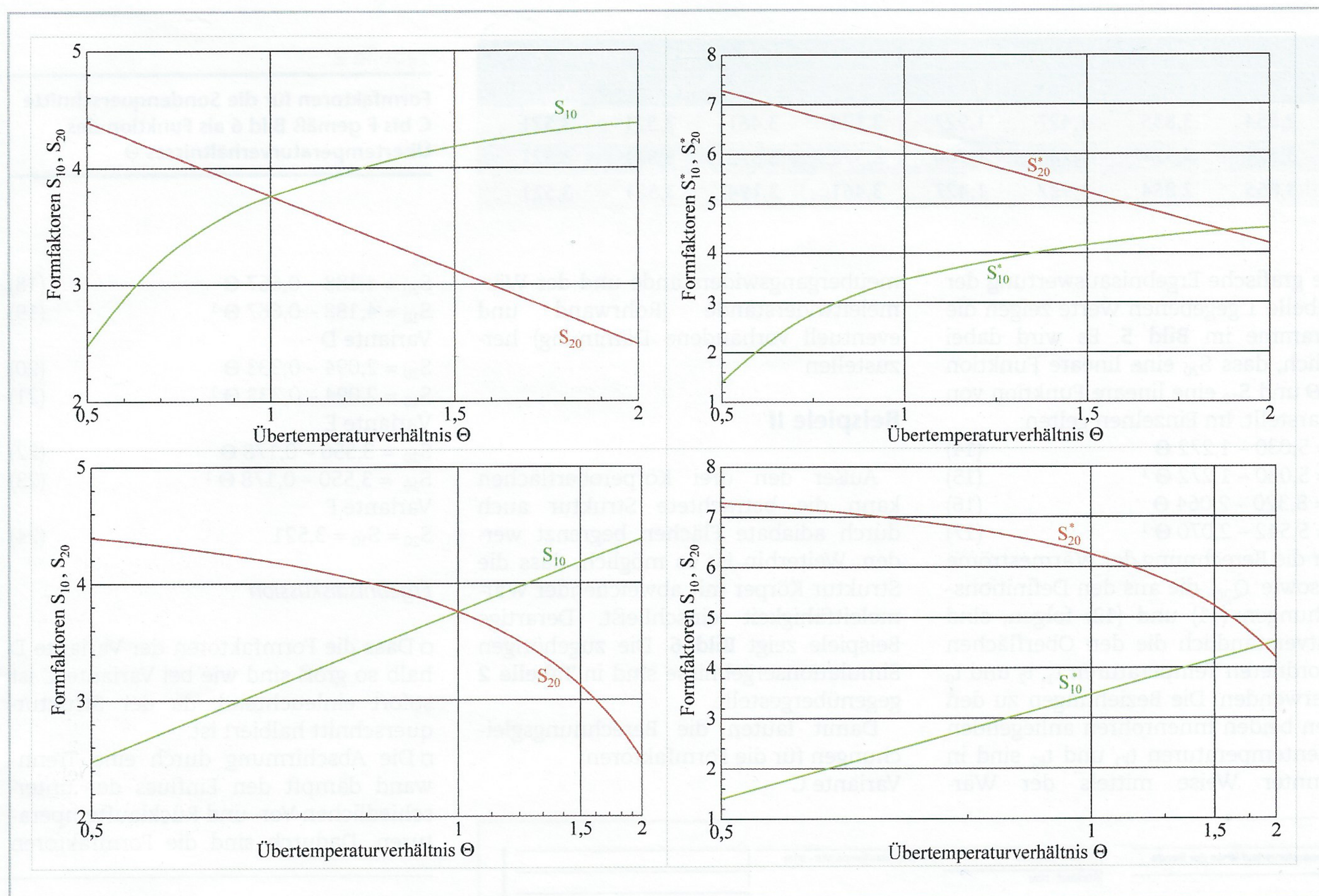


Bild 5

Verläufe der Formfaktoren für die Einfachsonde (Aufbau nach Bild 4) als Funktion des Übertemperaturverhältnisses Θ (Variante A: S_{10} und S_{20} ; Variante B: S_{10}^* und S_{20}^*). Teilung der Abszisse: oben linear; unten reziprok

Pragmatischer Weise bestimmt man für die im Bild 3 dargestellte Struktur mittels numerischer Simulation unter Annahme verschiedener Temperaturen t_1 , t_2 und t_0 die Wärmeströme $\dot{Q}_{10}$ sowie

$\dot{Q}_{20}$, ermittelt nach den Gln. (11) und (12) S_{10} sowie S_{20} und stellt sie als Funktion von Θ dar.

Zur Berechnung der Wärmeströme $\dot{Q}_{10}$ sowie $\dot{Q}_{20}$ können herkömmliche Rechenprogramme, die auf der Grundlage von finiten Differenzenverfahren oder finiten Volumenverfahren arbeiten, eingesetzt werden. Bei den nachfolgenden Betrachtungen wurde ein aus [3] abgeleitetes finite Volumenverfahren für die instationäre Wärmeleitung unter stationären Randbedingungen verwendet. Dabei werden die Wärmeströme zwischen den Nachbarelementen, deren Mittelpunkte ($\equiv$ Gitterpunkte) beider-

seits der Berandungen 0, 1 bzw. 2 liegen, bezogen auf das jeweilige Strukturgebiet summiert. Bei den Simulationen werde stets die Gitterteilung $\Delta x = \Delta y = 0,5$ mm verwendet.

Beispiele I

Es werden verschiedene Rohrquerschnitte – die beispielsweise Erdreichwärmesonden sein könnten – betrachtet (Bild 4).

Die Ergebnisse für die Sondenvarianten A und B sind in der Tabelle 1 für ausgewählte Übertemperaturverhältnisse Θ dargestellt.

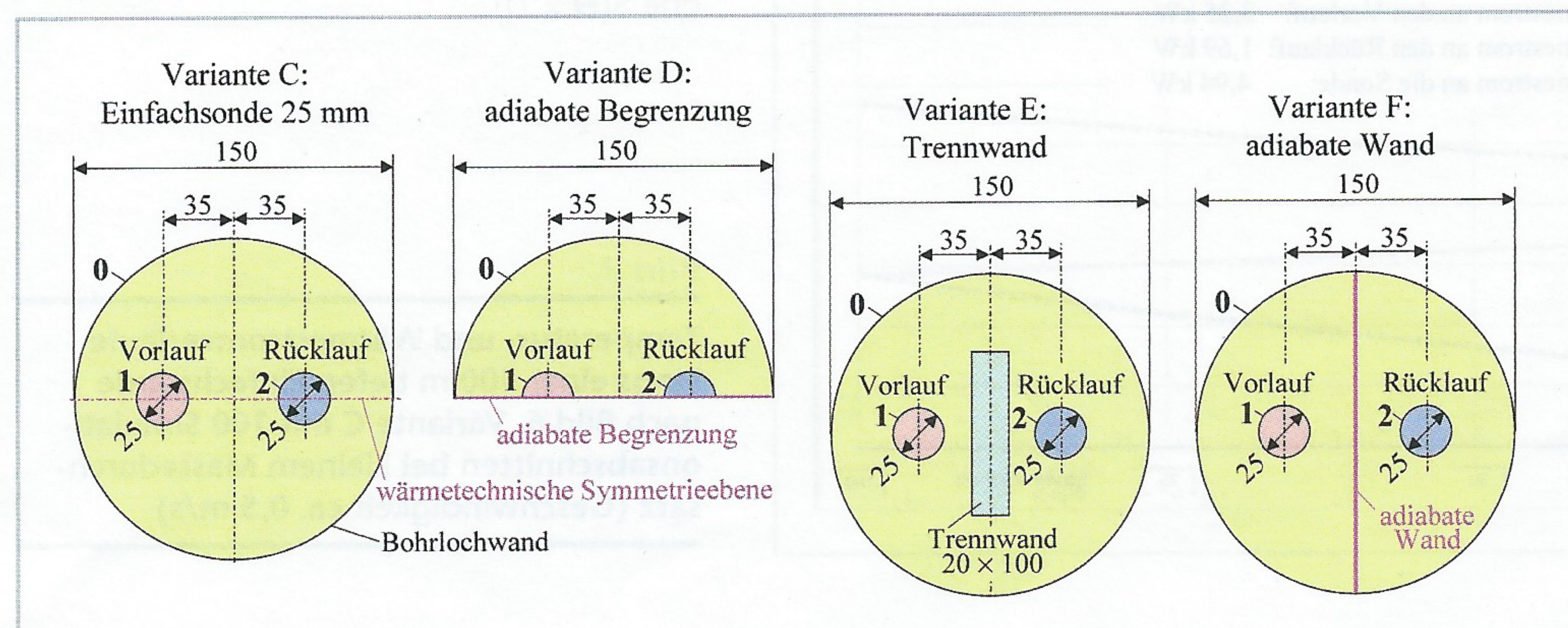


Bild 6

Querschnitte durch die Sondenvarianten C bis F (Maße in mm). Die Varianten C und D sind bezüglich der Temperaturfelder in den beiden Strukturhälften identisch, da die Symmetrieebene lediglich durch eine adiabate Begrenzung dargestellt wird. Bei Variante E ist eine Teilabschirmung zwischen Vor- und Rücklauf installiert. Für die Wärmeleitfähigkeit der Trennwand gilt $\lambda_{\text{Trennwand}} = 0,1 \lambda$. Variante F stellt wärmetechnisch eine vollkommene Trennung zwischen dem Vor- und Rücklaufbereich dar

	Variante C		Variante D		Variante E		Variante F	
Θ	S_{10}	S_{20}	S_{10}	S_{20}	S_{10}	S_{20}	S_{10}	S_{20}
0,5	2,854	3,855	1,427	1,927	3,194	3,461	3,521	3,521
1	3,521	3,521	1,760	1,760	3,372	3,372	3,521	3,521
2	3,855	2,854	1,927	1,427	3,461	3,194	3,521	3,521

Die grafische Ergebnisauswertung der in Tabelle 1 gegebenen Werte zeigen die Diagramme im **Bild 5**. Es wird dabei deutlich, dass S_{20} eine lineare Funktion von Θ und S_{10} eine lineare Funktion von Θ^{-1} darstellt. Im Einzelnen gelten:

$$S_{20} = 5,030 - 1,272 \Theta \quad (14)$$

$$S_{10} = 5,030 - 1,272 \Theta^{-1} \quad (15)$$

$$S_{20}^* = 8,320 - 2,064 \Theta \quad (16)$$

$$S_{10}^* = 5,542 - 2,070 \Theta^{-1} \quad (17)$$

Für die Berechnung der Wärmeströme $\dot{Q}_{10}$ sowie $\dot{Q}_{20}$, die aus den Definitionsgleichungen (11) und (12) folgen, sind selbstverständlich die den Oberflächen zugeordneten Temperaturen t_1 , t_2 und t_0 zu verwenden. Die Beziehungen zu den in den beiden Innenrohren anliegenden Medientemperaturen t_{F1} und t_{F2} sind in bekannter Weise mittels der Wär-

meübergangswiderstände und der Wärmeleitwiderstände (Rohrwand und eventuell vorhandene Dämmung) herzustellen.

Beispiele II

Außer den drei Körperoberflächen kann die betrachtete Struktur auch durch adiabate Flächen begrenzt werden. Weiterhin ist es möglich, dass die Struktur Körper mit abweichender Wärmeleitfähigkeit einschließt. Derartige Beispiele zeigt **Bild 6**. Die zugehörigen Simulationsergebnisse sind in **Tabelle 2** gegenübergestellt.

Damit lauten die Berechnungsgleichungen für die Formfaktoren: Variante C

Tabelle 2

Formfaktoren für die Sondenquerschnitte C bis F gemäß Bild 6 als Funktion des Übertemperaturverhältnisses Θ

$$S_{20} = 4,188 - 0,667 \Theta \quad (18)$$

$$S_{10} = 4,188 - 0,667 \Theta^{-1} \quad (19)$$

Variante D

$$S_{20} = 2,094 - 0,333 \Theta \quad (20)$$

$$S_{10} = 2,094 - 0,333 \Theta^{-1} \quad (21)$$

Variante E

$$S_{20} = 3,550 - 0,178 \Theta \quad (22)$$

$$S_{10} = 3,550 - 0,178 \Theta^{-1} \quad (23)$$

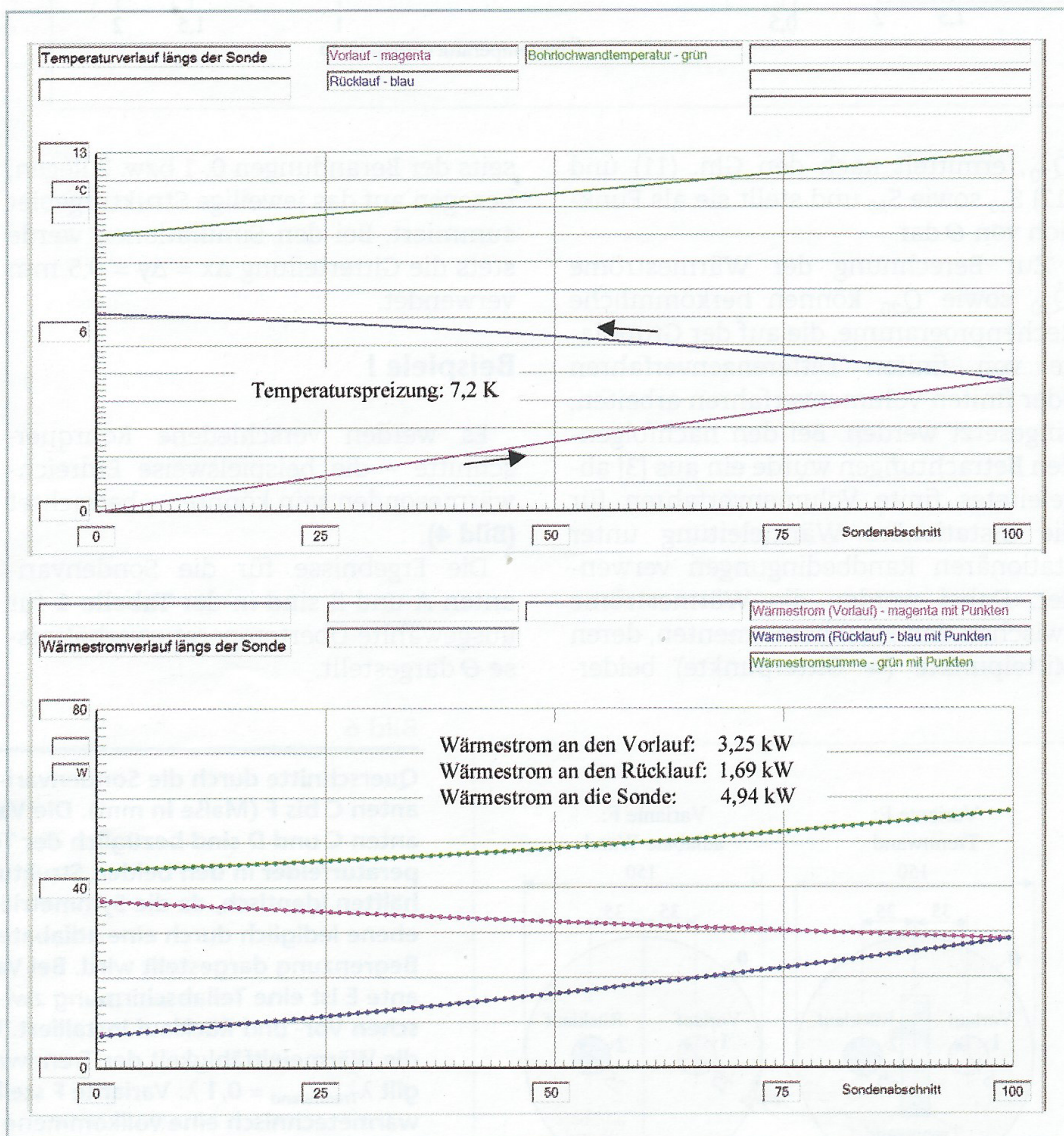
Variante F

$$S_{20} = S_{10} = 3,521 \quad (24)$$

Ergebnisdiskussion

□ Dass die Formfaktoren der Variante D halb so groß sind wie bei Variante C ist sofort einleuchtend, da der Strukturquerschnitt halbiert ist.

□ Die Abschirmung durch eine Trennwand dämpft den Einfluss der unterschiedlichen Vor- und Rücklauftemperaturen. Dadurch sind die Formfaktoren



Edelstahlheizkörper

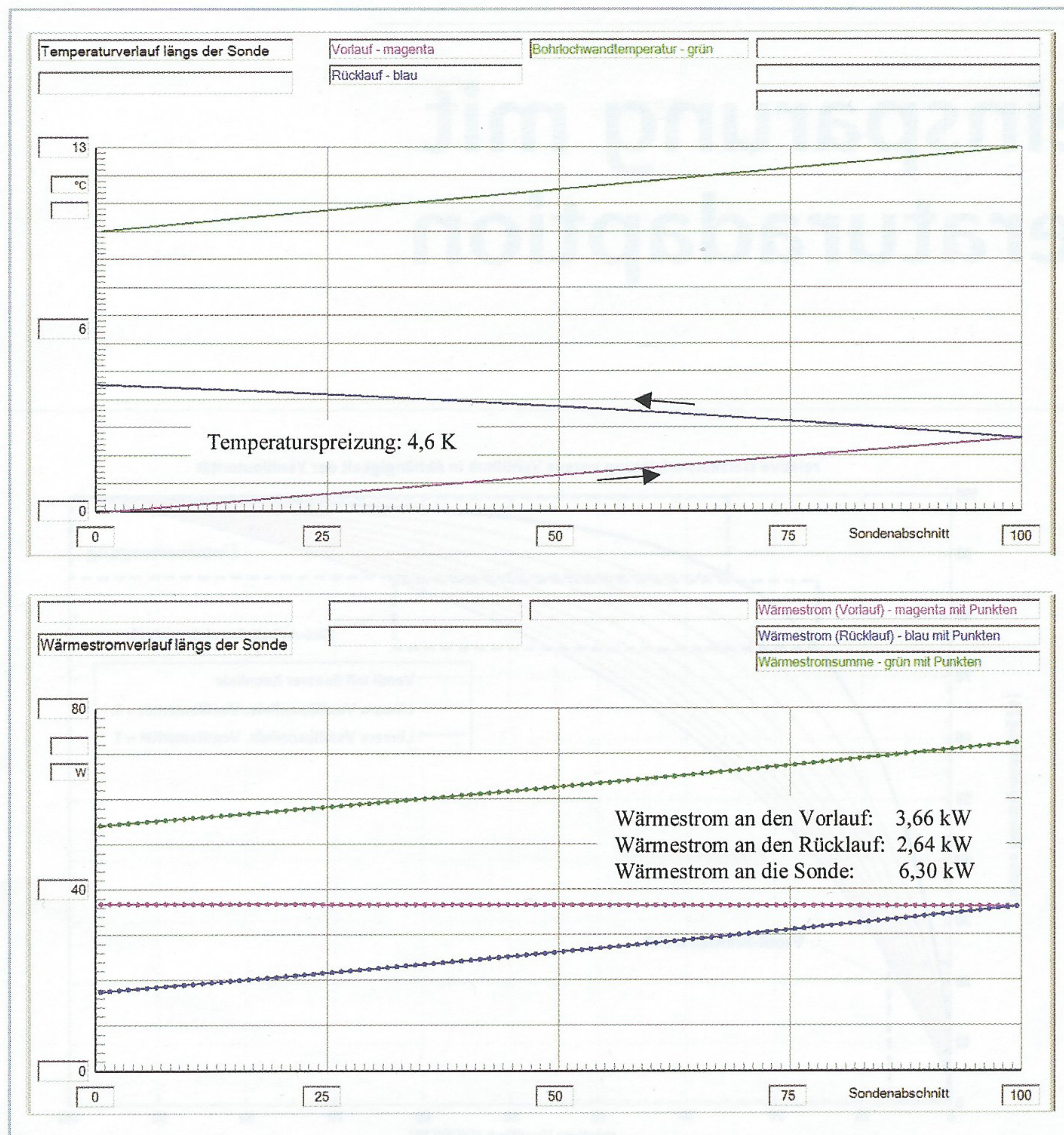


www.va-therm.com
Fon 07121 310 797

weniger temperaturabhängig. Der Wärmeaustausch zwischen den Innenrohren und dem Hüllrohr (z.B. der Bohrlochwand) ist aber kleiner als bei Variante C, da die Trennwand mit der geringeren Wärmeleitfähigkeit den Wärmeleitwiderstand der Struktur erhöht (vergleiche $S(\Theta = 1)$).

Bild 7

Temperatur- und Wärmestromverläufe längs einer 100 m tiefen Einfachsonde nach Bild 6, Variante C mit 100 Simulationsabschnitten bei kleinem Massedurchsatz (Geschwindigkeit ca. 0,5 m/s)



□ Die adiabate Wand bei Variante F unterbindet den gegenseitigen Temperatureinfluss der Innenrohre völlig. Es liegt somit eine Struktur mit nur jeweils zwei Oberflächen vor, weshalb die Formfaktoren temperaturunabhängig gelten. Die Werte sind den Formfaktoren der Variante C für $\Theta = 1$ identisch, da dort ein symmetrisches Temperaturfeld existiert. Hierbei würde eine dünne, adiabate Wand keinen Einfluss nehmen.

Aus den Formfaktoren allein kann beispielsweise nicht auf die Wärmeleistung einer Erdreichwärmesonde geschlossen werden. Um dies zu ermöglichen, sind der Mediendurchfluss, die Eintrittstemperatur sowie die höhenabhängige und in der Regel leistungsabhängige Bohrlochwandtemperatur zu beachten. Dies setzt eine abschnittsweise Berechnung der annähernd quasistationären Zustände voraus. Bei der Vielzahl der sich wiederholenden Rechenschritte ist das Verwenden von Formfaktoren sehr vorteilhaft gegenüber einer kompletten Simulation der Struktur über die gesamte Sondenlänge. Die **Bilder 7 und 8** zeigen

beispielhaft Simulationsergebnisse für eine Sonde nach Bild 6, Variante C bei Variation des Durchsatzes unter sonst gleichen Randbedingungen und bei Nutzung der Gln. (18) und (19).

Das Einbeziehen von Füllkörpern mit abweichender Wärmeleitfähigkeit von der Grundstruktur, wie beispielsweise bei Vorhandensein einer Trennwand (Bild 6, Variante E), ermöglicht auch grundsätzlich veränderte Definitionen. So wäre es denkbar, die Wärmeleitwiderstände der Rohrwandung und ihrer zusätzlichen Dämmschicht (z.B. Bild 4, Variante B) in die Formfaktoren zu integrieren. Als Bezugstemperaturen müssten dann die inneren Rohrwandtemperaturen bei der Ermittlung der dimensionslosen Übertemperatur verwendet werden.

Fazit

Das Einbeziehen von drei Körperoberflächen mit aufgeprägten, unterschiedlichen Temperaturen, das Beachten von beliebig vielen Füllkörpern mit vorgege-

Bild 8

Temperatur- und Wärmestromverläufe längs einer 100 m tiefen Einfachsonde nach Bild 6, Variante C mit 100 Simulationsabschnitten bei großem Massedurchsatz (Geschwindigkeit ca. 1 m/s)

benen Wärmeleitfähigkeiten innerhalb der Struktur und die Berücksichtigung von adiabaten Körperbegrenzungen ermöglicht es, eine Vielzahl von Konstruktionsvarianten vereinfacht mit Formfaktoren S_{xy} , die nur von einer dimensionslosen Übertemperatur Θ abhängig sind, wärmetechnisch unter stationären Randbedingungen zu untersuchen. Da viele wärmetechnische Teilprozesse als quasistationär betrachtet werden können, vergrößert sich die Anwendungsmöglichkeit der Formfaktoren mitunter noch beträchtlich.

Abschließend sei auch die direkte Wärmestromermittlung mit den Koeffizienten der Formfaktoren erwähnt. Aus den allgemeinen Beziehungen

$$S_{10} = a_1 + b_1 \Theta^{-1} \text{ und } S_{20} = a_2 + b_2 \Theta \text{ folgen:}$$

$$\dot{Q}_{10} = [a_1 (t_1 - t_0) + b_1 (t_2 - t_0)] \lambda L \text{ bzw.}$$

$$\dot{Q}_{20} = [a_2 (t_2 - t_0) + b_2 (t_1 - t_0)] \lambda L \quad (25)$$

Literatur

- [1] Hahne, E., Grigull, U.: Formfaktor und Formwiderstand der stationären mehrdimensionalen Wärmeleitung, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 18, pp. 751–767, Pergamon Press 1975.
- [2] Hahne, E.: VDI-Wärmeatlas (Abschnitt: Zweidimensionale Wärmeleitung), 9. Auflage. Düsseldorf: VDI-Verlag 2002.
- [3] Glück, B.: Wärmespeicher als mediendurchströmter Festkörper. Bericht der RUD. OTTO MEYER – Umwelt – Stiftung, Hamburg 2006. Kostenlos erhältlich unter: <http://www.rom-umwelt-stiftung.de> (=> Arbeit bisher => Projekt 14, Teil 3); Detailaufruf: http://www.rom-umwelt-stiftung.de/arbbisher/pdf/Glueck_Bericht_Waermespeicher.pdf