

Berechnungsmodell

Raumlüftung unter instationären Bedingungen bei Vorhandensein von stabilen und sich dynamisch entwickelnden Schadstoffen

Für Schadstoffe, die einer dynamischen Entwicklung (Vermehrung oder Zerfall) unterliegen, existieren in Verbindung mit einer instationären Raumlüftung keine allgemeingültigen Berechnungsvorschriften. Diese Schadstoffe, wie beispielsweise Viren (die an in der Raumluft schwebende Aerosolpartikel gebunden sind und im Laufe der Zeit inaktiv werden), Bakterien (die sich bei bestimmten Raumtemperaturen und -feuchten mit zunehmender Zeit intensiv vermehren können) oder radioaktive Isotope (die nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten zeitabhängig zerfallen) sind derzeit gerade für die Gesundheit in Aufenthaltsräumen bedeutungsvoll.

TEXT: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück

Die Festlegung des Luftvolumenstromes bei Lüftungsanlagen erfolgt nach Normenvorgaben (hygienische Forderungen, Außenluftstraten), nach den auftretenden Luftverunreinigungen (Schadstofflasten) und nach den thermischen Lasten im Raum (Heiz- und Kühllasten). Bei Klimaanlage sind zusätzlich die Feuchtelasten zu beachten. Die Kompensation der Heiz-, Kühl- und Feuchtelasten ist hauptsächlich für den behaglichen Aufenthalt im Raum relevant. Dies ist nicht Gegenstand der vorliegenden Betrachtungen.

Da die Normenforderungen in der Regel und die Schadstoffbegrenzungen grundsätzlich auf zulässigen Raumluftkonzentrationen basieren, ist die Kenntnis über den Zusammenhang von

Luftvolumenstrom durch den Raum und die Schadstoffkonzentration im Raum von gesundheitlich dominanter Bedeutung.

Bei der Lüftung eines Raumes ist nicht immer ein stationärer Betrieb realisierbar. Einerseits kann sich nach einem vorgegebenen Zeitschema der Luftvolumenstrom und andererseits zeitabhängig der Schadstoffeintrag ändern. Damit liegen im allgemeinen Fall instationäre Betriebsbedingungen vor. Gemäß der üblichen theoretischen Betrachtungen gilt die Annahme, dass die Luft im Raum zu jedem Zeitpunkt vollkommen durchmischt ist (Verdünnungs- oder Mischlüftung). Da die Lüftungseffektivität systemabhängig ist, könnte ihre eventuelle Wirkung nachrangig Berücksichtigung finden. Dies ist auch die derzeitige Praxis (DIN EN 16798-3).

Bei den Schadstoffen sind mindestens zwei unterschiedliche Arten zu beachten.

Stabil bleibende Schadstoffe

Hierunter sind solche zu verstehen, die während der Betrachtungszeit keine Veränderungen erfahren. Am bekanntesten bei der Raumlüftung ist beispielsweise das CO_2 , welches deshalb auch als Qualitätsmarker verwendet wird. Für die Bilanz in der Raumluft kann die folgende Differenzialgleichung angeschrieben werden.

Für den infinitesimal kleinen Zeitraum $d\tau$ gilt die Schadstoffbilanz

$$\underbrace{\dot{V} k_{\text{Zu}} d\tau}_{\text{Schadstoffeintrag durch Zuluft}} + \underbrace{\dot{V}_S d\tau}_{\text{Schadstoffproduktion im Raum (Quelle)}} - \underbrace{\dot{V} k d\tau}_{\text{Schadstoffabfuhr durch Abluft}} = \underbrace{V dk}_{\text{Schadstoffzunahme in der Raumluft}} \quad (1)$$

wobei $\dot{V}$ den Luftvolumenstrom durch den Raum (Zuluftstrom $\equiv$ Abluftstrom), $\dot{V}_S$ den Schadstoffvolumenstrom, V das Raumvolumen, k_{Zu} die Schadstoffkonzentration in der Zuluft und k die Schadstoffkonzentration in der Raumluft darstellen.

Die Differenzialgleichung ist mittels Trennung der Variablen relativ leicht lösbar. Beträgt zu Beginn τ_1 die Konzentration k_1 , so stellt sich am Ende des betrachteten Zeitabschnittes τ_2 die Konzentration k_2 ein:

$$k_2 = \left((k_1 - k_{\text{Zu}}) - \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}} \right) e^{-\frac{\dot{V}}{V}(\tau_2 - \tau_1)} + \frac{\dot{V}_S}{\dot{V}} + k_{\text{Zu}} \quad (2)$$

Diese Zusammenhänge sind allgemein bekannt. Einzelheiten finden sich beispielsweise in [1]. So auch spezielle Umformungen und Grenzwertbetrachtungen für den stationären Betrieb und abgeschaltete Lüftung. Oftmals wird auch mit der Größe Luftwechsel β (Luftwechsel/Stunde) gearbeitet, wobei $\dot{V} = \beta V$ gilt. Weiter gibt es Vereinfachungen für Versammlungsräume, wo die CO_2 -Abgabe nur durch Personen erfolgt.

Zusammensetzung realer Betriebsverläufe

Im praktischen Betrieb werden in der Regel die verschiedensten zeitlichen Abläufe bezüglich Schadstoffeintrag und Größe des Luftvolumenstromes vorkommen. So können beispielsweise auftreten: periodische Vorgänge, über längere Zeiträume nahezu stationäre Betriebszustände, Fenster-Stoßlüftungen, zeitbegrenzte Schadstoffeinträge bei Labortätigkeiten und/oder bei Herstellungsprozessen in Werkhallen und so weiter.

Diese unterschiedlichen Konstellationen werden aneinandergereiht längs eines Zeitstrahles τ betrachtet. Für die einzelnen Betriebsintervalle i gelten die beschriebenen Darlegungen und somit Gleichung 2. Damit sind jeweils τ_1 und k_1 am Intervallbeginn sowie τ_2 und k_2 am Intervallende gemäß **Bild 1** definiert. Bei der Intervallreihung sind die entsprechenden Verknüpfungen vorzunehmen. Beispielsweise gilt: $k_2(i=5) \equiv k_1(i=6)$. Im Rechenprogramm I wird dies automatisch organisiert. Das Rechenprogramm I sowie parallele Handrechnungen sind in [1] ausführlich dargestellt.

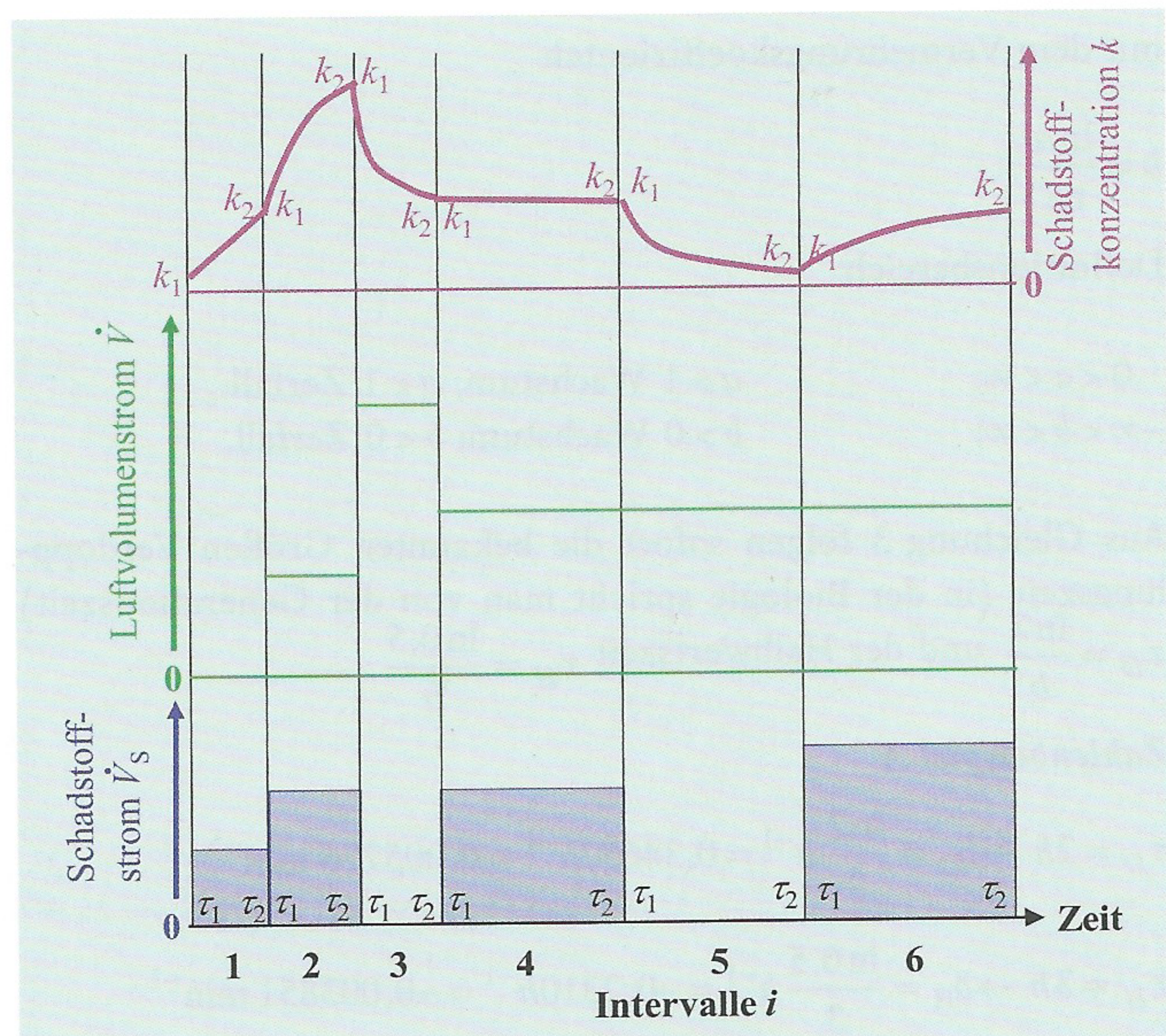


Bild 1: Einteilung von Intervallen mit jeweils konstanten Volumenströmen.
Grafik: Glück

Dynamisch wachsende/zerfallende Schadstoffe

Hier handelt es sich beispielsweise um

- Viren, die an in der Raumluft schwebende Aerosolpartikel gebunden sind und im Laufe der Zeit inaktiv werden
- Bakterien, die sich bei bestimmten Raumtemperaturen und -feuchten mit zunehmender Zeit intensiv vermehren können
- radioaktive Isotope, die nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten zeitabhängig zerfallen.

Die für den Prozess geltenden Partikeldaten sind:

- $\dot{P}$ emittierender Partikelstrom in die Raumluft (zum Beispiel Aerosolpartikelanzahl pro h, die der Raumluft zugeführt werden)
- k_{Zu} Konzentration der Partikel in der zugeführten Luft (zum Beispiel Außenluft oder Luft aus einem Luftreinigungsgerät)
- k Konzentration der Partikel in der Raumluft als Zeitfunktion (zum Beispiel Bakterienzahl pro m^3 Luft oder virenbeladene Aerosolpartikel pro m^3 Luft oder Isotope pro m^3 Luft)

Die funktionellen Zusammenhänge des Wachstums oder des Zerfalls ($\equiv$ negatives Wachstum) gehen stets von einer Anfangsgröße A ($\equiv$ Bestandsgröße) aus und sind Zeitfunktionen $f(\tau)$. Theoretisch kann es sich bei den Zeitfunktionen um vielfältige mathematische Approximationen der Realität handeln, beispielsweise um lineare, quadratische oder exponentielle. Im Weiteren werden Exponentialfunktionen, die in der Natur das Geschehen am häufigsten realistisch abbilden, betrachtet. Es gilt $k(\tau) = k_0 a^{\tau}$, wobei von der Anfangsgröße k_0 ausgegangen wird. Da der Exponent dimensionslos sein muss, erfolgt die Division durch die bei der Berechnung verwendete Zeiteinheit τE (zum Beispiel 1 h). Weiterhin gilt die Umformung

$$k(\tau) = k_0 a^{\frac{\tau}{\tau E}} = k_0 e^{\frac{\tau}{\tau E} \ln a} = k_0 e^{b\tau} \quad (3)$$

mit dem Vermehrungskoeffizienten

$$b = \frac{\ln a}{\tau E}$$

Definitionsbereich:

$$\begin{aligned} 0 < a < \infty; & a > 1 \text{ Wachstum; } a < 1 \text{ Zerfall} \\ -\infty < b < \infty; & b > 0 \text{ Wachstum; } b < 0 \text{ Zerfall} \end{aligned}$$

Aus Gleichung 3 folgen sofort die bekannten Größen Verdopplungszeit (in der Biologie spricht man von der Generationszeit) $\tau_D = \frac{\ln 2}{b}$ und der Halbwertszeit $\tau_H = \frac{\ln 0,5}{b}$.

Zahlenbeispiel A

$$\tau_D = 2h \rightarrow b_D = \frac{\ln 2}{2} h^{-1} = 0,34657 h^{-1} = 0,005776 \text{ min}^{-1}$$

$$\tau_H = 3h \rightarrow b_H = \frac{\ln 0,5}{3} h^{-1} = -0,2310 h^{-1} = -0,003851 \text{ min}^{-1}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit ergibt sich als die 1. Ableitung nach der Zeit zu $k' = k_0 b e^{b\tau}$.

Ist $b > 0$ so kann $k(\tau)$ über alle Grenzen hinaus wachsen ($k \rightarrow \infty$).

Bei verschiedenen Vorgängen kann jedoch ein Wendepunkt in der Wachstumskurve auftreten, so zum Beispiel wenn Platz- oder Nahrungsbegrenzungen existieren. Die Wachstumskurve wird sich dann einer Sättigung asymptotisch nähern. Andererseits kann das Wachstum mit einer Vergiftungsstrategie von einem Zerfallsprozess überlagert werden.

Ist $b < 0$ so wird $k(\tau)$ gegen Null gehen ($k \rightarrow 0$).

Bei biologischen Prozessen bedeutet das Unterschreiten von 1 das Aussterben, da nur ganzzahlige Werte sinnvoll sind.

Bei der Raumlüftung wird Gleichung 3 als uneingeschränkt gültig betrachtet, denn die Begrenzung der Partikelanzahl soll durch eine Abfuhr erreicht werden (Abluft und/oder Luftreinigungsgeräte). Letztere entnehmen belastete Luft und geben weniger belastete zurück. Infolge der Wachstumsgeschwindigkeit k' ist gegenüber Gleichung 1 die Differenzialgleichung sehr kompliziert geworden:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\dot{V} k_{Zu} d\tau}_{\text{Partikeleintrag durch Zuluft}} + \underbrace{\dot{P} d\tau}_{\text{emittierte Partikel in den Raum (Quelle)}} - \underbrace{\int V k b e^{b\tau} d\tau}_{\text{Partikelvermehrung}} - \underbrace{\dot{V} k d\tau}_{\text{Partikelabfuhr durch Abluft}} \\ & = \underbrace{V dk}_{\text{Partikelzunahme in der Raumlüftung}} \end{aligned} \quad (4)$$

Im Weiteren wird deshalb mit der Differenzengleichung gearbeitet. Sie ist übersichtlich und leicht verständlich.

τ	Gleichung 3	Gleichung 6
0,5 h	2,7183	2,7183
1,0 h	7,3891	7,3891
2,0 h	54,5982	54,5982

Tabelle 1: Gegenüberstellung der k -Werte

Zunächst ist jedoch das exponentielle Wachstum beziehungsweise der Zerfall rekursiv zu formulieren. Bei einer exponentiellen Folge wächst (beziehungsweise fällt) das Folglied um einen relativen Anteil. Die Änderung zwischen $k_n - k_{n-1}$ ist proportional zum Bestand k_{n-1} . Es gilt das Entwicklungsgesetz in verschiedenen Darstellungen:

$$k_n - k_{n-1} = k_{n-1} G \quad \text{mit Wachstum } G > 0; \text{ Zerfall } G < 0 \quad (5)$$

$$k_n = k_{n-1} (1 + G) = k_{n-1} H \quad \text{mit Wachstum } H > 1; \text{ Zerfall } H < 1. \quad (6)$$

H werde Vervielfältigungsfaktor genannt.

Dass Gleichung 6 dem Verlauf der Exponentialfunktion entspricht, sei nachfolgend für „Ungläubige“ demonstriert. Der mathematische Zusammenhang ist durch Gl. (11) gegeben.

Zahlenbeispiel B: Der analytisch berechnete Wert nach Gleichung 3 liefert für $k_0 = 1$ und $b = 2 h^{-1}$ für die Dauer einer Stunde $k_{1h} = k_0 e^{b\tau} = 1 e^{2 \cdot 1} = 7,3891$. Aus Gleichung 6 folgt für 60 Zeitschritte von je 1 min $k_{60} = k_0 H^{60}$ der Vervielfältigungsfaktor $H = 1,03389...$ Die Gegenüberstellung liefert die k -Werte nach bestimmten Zeiten τ (Tabelle 1).

Ausgehend von der Partikelanzahl im Raum $V k_{n-1}$, die zur Zeit τ_{n-1} im Raum herrscht, ändert sich im Zeitraum $\Delta\tau$ die Partikelanzahl, sodass zur Zeit $\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta\tau$ die Konzentration k_n vorhanden ist. Damit kann die Differenzengleichung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \underbrace{V k_n}_{\text{neue Partikelanzahl}} &= \underbrace{V k_{n-1}}_{\text{alte Partikelanzahl}} + \underbrace{\dot{V} k_{Zu} \Delta\tau}_{\text{Partikeleintrag durch Zuluft}} + \underbrace{\dot{P} \Delta\tau}_{\text{emittierte Partikel in den Raum}} \\ &+ \underbrace{V k_{n-1} G}_{\text{Partikelvermehrung}} - \underbrace{\dot{V} k_{n-1} \Delta\tau}_{\text{Partikelabfuhr durch Abluft}} \end{aligned} \quad (7)$$

Da außer der Partikelvermehrung noch weitere Partikeländerungen durch die Lüftung und den Partikeleintrag auftreten ist beim Vermehrungsterm zunächst der Wachstumsfaktor G nach Gleichung 5 zu verwenden.

Die Umformung der Gleichung und die Festlegung der zu verwendenden Einheiten liefert dann die zugeschnittene Berechnungsgleichung für den Zeitschritt $\Delta\tau = 1 \text{ min}$ mit $\dot{V}$ in m^3/h , $\dot{P}$ in Partikel/h und mit dem Vervielfältigungsfaktor H nach Gleichung 6 bezogen auf $\Delta\tau = 1 \text{ min}$:

$$k_n = k_{n-1} H + \frac{\dot{V}}{V} (k_{Zu} - k_{n-1}) \frac{1}{60} + \frac{\dot{P}}{V} \frac{1}{60} \quad (8)$$

Durch Substitution der Luftwechselzahl β in h^{-1} kann auch $\dot{V} = \beta V$ geschrieben werden.

Bereitstellung der Wachstumsdaten

Realistisch ist die praktische Messung des Wachstums bei abgestellter Lüftung $\dot{V} = 0$ und Partikelstrom $\dot{P} = 0$. Besser ist natürlich die Bestimmung unter Laborbedingungen.

Ist die Zeitschrittweite $\Delta\tau = 1 \text{ min} = 1/60 \text{ h}$, so gelten für eine beliebige Vervielfältigungszeit

$$\tau_V = n_V \Delta\tau \rightarrow \text{Zahl der Zeitschritte } (\equiv \text{Minuten}): n_V = \frac{\tau_V}{\Delta\tau} \quad (9)$$

Ist die Gesamtvervielfältigung H_{gesamt} , so beträgt der gesuchte Vervielfältigungsfaktor

$$H = H_{\text{gesamt}}^{n_V} = H_{\text{gesamt}}^{\frac{\tau_V}{\Delta\tau}} \quad (10)$$

Zahlenbeispiel C: $\tau_V = 2 \text{ h}$; $H_{\text{gesamt}} = 2,5$ (fache Anzahl der Partikel gegenüber Beginn)

$$H = H_{\text{gesamt}}^{\frac{\Delta\tau}{\tau_V}} = 2,5^{\frac{1}{2 \cdot 60}} = 1,00766$$

Entsprechend gelten bei Vorgabe der

- Verdopplungszeit $\tau_{V,\text{Verdopplung}}$ in h mit $H_{\text{gesamt}} = 2$:

$$H = 2^{\frac{1}{60\tau_{V,\text{Verdopplung}}}} > 1$$

- Halbwertszeit $\tau_{V,\text{Halbwert}}$ in h mit $H_{\text{gesamt}} = 0,5$:

$$H = 0,5^{\frac{1}{60\tau_{V,\text{Halbwert}}}} < 1$$

Selbstverständlich kann auch aus dem bekannten Vermehrungskoeffizient b der Vervielfältigungsfaktor H bestimmt werden. In Gleichung 3 galt $k(\tau) = k_0 e^{b\tau}$. Es gilt für die allgemeine Vervielfältigungszeit τ_V in Verbindung mit der umgeformten Gleichung 10:

$$e^{b\tau_V} = H_{\text{gesamt}} = H^{\frac{\tau_V}{\Delta\tau}}$$

$$H = e^{b\Delta\tau} \rightarrow \text{für kleine Exponenten gilt } H \approx 1 + b\Delta\tau. \quad (11)$$

Zahlenbeispiel D: Es gelten mit den Werten aus dem Zahlenbeispiel A und für $\Delta\tau = 1 \text{ min}$:

$$b_D = 0,005776 \text{ min}^{-1} \rightarrow H = e^{b_D \Delta\tau} = 1,00579 \rightarrow H^{120} = 2$$

$$b_H = 0,003851 \text{ min}^{-1} \rightarrow H = e^{b_H \Delta\tau} = 0,99616 \rightarrow H^{180} = 0,5.$$

Wie man erkennt, ist die Bereitstellung der Ausgangswerte zur Berechnung für das exponentielle Wachstum (Zerfall) für die rekursiv arbeitende Differenzengleichung sehr einfach.

Zusammensetzung realer Betriebsverläufe

Auch im zweiten Fall gilt die gleiche Organisation wie im Fall der stabilen Schadstoffe (Bild 1). Da Gleichung 8 aber rekursiv abgearbeitet werden muss, ist das Rechenprogramm II erstellt worden. Die einzelnen Intervalle i werden deshalb jeweils in n Berechnungsschritte ($\Delta\tau = 1 \text{ min}$) unterteilt (Bild 2).

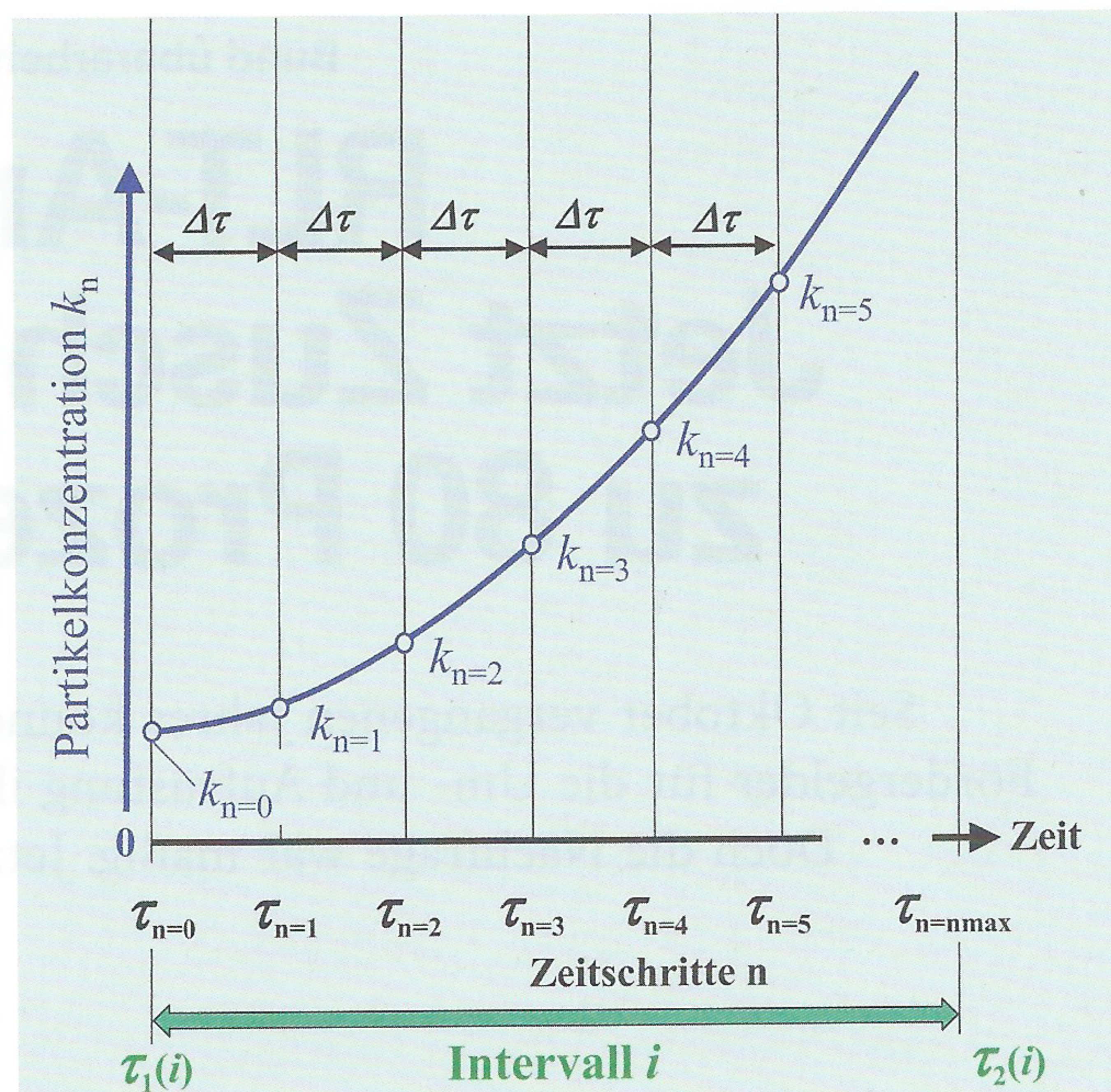


Bild 2: Veränderungen der Partikelkonzentrationen k_n in Abhängigkeit von τ_n innerhalb eines beliebigen Intervalls i gemäß Bild 1. Grafik: Glück

Persönliche Anmerkung

Da der Autor aufgrund seines Alters nicht mehr über die aktuellen Dinge des Fachgebietes informiert ist, hat er in den letzten Jahren nicht mehr veröffentlicht. In derzeitigen Artikeln zum Infektionsrisiko durch Aerosolpartikel fiel ihm aber auf, dass offenbar kein Modell existiert, welches den zeitlichen Zerfall der Partikel bei gleichzeitigem Betrieb von Lüftungsanlagen physikalisch richtig darstellt. So wurde beispielsweise die Inaktivierung der Partikel durch eine Abschwächung der Quellstärke approximiert. Das heißt, die in der Lüftungstechnik übliche Gleichung 2 zur Bestimmung des zeitlichen Konzentrationsverlaufs bedarf einer grundlegenden Ergänzung für sich dynamisch entwickelnde Schadstoffe. Der Autor hofft, dass die vorliegende Abhandlung fehlerfrei ist und eventuell zu weiteren Überlegungen beziehungsweise Ergänzungen beiträgt. ■

WEITERE INFORMATIONEN

Beide Rechenprogramme mit Beispielen, ausführlichen Beschreibungen und Ableitungen, die im vorliegenden Artikel aus Platzgründen nur verkürzt dargelegt wurden, sind kostenlos auf der Webseite [1] verfügbar.

LITERATUR

[1] <http://berndglueck.de/lueftung.php>

Prof. Dr.-Ing. habil.
Bernd Glück

ist seit 13 Jahren nicht mehr beruflich tätig. Er gestaltet aber noch die umfangreiche Webseite <http://berndglueck.de>.