Bemessung von Sammelbehältern mit diskontinuierlichem Zu- oder Abfluß

Dr.-Ing. B. GLÜCK, Jößnitz (Vogtl.)

Sehr oft sind diskontinuierliche Zuflüsse (z. B. Kondensat) in einem Behälter zu sammeln und in Intervallen durch Pumpen weiterzuleiten (Bild 1). Der analoge Fall kann auch in umgekehrter Richtung auftreten, indem ein Gefäß diskontinuierlich entspeichert wird. Die dabei auftretenden Probleme sind die gleichen:

1. Möglichst geringes Behältervolumen,
2. kein Überschreiten der maximal zulässigen Schalthäufigkeit.

Die Lösung der beiden gegenläufigen Tendenzen stellt ein Randoptimum dar, denn unter Ausnutzung der maximal zulässigen Schalthäufigkeit (n_{max} in h^{-1}) ergibt sich das kleinste notwendige Speichervolumen (ΔV_{min} in m^3).

Im folgenden soll das Mindestspeichervolumen abgeleitet werden: Die Zeitdifferenz ($\Delta\tau$) zwischen zwei Einschaltungen der Pumpe ergibt sich als Summe aus der Förderzeit der Pumpe (τ_F) und der Füllzeit durch den Zufluß (τ_Z). Nach dem Einschalten der Pumpe ist das Speichervolumen und der während des Pumpenbetriebs anfallende Zufluß von der Pumpe zu fördern.

Damit gilt:

$$\tau_F = \frac{\Delta V + \tau_F \cdot \dot{V}_Z}{\dot{V}_F} \quad \text{bzw.} \quad \tau_F = \frac{\Delta V}{\dot{V}_F - \dot{V}_Z}. \tag{1}$$

Die sich daran anschließende Füllzeit bei Pumpenstillstand ergibt sich in einfacher Weise zu

$$\tau_Z = \frac{\Delta V}{\dot{V}_Z}, \tag{2}$$

woraus

$$\Delta\tau = \tau_F + \tau_Z = \frac{\Delta V}{\dot{V}_F - \dot{V}_Z} + \frac{\Delta V}{\dot{V}_Z} \tag{3}$$

folgt.

Unter Beachtung, daß die stündliche Zahl der Schaltungen sich aus $n = 1/\Delta\tau$ errechnet, kann Gl. (3) nach kurzer Umformung

$$n = \frac{\left(1 - \frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F}\right) \cdot \frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F}}{\frac{\Delta V}{\dot{V}_F}} \tag{4}$$

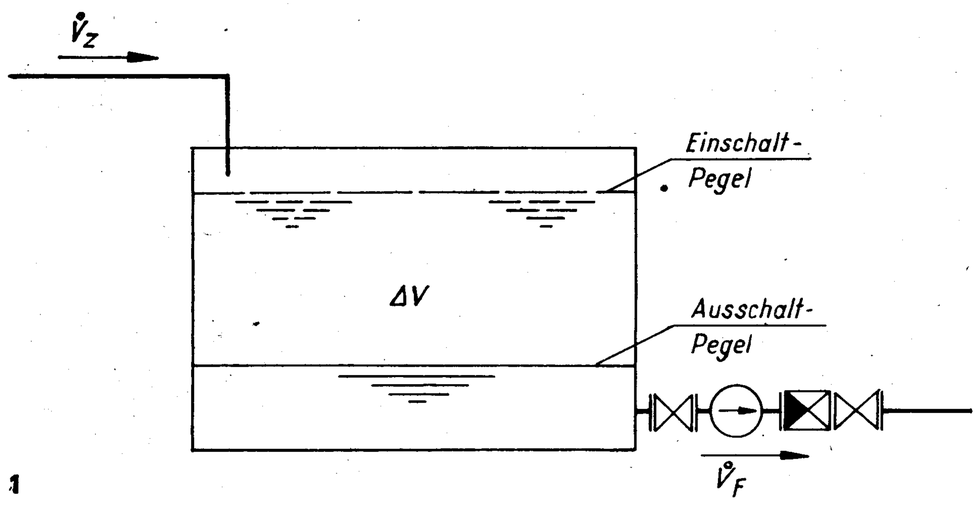
geschrieben werden. Es ist interessant zu wissen, bei welchem Verhältnis ($\dot{V}_Z/\dot{V}_F$) die maximale Schalthäufigkeit auftritt. Es wird deshalb der erste Differentialquotient gebildet und gleich Null gesetzt

$$\frac{dn}{d(\dot{V}_Z/\dot{V}_F)} = \frac{\dot{V}_F}{\Delta V} \cdot \left[1 - \frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F} - \frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F}\right] = 0, \tag{5}$$

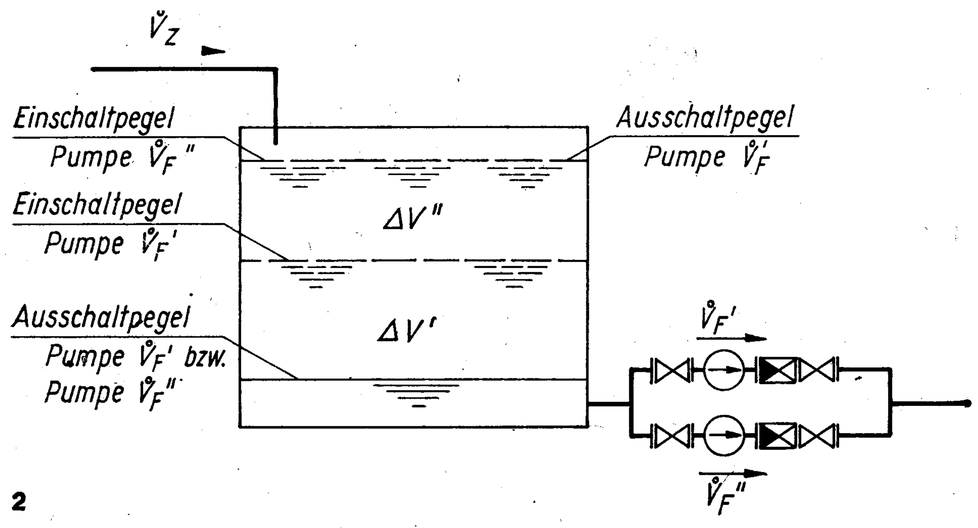
woraus

$$\frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

folgt. Dies bedeutet, daß die größte Schalthäufigkeit dann vorliegt, wenn der Zufluß $\dot{V}_Z$ halb so groß ist wie die Fördermenge der Pumpe $\dot{V}_F$. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses



1



2

in Gl. (4) ergibt sich die maximale Anzahl der stündlichen Schaltungen zu

$$n_{\max} = \frac{\dot{V}_F}{4 \cdot \Delta V_{\min}} \tag{7}$$

Daß es sich dabei um ein Maximum handelt, kann man sich anschaulich erklären und durch die Bildung des zweiten Differentialquotienten auch beweisen.

Zur Bemessung eines Speichers ergibt sich somit folgendes einfaches Verfahren:

1. Die Pumpe und das Rohrleitungssystem sind für den maximalen Zufluß

$$\dot{V}_F = \dot{V}_{Z,\max} \tag{8}$$

auszulegen. Man sollte stets versuchen, soweit als möglich diese Gleichung zu erfüllen, da ein größerer Pumpenförderstrom durch Einsatz einer größeren Pumpe stets größere Speichervolumina bei vorgegebenem $n_{\max}$ erfordert. Stillschweigend gewährte „Sicherheitszuschläge" bei der Druckverlustberechnung führen im praktischen Betrieb zur Überschreitung der vorgegebenen Schalthäufigkeit.

2. Das Speichervolumen berechnet sich auf der Grundlage des Pumpenförderstromes und der zulässigen maximalen Schaltzahl.

$$\Delta V = \frac{\dot{V}_F}{4 \cdot n_{\max}} \tag{9}$$

Das Behältervolumen muß gegenüber dem nutzbaren Speichervolumen entsprechend den technischen Gegebenheiten etwas größer gewählt werden, um Luftansaugen durch die Pumpe bzw. ein Überlaufen zu vermeiden.

Beispiel 1:

Die in einen Sammelbehälter strömende Zuflußmenge schwankt in einem Bereich von $\dot{V}_Z = 0 \cdots 21{,}1\ \mathrm{m^3/h}$. Die maximal zulässige Schalthäufigkeit soll $n_{\max} = 6\ \mathrm{h^{-1}}$ betragen. Es wurde versucht, das Fördersystem (Pumpe — Rohrleitung) so auszulegen, daß der Betriebspunkt möglichst nahe an $\dot{V}_F = \dot{V}_{Z,\max}$ herankommt. Auf Grund der standardisierten Pumpenkennlinien und der gegebenen Rohrdurchmesser ist ein Betriebspunkt $\dot{V}_F = 24\ \mathrm{m^3/h}$ erreicht worden.

Wie groß ist das Speichervolumen zu wählen?

Es ergibt sich Gl. (9) zu

$$\Delta V = \frac{24\ \mathrm{m^3/h}}{4 \cdot 6\ \mathrm{h^{-1}}} = 1\ \mathrm{m^3}$$

Wäre es gelungen, das Fördersystem auf $\dot{V}_F = 21{,}1\ \mathrm{m^3/h}$ auszulegen, so hätten für $\Delta V = 0{,}88\ \mathrm{m^3}$ genügt.

Oft ist es vorteilhaft, das Fördersystem mit zwei Pumpen verschiedener Betriebspunkte $\dot{V}_F'$ und $\dot{V}_F''$ zu bestücken. Der Sammelbehälter wird dann bezüglich der Schaltimpulse in zwei Speichervolumina $\Delta V'$ und $\Delta V''$ unterteilt (Bild 2). Es ergibt sich folgende Betriebsweise: Der leere Speicher wird durch die diskontinuierlichen Zuflüsse bei gleichzeitigem Pumpenstillstand gefüllt. Wenn insgesamt die Menge $\Delta V'$ in den Speicher geflossen ist, schaltet die kleinere Pumpe mit dem Förderstrom $\dot{V}_F'$ und der maximalen Schalthäufigkeit $n'_{\max}$ ein. Ist der Zufluß $\dot{V}_Z < \dot{V}_F'$, so wird sich der Speicher leeren und die Pumpe nach der Betriebszeit τ_F' ausschalten, bei $\dot{V}_Z = \dot{V}_F'$ liegt Dauerbetrieb der Pumpe vor, und bei $\dot{V}_Z > \dot{V}_F'$ füllt sich der Behälter solange, bis das zusätzliche Volumen $\Delta V''$ gespeichert ist. Bei Erreichen dieses Grenzwertes schaltet die kleine Pumpe ab, die größere mit dem Förderstrom $\dot{V}_F''$ und der maximalen Schalthäufigkeit $n''_{\max}$ geht in Betrieb.

Ist $\dot{V}_F'' > \dot{V}_Z$, schaltet die große Pumpe nach der Betriebszeit τ_F'' (Leeren von $\Delta V'$ und $\Delta V''$) aus, bei $\dot{V}_F'' = \dot{V}_Z$ handelt es sich um Dauerbetrieb.

Während für das Fördersystem mit der kleinen Pumpe ($\dot{V}'_F$, $n'_{\max}$) und dem ersten Speicherabschnitt ($\Delta V'$) die in Gl. (9) gezeigte Problematik gilt, ergeben sich für den Betriebszustand $\dot{V}_F' < \dot{V}_Z < \dot{V}_F''$, bei dem die große Pumpe ($\dot{V}_F''$, $n''_{\max}$) und der zweite Speicherabschnitt ($\Delta V''$) zusätzlich eingeschaltet werden, kompliziertere Zusammenhänge. Die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgende Pumpenschaltungen folgt aus der Summe von:

Füllzeit bis zum Einschalten der kleinen Pumpe

$$\tau_Z' = \frac{\Delta V'}{\dot{V}_Z} \tag{10}$$

Betriebszeit der kleinen Pumpe (Füllen des zweiten Speicherabschnittes)

$$\tau_F' = \frac{\Delta V''}{\dot{V}_Z - \dot{V}_F'} \quad \text{bei} \quad \dot{V}_Z > \dot{V}_F' \tag{11}$$

Betriebszeit der großen Pumpe

$$\tau_F'' = \frac{\Delta V' + \Delta V'' + \tau_F'' \cdot \dot{V}_Z}{\dot{V}_F''} \text{ bzw. } \tau_F'' = \frac{\Delta V' + \Delta V''}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z} \tag{12}$$

mit dem Ergebnis

$$\Delta\tau = \tau_Z' + \tau_F' + \tau_F''$$

$$= \frac{\Delta V'}{\dot{V}_Z} + \frac{\Delta V''}{\dot{V}_Z - \dot{V}_F'} + \frac{\Delta V' + \Delta V''}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z} \tag{13}$$

Die zulässige Schalthäufigkeit ist bei großen Aggregaten niedriger als bei kleinen Aggregaten. Setzt man in Gl. (13) $\Delta\tau = 1/n''$ und substituiert für $\Delta V'$ Gl. (9) in modifizierter Schreibweise, so erhält man

$$\frac{1}{n''} = \frac{\dfrac{\dot{V}_F'}{4 \cdot n'}}{\dot{V}_Z} + \frac{\Delta V''}{\dot{V}_Z - \dot{V}_F'} + \frac{\dfrac{\dot{V}_F'}{4 \cdot n'} + \Delta V''}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z} \tag{14}$$

Während $\dot{V}_F'$ entsprechend den Betriebsbedingungen gewählt werden soll, muß $\dot{V}_F''$ gleich dem maximal möglichen Zufluß $\dot{V}_{Z,\max}$ sein. Die zulässigen Schalthäufigkeiten n' und n'' sind technische Vorgaben. Um das $\Delta V''$ nach Gl. (14) zu bemessen, ist das $\dot{V}_Z$ zu ermitteln, bei welchem die größte

Schalthäufigkeit auftritt. Letzteres führt durch Differentiation und gleich Nullsetzen zu folgender Bestimmungsgleichung:

$$\frac{d\,(1/n'')}{d\dot{V}_Z} = -\frac{\dfrac{\dot{V}_F'}{4\cdot n'}}{\dot{V}_Z^2} - \frac{\Delta V''}{(\dot{V}_Z - \dot{V}_F')^2} + \frac{\dfrac{\dot{V}_F'}{4\cdot n'} + \Delta V''}{(\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z)^2} = 0\,. \tag{15}$$

Da die zweite Ableitung eindeutig auf ein Maximum von n'' hinweist, stellen die Gl. (14) und (15) das zu lösende System dar, wobei n' und n'' stets die maximalen Werte darstellen. Es ergeben sich:

$$4\cdot n'\cdot \Delta V'' = \frac{\dfrac{4\cdot n'}{n''} - \dfrac{\dot{V}_F'}{\dot{V}_Z} - \dfrac{\dot{V}_F'}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z}}{\dfrac{1}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z} + \dfrac{1}{\dot{V}_Z - \dot{V}_F'}} \tag{14a}$$

und

$$4\cdot n'\cdot \Delta V'' = \frac{\dfrac{\dot{V}'_F}{\dot{V}_Z^2} - \dfrac{\dot{V}_F'}{(\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z)^2}}{\dfrac{1}{(\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z)^2} - \dfrac{1}{(\dot{V}_Z - \dot{V}_F')^2}}\,, \tag{15a}$$

woraus nach umfangreicher Zwischenrechnung als technisch sinnvolle Lösung

$$x = \frac{8\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^3 - 1}{8\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^2 - 2} + \sqrt{\left(\frac{8\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^3 - 1}{8\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^2 - 2}\right)^2 + \frac{4\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^2 - 8\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^3}{4\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^2 - 1}} \tag{16}$$

mit den Abkürzungen

$$x = \frac{\dot{V}_F''}{\dot{V}_F'} \quad \text{und} \quad y = \frac{\dot{V}_Z}{\dot{V}_F'} \tag{17}$$

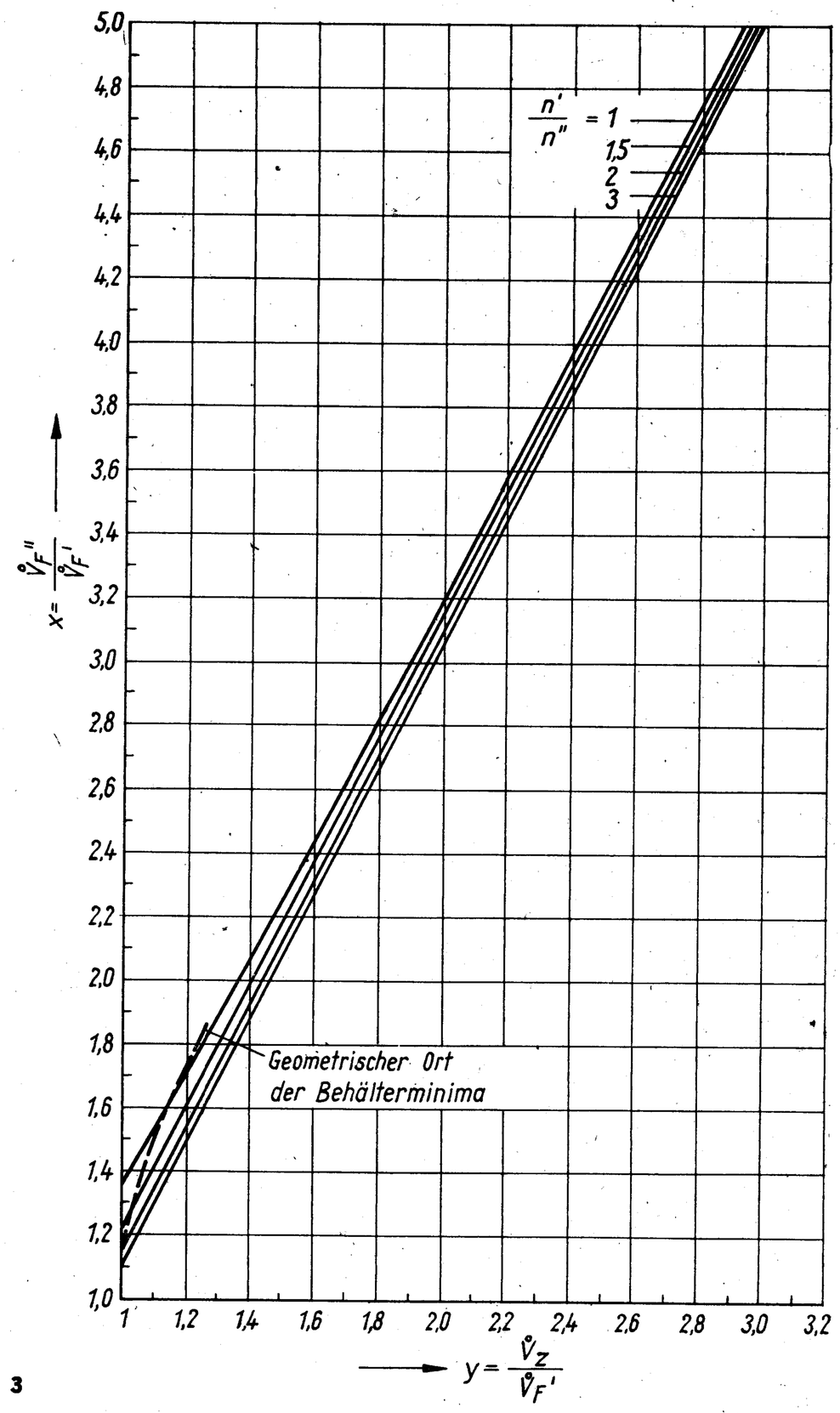
folgt. Die rechentechnisch aufwendige Lösung dieses Zusammenhangs ist im Bild 3 für verschiedene n'/n'' angegeben. Zu jedem vorgegebenen x gehört ein bestimmtes y. Beide Werte in die modifizierte Gl. (14a)

$$\Delta V'' = \Delta V'\cdot\frac{4\cdot\dfrac{n'}{n''} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-1}} \tag{14b}$$

eingesetzt, liefert die Größe des zweiten Speicherabschnittes. Interessant ist noch zu wissen, unter welchen Bedingungen der Speicher $(\Delta V' + \Delta V'')$ das kleinste Volumen annimmt. Ausgehend von der Gleichung

$$\Delta V' + \Delta V'' = \Delta V'\cdot\left(1 + \frac{4\cdot\dfrac{n'}{n''} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-1}}\right) \tag{18}$$

$$\Delta V' + \Delta V'' = \frac{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z}{4\cdot n'}\cdot\frac{4\cdot\dfrac{n'}{n''}(\dot{V}_Z - \dot{V}_F') + \dfrac{\dot{V}_F'^2}{\dot{V}_Z}}{\dot{V}_F'' - \dot{V}_F'} \tag{18a}$$



3

ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{d\,(\Delta V' + \Delta V'')}{d\dot{V}_F'} = \frac{\dot{V}_F'' - \dot{V}_Z}{4\cdot n'} \times \frac{\left[4\dfrac{n'}{n''}\cdot(V_Z - V_F') + \dfrac{\dot{V}_F'^2}{\dot{V}_Z}\right] + (V_F'' - V_F')\left(-4\dfrac{n'}{n''} + 2\dfrac{\dot{V}_F'}{\dot{V}_Z}\right)}{(\dot{V}_F'' - \dot{V}_F')^2} \tag{19}$$

und gleich Nullsetzen die Bestimmungsgleichung

$$x = \frac{4\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y^2 - 1}{4\cdot\dfrac{n'}{n''}\cdot y - 2} \tag{20}$$

In Bild 3 sind die geometrischen Orte, bei denen das Speichervolumen ein Minimum annimmt, eingezeichnet.

Beispiel 2:

Die in einem Sammelbehälter strömende Zuflußmenge schwankt im Bereich von $\dot{V}_Z = 0 \cdots 50$ m³/h. Die maximalen zulässigen Schalthäufigkeiten betragen $n' = 6\ \text{h}^{-1}$ und $n'' = 4\ \text{h}^{-1}$. Die Fördersysteme (Pumpe — Rohrleitung) wurden für $\dot{V}_F' = 25$ m³/h und $\dot{V}_F'' = 50$ m³/h ausgelegt.

Wie groß sind die Speichervolumina zu wählen?

Entsprechend Gl. (9) ergibt sich

$$\Delta V' = \frac{\dot{V}_F'}{4\cdot n'} = \frac{25\ \text{m}^3/\text{h}}{4\cdot 6\cdot \text{h}^{-1}} = 1{,}04\ \text{m}^3$$

Für das Verhältnis x gilt nach Gl. (17)

$$x = \frac{\dot{V}_F''}{\dot{V}_F'} = \frac{50}{25} = 2\,,$$

wofür im Bild 3 ($n'/n'' = {}^6/_4 = 1{,}5$)

$$y = 1{,}42$$

abgelesen werden kann. Dies bedeutet, daß die maximale Schalthäufigkeit bei einem Förderstrom von

$$\dot{V}_Z = y \cdot \dot{V}_F' = 1{,}42 \cdot 25\ \mathrm{m^3/h} = 35{,}5\ \mathrm{m^3/h}$$

auftritt.

Das notwendige Speichervolumen ergibt sich nach Gl. (14b).

$$\Delta V'' = 1{,}04\ \mathrm{m^3} \cdot \frac{4 \cdot \frac{6}{4} - \frac{1}{1{,}42} - \frac{1}{2 - 1{,}42}}{\frac{1}{2 - 1{,}42} + \frac{1}{1{,}42 - 1}} = 0{,}905\ \mathrm{m^3}$$

Setzt man zur Probe die Werte in Gl. (13) ein, so ergibt sich

$$\Delta\tau = \frac{1{,}04\ \mathrm{m^3}}{35{,}5\ \mathrm{m^3/h}} + \frac{0{,}905\ \mathrm{m^3}}{(35{,}5 - 25)\ \mathrm{m^3/h}}$$

$$+ \frac{(1{,}04 + 0{,}905)\ \mathrm{m^3}}{(50 - 35{,}5)\ \mathrm{m^3/h}} = 0{,}25\ \mathrm{h}\,;$$

d. h., die maximale Schalthäufigkeit beträgt gemäß der Forderung $n'' = 1/0{,}25\ \mathrm{h} = 4\ \mathrm{h^{-1}}$.

Wollte man in Abänderung des Beispiels den Sammelbehälter so klein wie möglich gestalten, so muß von der Festlegung der Fördermenge $\dot{V}_F'$ abgegangen werden. Aus Bild 3 folgt, daß für $n'/n'' = 1{,}5$ das minimale Speichervolumen dann vorliegt, wenn $x = 1{,}3$ und $y = 1{,}04$ betragen. Nach Gl. (17) folgt

$$V_F' = \frac{\dot{V}_F''}{x} = \frac{50}{1{,}3}\ \mathrm{m^3/h} = 38{,}5\ \mathrm{m^3/h}\,,$$

woraus nach Gl. (9)

$$\Delta V' = \frac{38{,}5}{4 \cdot 6}\ \mathrm{m^3} = 1{,}6\ \mathrm{m^3}$$

folgt. Der zweite Teil des Speichervolumens errechnet sich dann nach Gl. (14b) zu

$$\Delta V'' = 1{,}6\ \mathrm{m^3} \cdot \frac{4 \cdot \frac{6}{4} - \frac{1}{1{,}04} - \frac{1}{1{,}3 - 1{,}04}}{\frac{1}{1{,}3 - 1{,}04} + \frac{1}{1{,}04 - 1}} = 0{,}07\ \mathrm{m^3}$$

Vergleicht man die Gesamtvolumina, so ergeben sich im ersten Fall rd. 1,95 m³ und im zweiten Fall 1,67 m³. Hätte man ein Einstufensystem gewählt, so müßte der Behälter ein Volumen von 3,13 m³ haben.

Zusammenfassung:

Während das Einstufensystem gemäß Bild 1 die übliche Schaltung sein wird, weist das Zweistufensystem nach Bild 2, welches im allgemeinen einen höheren Investitionsaufwand erfordert, folgende Vorteile auf:

- Kleinere Speicherbehälter,
- kontinuierlicherer Umlauf des Speichermediums, da bei kleinerem Zufluß eine kleine Menge, bei großem Zufluß eine große Menge diskontinuierlich gespeichert wird,
- durch zeitweisen Einsatz der kleineren Pumpe, die in der Regel eine geringere Förderhöhe als die große Pumpe hat, ergeben sich niedrigere Betriebskosten.

Das Zweistufensystem mit minimiertem Speicherbehälter einzusetzen, ist praktisch bedeutungslos, da die Förderströme $\dot{V}_F'$ und $\dot{V}_F''$ — zumindest bei $n'/n'' > 1$ — nur sehr geringen Unterschied aufweisen.