Näherungsgleichungen für die Stoffwerte des Wassers im Anwendungsbereich der Heizungs- und Sanitärtechnik

Dr.-Ing. B. GLÜCK
VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung – Institut –

Bei der konventionellen Projektierung sind Zahlentafeln und Diagramme die wichtigsten Hilfsmittel. Diese Unterlagen werden auch bei der automatisierten Berechnung benötigt. Es wäre jedoch wenig sinnvoll, den Inhalt großer Tabellen im Automaten abzuspeichern. Das würde zu einer unwirtschaftlichen Speicherplatzbelegung und zu langwierigen Auswahltests führen. Statt dessen sollte sich jeder Bearbeiter eines Rechenprogramms bemühen, die benötigten Werte durch analytische Funktionen — in Form von Zahlenwertgleichungen — zu beschreiben. Diese Approximationen sollten jedoch so einfach wie möglich gehalten werden. Besonders günstig ist es, wenn die Näherungsgleichungen für den gesamten praktisch vorkommenden Temperaturbereich gelten, so daß Gültigkeitstests entfallen können.

Im folgenden werden Näherungsgleichungen für die Stoffwerte des Wassers in Funktion der Temperatur (t in °C) vorgestellt, die für die Berechnung von heizungs- und sanitärtechnischen Anlagen bedeutungsvoll sind. Es erfolgt jeweils eine Kurzcharakteristik des Verwendungszweckes sowie eine grafische Darstellung der Rechenwerte und der realen Werte. Die Kurve (I) spiegelt darin die Werte bei 1 kp/cm² bzw. bei Sättigungsdruck und die Kurve (II) die Werte bei 50 kp/cm² wider. Darüber hinaus werden in Tabellen die auftretenden Fehler der Stoffwerte in Abhängigkeit der Temperaturen aufgeführt.

Die Zahlen (1) bis (11) im Anschluß an die Stoffwertsymbole deuten auf die zugrunde gelegte Approximationsgleichung hin. Es ist ferner zu beachten, daß die Stoffwerte vielfach mit einem Exponenten kleiner Eins in die weiteren Berechnungen eingehen, so daß sich die Fehler weiter reduzieren.

Für den prozentualen relativen Fehler einer Funktion

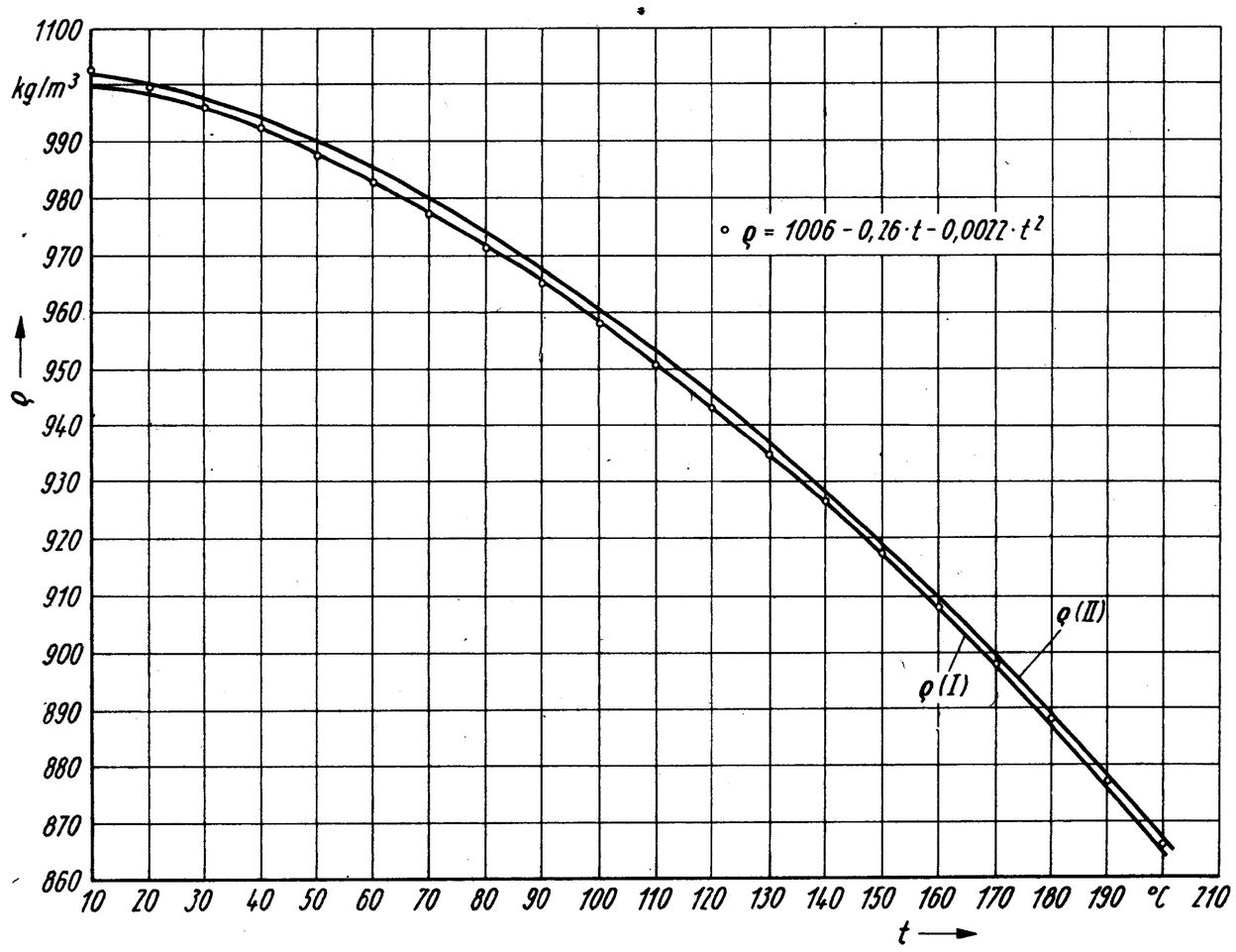
$$y = f(x) = x^a$$

folgt

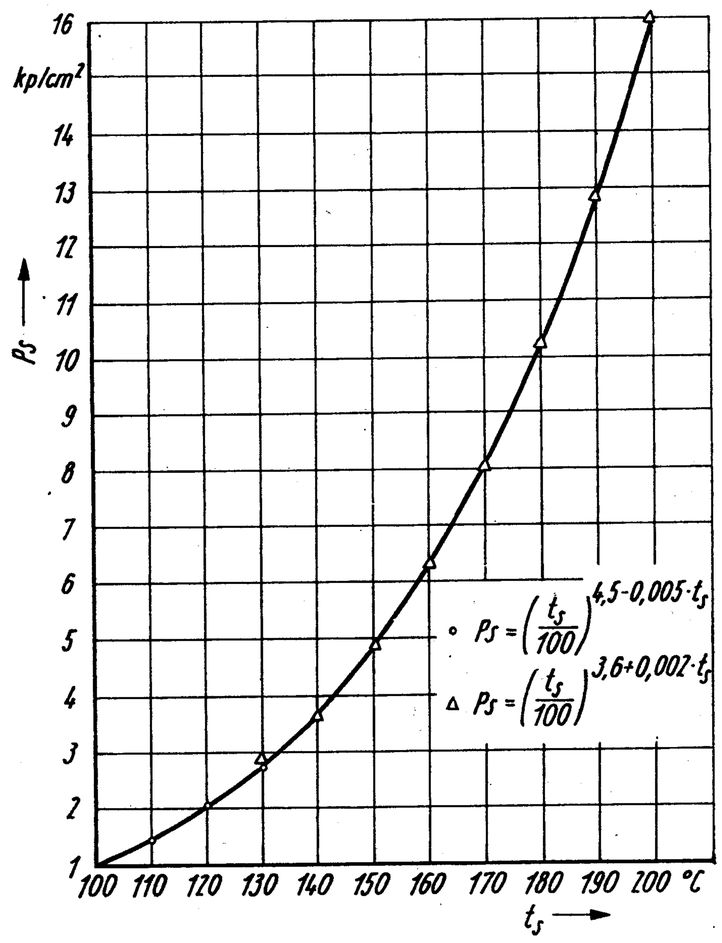
$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} \cdot 100\,\% = \frac{|f'(x)| \cdot \Delta x}{|f(x)|} \cdot 100\,\% = \frac{|a \cdot x^{a-1}| \cdot \Delta x}{|x^a|} \cdot 100\,\% \,.$$

Mit Kenntnis des prozentualen relativen Fehlers δ_x für den Basiswert x ergibt sich

$$\Delta x = \frac{|x|}{100\,\%} \cdot \delta_x$$



1



2

Tabelle 1

t [°C]	$\varrho^{(I)}$ [kg/m³]	$\varrho^{(II)}$ [kg/m³]	$\varrho^{(1)}$ [kg/m³]	$\frac{\varrho^{(1)} - \varrho^{(I)}}{\varrho^{(I)}}$ × 100 %	$\frac{\varrho^{(1)} - \varrho^{(II)}}{\varrho^{(II)}}$ × 100 %
10	999,7	1001,9	1003,2	0,35	0,13
20	998,2	1000,3	999,9	0,17	—0,04
30	995,7	997,8	996,2	0,05	—0,16
40	992,2	994,3	992,1	—0,01	—0,22
50	988,0	990,2	987,5	—0,05	—0,27
60	983,2	985,4	982,5	—0,07	—0,29
70	977,8	980,0	977,0	—0,08	—0,31
80	971,8	974,1	971,1	—0,07	—0,31
90	965,3	967,7	964,8	—0,05	—0,30
100	958,4	960,7	958,0	—0,04	—0,28
120	943,1	945,4	943,1	0	—0,24
140	926,1	928,5	926,5	0,04	—0,22
160	907,4	909,9	908,1	0,08	—0,20
180	886,9	889,4	887,9	0,11	—0,17
200	864,7	867,2	866,0	0,15	—0,14

Tabelle 2

t [°C]	p_s [kp/cm²]	$p_s^{(2)}$ [kp/cm²]	$p_s^{(3)}$ [kp/cm²]	$p_s^{(2)} - p_s$ [kp/cm²]	$p_s^{(3)} - p_s$ [kp/cm²]
100	1,033	1,000		—0,033	
110	1,461	1,457		—0,004	
120	2,025	2,036		0,011	
130	2,754	2,746	2,753	—0,008	—0,001
140	3,685		3,690		0,005
150	4,854		4,862		0,008
160	6,302		6,312		0,010
170	8,076		8,091		0,015
180	10,225		10,254		0,029
190	12,800		12,867		0,067
200	15,857		16,001		0,144

und damit

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{|y|} \cdot 100\,\% = \frac{|a \cdot x^{a-1}|}{|x^a|} \cdot |x| \cdot \delta_x$$

$$\delta_y = |a| \cdot \delta_x \,. \qquad (0)$$

1. Dichte

$$\varrho = 1006 - 0{,}26 \cdot t - 0{,}0022 \cdot t^2 \text{ in kg/m}^3 \qquad (1)$$

Geltungsbereich: 10 °C bis 200 °C

Die Dichte wird für die Umrechnung der Massen- in Volumenströme und für die Berechnung des thermodynamischen Umtriebsdruckes in Heizungsanlagen verwendet. Die auftretende maximale Abweichung von 0,35 Prozent (Bild 1, Tabelle 1) garantiert in jedem Fall genügend genaue Ergebnisse.

2. Sättigungsdruck

$$p_s = \left(\frac{t_s}{100}\right)^{4{,}5 - 0{,}005 \cdot t_s} \text{ in kp/cm}^2 \text{ a} \qquad (2)$$

Geltungsbereich: 100 °C bis 130 °C

$$p_s = \left(\frac{t_s}{100}\right)^{3{,}6 + 0{,}002 \cdot t_s} \text{ in kp/cm}^2 \text{ a} \qquad (3)$$

Geltungsbereich: 130 °C bis 200 °C

Die Kenntnis des Sättigungsdruckes ist für die Überprüfung der Druckschaubilder hinsichtlich des notwendigen Auflastdruckes erforderlich. An die Genauigkeit werden dabei große Anforderungen gestellt. Da die Sättigungsdrücke nicht in Gleichungen für weitere Berechnungen von wärmetechnischen oder strömungstechnischen Kennwerten eingehen, sondern in ihrer absoluten Größe verglichen werden, ist der absolute Fehler aussagekräftiger als der relative. Der maximale absolute Fehler von 0,14 kp/cm² (Bild 2, Tabelle 2) liegt in jedem Fall unterhalb der Genauigkeitsgrenze für die praktische Berechnung eines Druckdiagramms.

3. Wärmeleitzahl

$$\lambda = 0{,}491 + 0{,}00143 \cdot t - 0{,}0000051 \cdot t^2 \text{ in kcal/m} \cdot \text{h} \cdot \text{grd} \qquad (4)$$

Geltungsbereich: 10 °C bis 200 °C

Die Wärmeleitzahl des Wassers ist für die Auswertung der *Nußelt*gleichungen zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen notwendig. Der maximale relative Fehler von 1,61 Prozent (Bild 3, Tabelle 3) übersteigt die Genauigkeit der Berechnungsgleichungen für die *Nußelt*zahl bei weitem.

4. Prandtlzahl

$$Pr = e^{2{,}5 - 0{,}026 \cdot t} \qquad (5)$$

Geltungsbereich: 10 °C bis 40 °C

$$Pr = 178 \cdot t^{-1} \qquad (6)$$

Geltungsbereich: 40 °C bis 200 °C

Tabelle 3

t [°C]	$\lambda^{(I)}$ [kcal/m h grd]	$\lambda^{(4)}$ [kcal/m h grd]	$\frac{\lambda^{(4)} - \lambda^{(I)}}{\lambda^{(I)}}$ × 100 %
10	0,497	0,505	1,61
20	0,514	0,518	0,78
30	0,528	0,529	0,19
40	0,540	0,540	0
50	0,551	0,550	—0,18
60	0,560	0,558	—0,36
70	0,568	0,566	—0,35
80	0,575	0,573	—0,35
90	0,581	0,578	—0,52
100	0,586	0,583	—0,51
120	0,589	0,589	0
140	0,588	0,591	0,51
160	0,586	0,589	0,51
180	0,581	0,583	0,34
200	0,572	0,573	0,18

Tabelle 4

t [°C]	Pr(I)	Pr(5)	Pr(6)	$\frac{Pr(5) - Pr(I)}{Pr(I)}$ × 100 %	$\frac{Pr(6) - Pr(I)}{Pr(I)}$ × 100 %
10	9,47	9,39		—0,85	
20	7,01	7,24		2,28	
30	5,43	5,58		2,76	
40	4,34	4,31	4,45	—0,69	2,53
50	3,56		3,56		0
60	2,99		2,97		—0,67
70	2,56		2,54		—0,78
80	2,23		2,23		0
90	1,96		1,98		1,02
100	1,75		1,78		1,71
120	1,45		1,48		2,07
140	1,25		1,27		1,60
160	1,09		1,11		1,83
180	0,98		0,99		1,02
200	0,92		0,89		—3,26

Die *Prandtl*zahl repräsentiert in komplexer Form die Stoffwerte kinematische Zähigkeit, Dichte, spezifische Wärme und Wärmeleitzahl. Sie findet ebenfalls Eingang bei der Berechnung der Wärmeübergangszahl. Da der zugehörige Exponent in der Regel zwischen 0,33 und 0,42 liegt, wird der angegebene maximale Fehler von 3,28 Prozent (Bild 4, Tabelle 4) auf mindestens 1,38 Prozent im Endergebnis reduziert, was völlig ausreichend ist.

5. Kinematische Zähigkeit

$$\nu = 10^{-6} \cdot e^{0,498-0,0236 \cdot t} \quad \text{in m}^2/\text{s} \qquad (7)$$

Geltungsbereich: 10 °C bis 40 °C

$$\nu = 10^{-6} \cdot 19,8 \cdot t^{-0,915} \quad \text{in m}^2/\text{s} \qquad (8)$$

Geltungsbereich: 40 °C bis 200 °C

Die Werte der kinematischen Zähigkeit werden bei der Berechnung der *Reynolds*zahl verwendet. Der in Bild 5 und Tabelle 5 ausgewiesene Fehler von maximal 3,73 Prozent dürfte für praktische Berechnungen klein genug sein. Dabei ist zu beachten, daß die *Reynolds*zahl in weiteren Berechnungen maximal mit dem Exponenten 0,8 berücksichtigt wird. Dadurch reduziert sich der Fehler auf Werte unter 3 Prozent (vgl. auch die Abschnitte 6 und 7).

6. Dynamische Zähigkeit

$$\eta = 10^{-6} \cdot e^{5,09-0,023 \cdot t} \quad \text{in kp} \cdot \text{s/m}^2 \qquad (9)$$

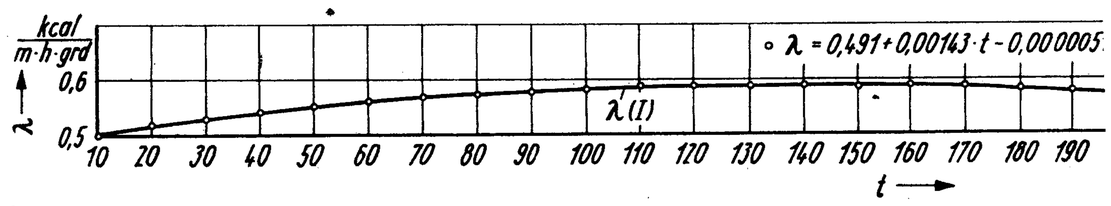
Geltungsbereich: 10 °C bis 40 °C

$$\eta = 0,0028 \cdot t^{-1} \quad \text{in kp} \cdot \text{s/m}^2 \qquad (10)$$

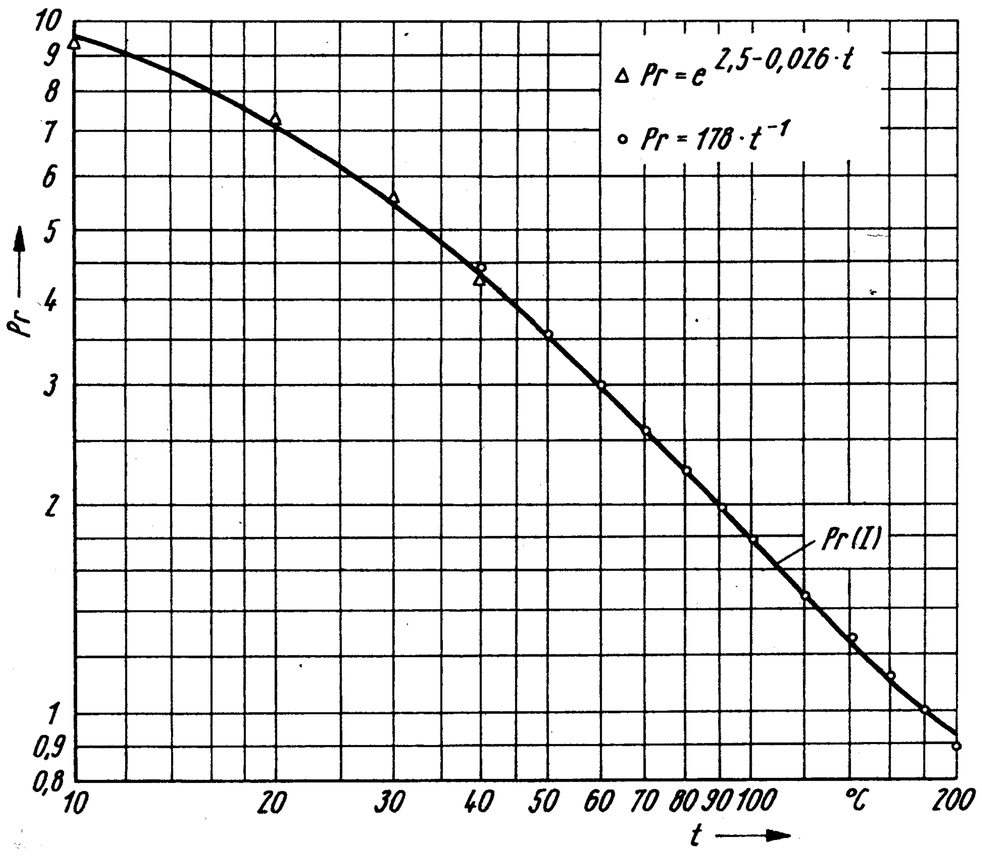
Geltungsbereich: 40 °C bis 200 °C

$$\eta = 0,001875 \cdot t^{-0,9} \quad \text{in kp} \cdot \text{s/m}^2 \qquad (11)$$

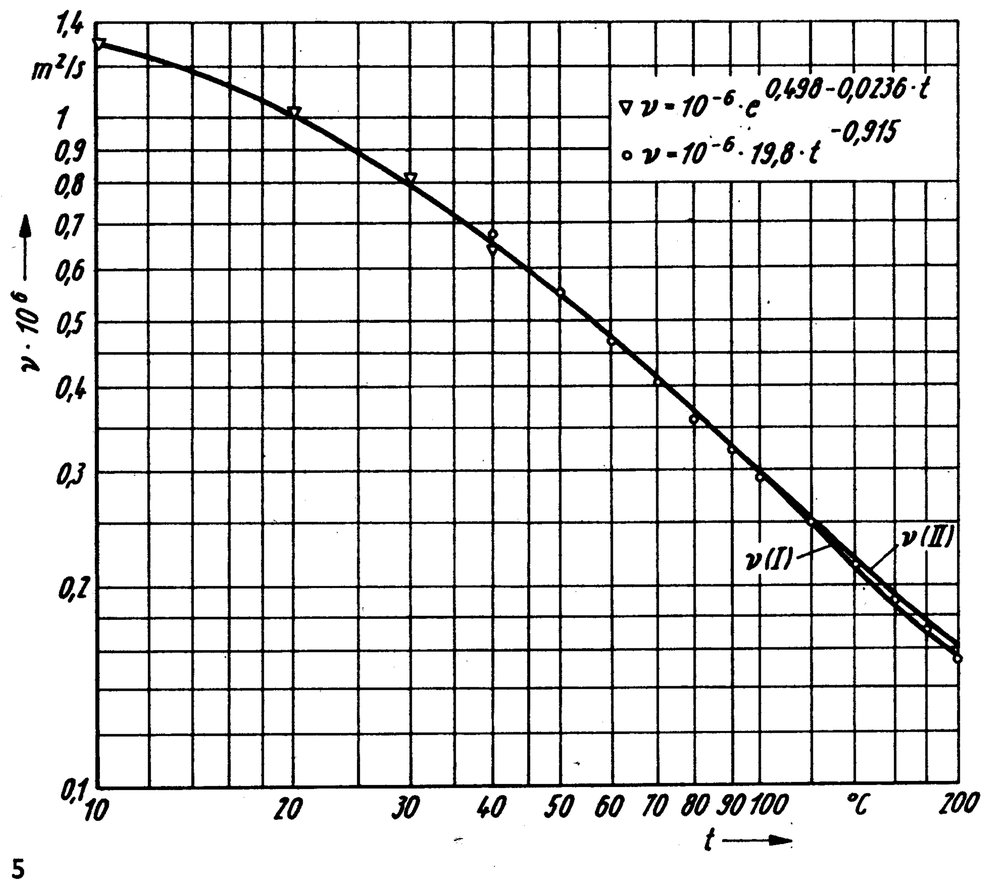
Geltungsbereich: 40 °C bis 110 °C



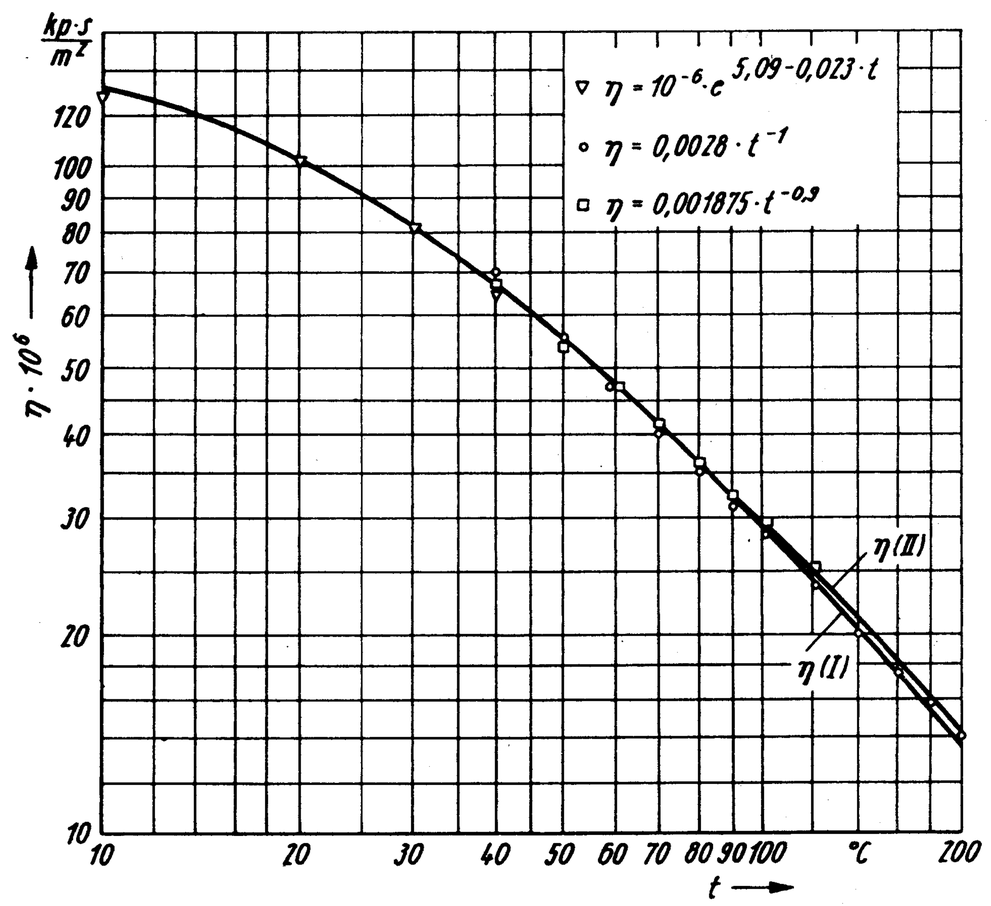
3



4



5



6

Tabelle 5

t [°C]	$\nu(\mathrm{I}) \cdot 10^6$ [m²/s]	$\nu(\mathrm{II}) \cdot 10^6$ [m²/s]	$\nu(7) \cdot 10^6$ [m²/s]	$\nu(8) \cdot 10^6$ [m²/s]	$\frac{\nu(7)-\nu(\mathrm{I})}{\nu(\mathrm{I})}$ ×100 %	$\frac{\nu(7)-\nu(\mathrm{II})}{\nu(\mathrm{II})}$ ×100 %	$\frac{\nu(8)-\nu(\mathrm{I})}{\nu(\mathrm{I})}$ ×100 %	$\frac{\nu(8)-\nu(\mathrm{II})}{\nu(\mathrm{II})}$ ×100 %
10	1,304	1,302	1,300		—0,31	—0,15		
20	1,004	1,001	1,026		2,19	2,50		
30	0,801	0,799	0,811		1,25	1,50		
40	0,658	0,657	0,640	0,677	—2,74	—2,59	2,89	3,04
50	0,553	0,553		0,552			—0,18	—0,18
60	0,474	0,475		0,467			—1,48	—1,68
70	0,413	0,414		0,406			—1,69	—1,93
80	0,365	0,367		0,359			—1,64	—2,18
90	0,326	0,329		0,323			—0,92	—1,82
100	0,295	0,299		0,293			—0,68	—2,01
120	0,249	0,252		0,248			—0,40	—1,59
140	0,215	0,218		0,215			0	—1,38
160	0,189	0,192		0,191			1,06	—0,52
180	0,170	0,173		0,171			0,59	—1,16
200	0,158	0,161		0,155			—1,90	—3,73

Tabelle 6

t [°C]	$\eta(\mathrm{I}) \cdot 10^6$ [kps/m²]	$\eta(\mathrm{II}) \cdot 10^6$ [kps/m²]	$\eta(9) \cdot 10^6$ [kps/m²]	$\eta(10) \cdot 10^6$ [kps/m²]	$\eta(11) \cdot 10^6$ [kps/m²]	$\frac{\eta(9)-\eta(\mathrm{I})}{\eta(\mathrm{I})}$ ×100 %	$\frac{\eta(9)-\eta(\mathrm{II})}{\eta(\mathrm{II})}$ ×100 %	$\frac{\eta(10)-\eta(\mathrm{I})}{\eta(\mathrm{I})}$ ×100 %	$\frac{\eta(10)-\eta(\mathrm{II})}{\eta(\mathrm{II})}$ ×100 %	$\frac{\eta(11)-\eta(\mathrm{I})}{\eta(\mathrm{I})}$ ×100 %	$\frac{\eta(11)-\eta(\mathrm{II})}{\eta(\mathrm{II})}$ ×100 %
10	133,3	133,0	129,0			—3,23	—3,01				
20	102,2	102,1	102,5			0,29	0,39				
30	81,3	81,3	81,5			0,25	0,25				
40	66,5	66,6	64,7	70,0	67,8	—2,71	—2,85	5,26	5,11	1,95	1,80
50	55,7	55,8		56,0	55,5			0,54	0,36	—0,36	—0,54
60	47,5	47,7		46,7	47,1			—1,68	—2,10	—0,84	—1,26
70	41,2	41,4		40,0	41,0			—2,91	—3,38	—0,49	—0,97
80	36,2	36,5		35,0	36,3			—3,31	—4,11	0,28	—0,55
90	32,1	32,5		31,1	32,7			—3,12	—4,31	1,87	0,62
100	28,8	29,3		28,0	29,7			—2,78	—4,44	3,13	1,37
120	23,9	24,3		23,3	25,2			—2,51	—4,12	(5,44)	(3,70)
140	20,3	20,6		20,0				—1,48	—2,91		
160	17,5	17,8		17,5				0	—1,69		
180	15,4	15,7		15,6				1,30	—0,64		
200	13,9	14,2		14,0				0,72	—1,41		

Die Werte der dynamischen Zähigkeit kommen in den *Nußelt*gleichungen zur Anwendung. Der Verhältniswert der Zähigkeit bei mittlerer Wassertemperatur zur Zähigkeit bei Wandtemperatur kennzeichnet den Einfluß der Wärmestromrichtung. Dieser Quotient hat immer den Exponenten 0,14. Er wird bei Wasser nur bei sehr großen Anforderungen an die Genauigkeit der Rechnung berücksichtigt. Der maximale relative Fehler von 5,26 Prozent (Bild 6, Tabelle 6) ergibt praktisch (Exponent 0,14) einen Fehler kleiner als 0,74 Prozent.

Außerdem dient die dynamische Zähigkeit der Berechnung der *Reynolds*zahl (vgl. Abschnitt 7). Die *Reynolds*zahl wiederum geht in die *Nußelt*gleichungen mit dem Exponenten 0,33 bis 0,8 ein, so daß sich der maximale relative Fehler auf 1,74 Prozent bzw. 4,21 Prozent reduziert. Wird die *Reynolds*zahl zur Berechnung des Rohrreibungsbeiwertes bei turbulenter Strömung verwendet, so beträgt der Exponent im Mittel —0,2. Der maximale relative Fehler beträgt dann 1,05 Prozent.

Des weiteren kann durch Auswahl geeigneter Approximationsgleichungen der Fehler verringert werden. So ließe sich z. B. für die Berechnung der reinen Gebäudeheizung Gl. (11) verwenden.

Die Ergebnisse entsprechen in jedem Fall den in der Praxis geforderten Genauigkeiten.

7. Reynoldszahl

Die *Reynolds*zahl kennzeichnet die strömungstechnischen Verhältnisse. Für deren Berechnung gilt

$$Re = \frac{w \cdot d}{\nu}, \tag{12}$$

wobei w die Geschwindigkeit, d den Durchmesser und ν die kinematische Zähigkeit darstellen. Bei der üblichen Berechnung werden Geschwindigkeit und Zähigkeit getrennt ermittelt und damit die *Reynolds*zahl berechnet.

Das Verfahren kann abgekürzt werden, wenn für

$$w = \frac{\dot{m}}{\varrho \cdot A} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\eta}{\varrho} \tag{13}$$

in Gl. (12) substituiert wird. Es ergibt sich

$$Re = \frac{\dot{m} \cdot d_{\mathrm{gl}}}{A \cdot \eta}. \tag{14}$$

Diese Berechnungsgleichung ist allgemeingültig, wobei d_{gl} den gleichwertigen Durchmesser und A den zur Ermittlung der Geschwindigkeit anzunehmenden Bezugsquerschnitt bedeuten.

Für den Außenraum der Wärmeübertrager ist d_{gl} gleich dem Außendurchmesser der Heizrohre und A das geometrische Mittel von Längs- und Querstromfläche, wodurch die Einbauart der Schikanen berücksichtigt wird.

Für die Rohrströmung ist d_{gl} gleich dem Rohrinnendurchmesser und A der freie Rohrquerschnitt.

Unter Berücksichtigung der Gl. (9) bis (11) ergeben sich somit folgende Zahlenwertgleichungen, wobei die jeweils erste Gleichung allgemeingültig ist, und die zweite Gleichung sich auf Rohrströmung bezieht.

$$Re = 28\,300 \cdot \frac{\dot{m} \cdot d_{gl}}{A} \cdot e^{-5{,}09+0{,}023 \cdot t} \tag{15}$$

$$Re = 36\,000 \; \frac{\dot{m}}{d} \cdot e^{-5{,}09+0{,}023 \cdot t} \tag{16}$$

Geltungsbereich: 10 °C bis 40 °C

$$Re = 10{,}1 \cdot t \; \frac{\dot{m} \cdot d_{gl}}{A} \tag{17}$$

$$Re = 12{,}9 \cdot t \cdot \frac{\dot{m}}{d} \tag{18}$$

Geltungsbereich: 40 °C bis 200 °C

$$Re = 15{,}1 \cdot t^{0{,}9} \; \frac{\dot{m} \cdot d_{gl}}{A} \tag{19}$$

$$Re = 19{,}2 \cdot t^{0{,}9} \cdot \frac{\dot{m}}{d} \tag{20}$$

Geltungsbereich: 40 °C bis 110 °C

Es sind t in °C, m in kg/h, d in mm und A in mm² einzusetzen. Die dabei auftretenden Fehler entsprechen den unter Abschnitt 6 genannten Werten.