Berechnung von Einstrahlzahlen mit einem universell anwendbaren Rechenprogramm

Dr.-Ing. B. GLUCK
VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung – Institut –

Die Berechnung der Einstrahlzahlen bereitet wegen des erforderlichen Aufwandes und der Kompliziertheit den Projektanten erfahrungsgemäß Schwierigkeiten. Insbesondere ist zu bemerken, daß bisher relativ wenige und nur für geometrisch einfache Gebilde Berechnungsgleichungen oder Diagramme vorliegen. So findet man in der Regel keine Lösungen für beliebig orientierte Rechteck- und Kreisflächen, für schiefwinklig umrandete Trapez- oder Vieleckflächen usw. Des weiteren existieren keine Lösungen, die die Schattenwirkung von Bauteilen berücksichtigen, die zwischen den im Strahlungsaustausch befindlichen Oberflächen liegen. Dieses Problem tritt bereits beim Strahlungsaustausch zwischen einem Rohrregister und einer Wand auf.

Zur Lösung derartiger Berechnungsfälle wurde bei gleichzeitiger Befreiung von manueller Arbeit ein Rechenprogramm entwickelt.

1. Mathematisches Modell des Strahlungsaustausches

Ausgehend von Berechnungsgleichungen für die Einstrahlzahl von

– einem Flächenteilchen dA_a auf eine endliche Fläche A_b

$$\varphi_a = \frac{1}{\pi} \int\limits_{A_b} \frac{\cos\beta_a \cdot \cos\beta_b}{r^2}\, dA_b \tag{1}$$

– von einer endlichen Fläche A_a auf eine endliche Fläche A_b

$$\bar{\varphi}_a = \frac{1}{A_a} \int\limits_{A_a} \varphi_a\, dA_a$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot A_a} \int\limits_{A_a} \int\limits_{A_b} \frac{\cos\beta_a \cdot \cos\beta_b}{r^2}\, dA_b \cdot dA_a \tag{2}$$

werden für die Lösung mit der digitalen Rechentechnik die obigen Gleichungen in eine Summendarstellung mit diskreter Schrittweite überführt.

Damit ergeben sich:

$$\varphi_a = \frac{1}{\pi} \sum_{A_b} \frac{\cos\beta_a \cdot \cos\beta_b}{r^2}\, \Delta A_b \tag{3}$$

$$\bar{\varphi}_a = \frac{1}{\pi \cdot A_a} \sum_{A_a} \cdot \left(\sum_{A_b} \frac{\cos\beta_a \cdot \cos\beta_b}{r^2}\, \Delta A_b \right) \Delta A_a\,. \tag{4}$$

Die geometrische Deutung ist in Bild 1 gegeben.

An die Form der Fläche wird lediglich die Forderung gestellt, daß sie im mathematischen Sinn ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet darstellt, welche keine derartigen Erhebungen oder Einsenkungen aufweist, daß der Strahlungsaustausch anderer Flächenelemente der gleichen Fläche dadurch unterbunden wird (Schattenwirkung).

Im Rechenprogramm ist die Eingabe von Flächen 2. Ordnung in der Form

$$A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot y^2 + A_3 \cdot z^2 + A_4 \cdot x \cdot y + A_5 \cdot x \cdot z + A_6 \cdot y \cdot z + A_7 \cdot x + A_8 \cdot y + A_9 \cdot z + A_{10} = 0 \tag{5}$$

möglich.

Für die Vektoren, die das Flächenelement ΔA aufspannen, gilt

$$(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) \text{ und } (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\,.$$

Daraus folgt das Vektorprodukt

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) \times (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\,, \tag{6}$$

wobei $(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$; $(\mathfrak{b} - \mathfrak{a})$ und der Normalenvektor $\mathfrak{n}$ ein Rechtssystem bilden. Von Hand ist anzugeben, welche Seite der Fläche im Strahlungsaustausch steht, das bedeutet, die Eingabe (N – 1) kehrt die Richtung des Normalenvektors um. Der Betrag des Normalenvektors ist gleich dem Flächeninhalt des Flächenelementes

$$\Delta A = |\mathfrak{n}|\,. \tag{7}$$

Der Einstrahlwinkel β wird zwischen dem Verbindungsvektor der im Strahlungsaustausch stehenden Flächen und der jeweiligen Flächennormalen gebildet. Ist der Einstrahlwinkel $\geqq 90°$, so liegt kein Strahlungsaustausch zwischen den Flächenelementen vor, d. h., $\cos\beta \leqq 0$ wird gleich Null gesetzt. Der auftretende Winkel wird dann exakt wiedergegeben, wenn die beiden Vektoren Verbindungsvektor $\mathfrak{r}$ und Normalenvektor $\mathfrak{n}$ von der Strahlungsfläche wegweisen. Der Normalenvektor wird so festgelegt, daß diese Forderung erfüllt ist. Der Verbindungsvektor kann natürlich nur in einer Richtung orientiert sein, so daß das Vorzeichen in einem Fall umzukehren ist. So gilt für die Verhältnisse nach Bild 1 durch Anwenden des Skalarprodukts

$$\cos\beta_a = \frac{\mathfrak{n}_a \cdot \mathfrak{r}}{|\mathfrak{n}_a| \cdot |\mathfrak{r}|} \tag{8}$$

$$\cos\beta_b = -\frac{\mathfrak{n}_b \cdot \mathfrak{r}}{|\mathfrak{n}_b| \cdot |\mathfrak{r}|} \tag{9}$$

mit

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_b - \mathfrak{a}_a\,. \tag{10}$$

Damit sind alle Größen für die Auswertung der Gl. (3) und (4) formal bereitgestellt. Vereinfachte Darstellungen von speziellen Flächen werden später noch betrachtet.

2. Mathematische Formulierung der Flächenbegrenzungen

Für im Strahlungsaustausch stehende Flächen werden folgende Begrenzungsmöglichkeiten vorgesehen:

Variante I

Flächen, die auf die x,y-Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$x_{min} = E_1; \qquad x_{max} = E_2 \tag{11}$$

$$y_{min} = E_3 + E_4 \cdot x; \qquad y_{max} = E_5 + E_6 \cdot x \tag{12}$$

$$z_{min} = E_7 + E_8 \cdot x + E_9 \cdot y; \quad z_{max} = E_{10} + E_{11} \cdot x + E_{12} \cdot y \tag{13}$$

Variante II

Flächen, die auf die y,z-Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$y_{min} = E_1; \qquad y_{max} = E_2 \tag{14}$$

$$z_{min} = E_3 + E_4 \cdot y; \qquad z_{max} = E_5 + E_6 \cdot y \tag{15}$$

$$x_{min} = E_7 + E_8 \cdot y + E_9 \cdot z; \quad x_{max} = E_{10} + E_{11} \cdot y + E_{12} \cdot z \tag{16}$$

Variante III

Flächen, die auf die z,x-Ebene eine flächenförmige Projektion ergeben

$$z_{\min} = E_1; \qquad z_{\max} = E_2 \tag{17}$$

$$x_{\min} = E_3 + E_4 \cdot z; \qquad x_{\max} = E_5 + E_6 \cdot z \tag{18}$$

$$y_{\min} = E_7 + E_8 \cdot z + E_9 \cdot x; \quad y_{\max} = E_{10} + E_{11} \cdot z + E_{12} \cdot x \tag{19}$$

Variante IV

Flächen beliebiger Orientierung

$$(x - E_{13})^2 + (y - E_{14})^2 + (z - E_{15})^2 \leqq E_{16}^2 \tag{20}$$

Im allgemeinen Fall steht eine der Varianten I bis III und zusätzlich Variante IV zur Verfügung.

Diese Möglichkeiten dürften ausreichend sein, um den gegebenen praktischen Fällen stets Rechnung zu tragen. Zur Demonstration sind drei Beispiele näher erläutert:

Beispiel 1:

Eine im Raum liegende Trapezfläche (A) (Bild 2) soll mit minimalstem Aufwand begrenzt werden. Man sieht sofort, daß dies bei der Projektion auf die y,z-Ebene (Variante II) am einfachsten durchführbar ist. Die Gl. (14) und (15) sind dazu ausreichend, um durch die Ebenen (1), (2), (3), (4), die alle senkrecht auf der y,z-Ebene stehen, die Fläche (A) zu begrenzen. Im Rechenprogramm wird dann in Δy- und Δz-Schritten die Projektionsfläche abgearbeitet. Da diese exakt durch die Punkte I″, II″, III″, IV″ wiedergegeben wird, entfallen zusätzliche Tests bezüglich der minimalen und maximalen Höhe über der betrachteten Projektionsebene (Gl. (16)). Da dieser Test aber fest im Rechenprogramm eingebaut ist, werden zweckmäßigerweise $E_8 = E_9 = E_{11} = E_{12} = 0$ und $E_7 < x_{\min}$ sowie $E_{10} > x_{\max}$ gesetzt. Eine zusätzliche Begrenzung nach Variante IV entfällt.

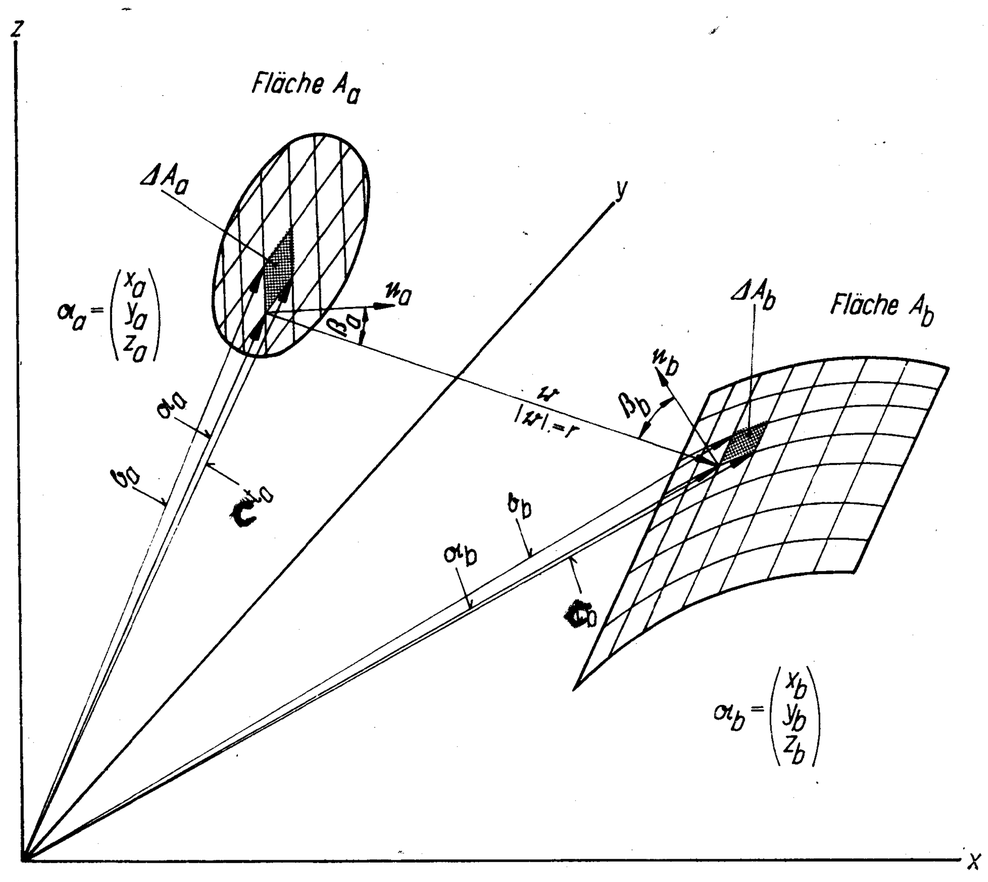
Beispiel 2:

Eine Kreisfläche (A) im Raum soll dargestellt werden (Bild 3). Zunächst wird die Gleichung der Ebene (B), in der die Kreisfläche liegt, aufgestellt. Im Mittelpunkt M der Kreisfläche wird eine Kugel (1) mit gleichem Radius aufgespannt. Des weiteren entsteht durch Eingabe von Gl. (11) und (12) der maximale Definitionsbereich I′, II′, III′, IV′. Im Rechenprogramm wird dann in diskreten Δx- und Δy-Schritten diese Projektionsfläche abgearbeitet, und die zugehörigen z-Werte, die Elemente der Fläche (B) sind, werden ermittelt. Sind dies gleichzeitig auch Elemente der Kugel (1) nach Gl. (20), so liegt ein Element der Kreisfläche (A) vor und wird in der Berechnung der Einstrahlzahl betrachtet, anderenfalls wird ein Schritt Δy oder Δx weitergegangen.

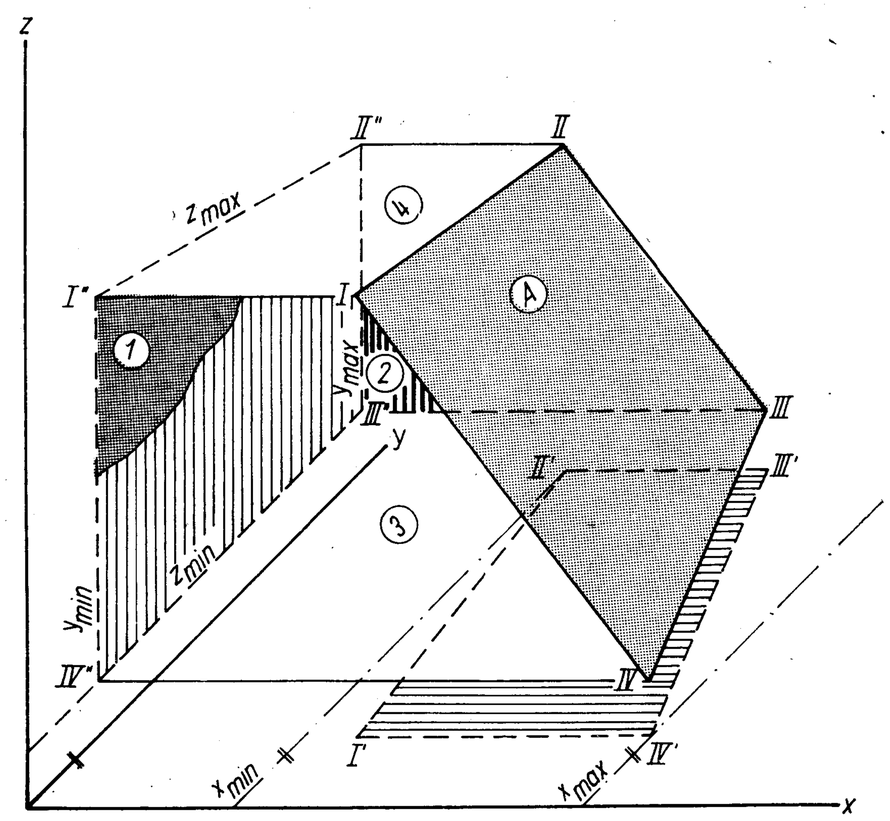
Es kann mitunter schwierig sein, die Projektionsfläche I′, II′, III′, IV′ durch Tangenten an die Kreisprojektion aufzustellen. Diese manuelle Arbeit kann einfach umgangen werden, wenn die Begrenzungsflächen nach Gl. (11) und (12) jeweils nach außen verschoben werden, so daß der Definitionsbereich I*, II*, III*, IV* entsteht. Die Rechenzeit verlängert sich natürlich durch die größere Zahl der Tests etwas. Die Begrenzung nach Gl. (13) ist in diesem Fall nicht erforderlich. Da dieser Test jedoch grundsätzlich im Rechenprogramm eingebaut ist, werden die Koeffizienten $E_8 = E_9 = E_{11} = E_{12} = 0$ gesetzt und $E_7 < z_{\min}$ sowie $E_{10} > z_{\max}$ gestellt.

Beispiel 3:

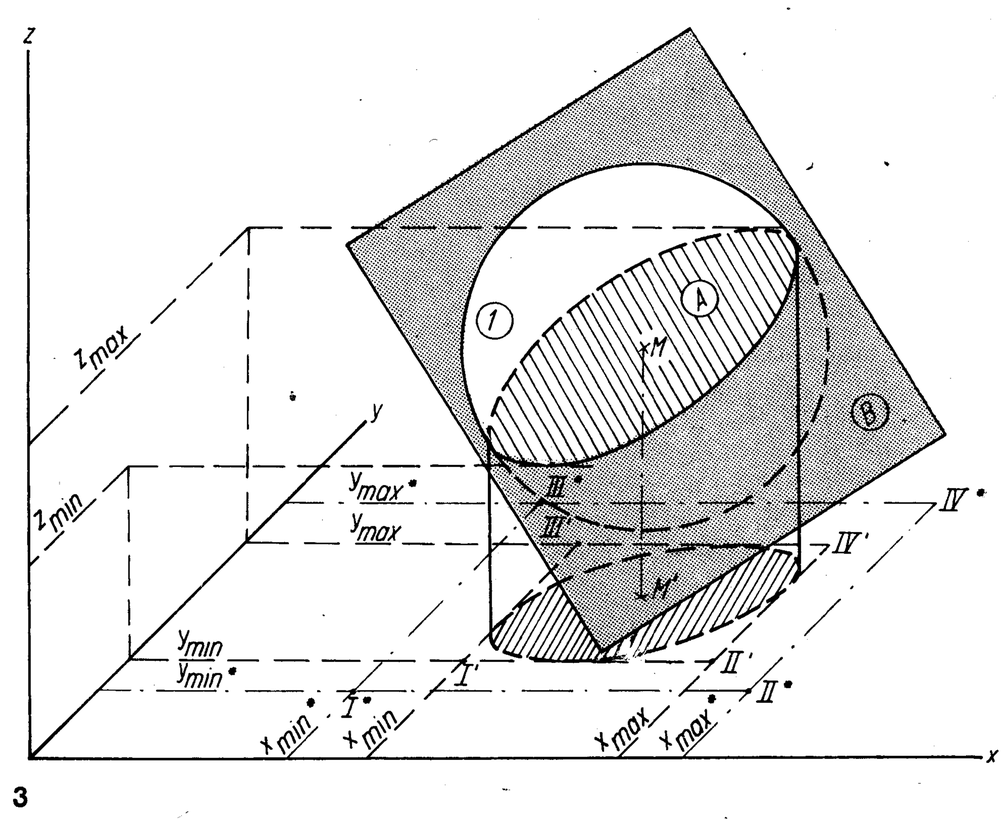
Eine Fläche 2. Ordnung (A) (Bild 4) soll durch Ebenen der Gl. (11) bis (19) begrenzt werden. Die dargestellte Fläche ergibt Projektionen auf die Tafelebenen x,y; y,z und x,z. Da krummlinige Begrenzungsflächen nicht darstellbar sind,



1



2



3

empfiehlt sich folgendes Vorgehen. Durch Gl. (12) werden die Ebenen (1) und (2) definiert. In Verbindung mit Gl. (11) ergeben sich die Punkte I′ und II′ bzw. die Originalpunkte I und II auf der Fläche (A). Die weiteren Begrenzungen werden durch die Ebenen (4) und (5) nach Gl. (13) gegeben, wobei im Schnitt mit der Ebene (1) auch die Punkte III und IV auf der Fläche (A) entstehen.

Im Rechenprogramm würde dann der Bereich, der durch die Projektion I′, II′, III*, IV* gegeben ist, in Δx- und Δy-Schritten abgearbeitet. Durch die Testung bezüglich der Gl. (13) erfolgt dann automatisch die Reduzierung auf den wirklichen Bereich I′, II′, III′, IV′.

3. Mathematisches Modell schattenerzeugender Bauteile

Zwischen den im Strahlungsaustausch stehenden Körpern befinden sich in der Praxis oft wärmestrahlenundurchlässige Körper endlicher Abmessungen. Dies sind in der Regel Rohre, Säulen, Zwischenwände usw. Um diese Körper auf einfache und einheitliche Weise darzustellen, werden elliptische Zylinder der Form

Zylinderachse parallel der z-Achse (Kennzahl $P = 1$)

$$\frac{(x - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(y - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \tag{21}$$

Zylinderachse parallel der x-Achse (Kennzahl $P = 2$)

$$\frac{(y - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(z - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \tag{22}$$

Zylinderachse parallel der y-Achse (Kennzahl $P = 3$)

$$\frac{(z - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{(x - H_2)^2}{H_4^2} = 1 \tag{23}$$

verwendet (Bild 5). Sind beide Halbachsen gleich $H_3 = H_4$, so geht der elliptische Zylinder in einen Kreiszylinder über, und Rohre, Säulen usw. sind abbildbar. Sind die beiden Halbachsen sehr unterschiedlich ($H_3 \ll H_4$ oder $H_4 \ll H_3$), so können damit näherungsweise Zwischenwände, Strahlungsschirme usw. dargestellt werden. Das schattenerzeugende Bauteil wird des weiteren noch durch zusätzliche Eingaben in der Höhe begrenzt. So stellt L_1 die untere und L_2 die obere Begrenzung — gemessen von der jeweiligen Tafelebene aus — dar. Der Aufbau des Rechenprogramms läßt insgesamt die Eingabe von fünf derartigen Hindernissen zu. Bei der Rechnung ist jeweils zu ermitteln, ob die Verbindungsgerade zwischen den betrachteten Flächenelementen ein Hindernis schneidet. Da die Zylinderachsen parallel den Koordinatenachsen liegen, genügt es, die Projektion auf die jeweiligen Grundebenen zu beziehen. Denn wird ein Zylinder von einer im Raum aufgespannten Geraden geschnitten, dann wird auch die Projektion dieser Geraden den Zylindergrundkreis schneiden. Die Ableitung erfolgt für einen Zylinder, der auf der x,y-Ebene steht. Für die Gerade gilt

$$y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a) \tag{24}$$

und Substitution in Gl. (21) liefert

$$\frac{(x - H_1)^2}{H_3^2} + \frac{\left(y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\cdot(x - x_a) - H_2\right)^2}{H_4^2} = 1. \tag{25}$$

Mit den Abkürzungen

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}; \quad \varrho = -H_2 + y_a - x_a \cdot m \tag{26}$$

folgt nach einiger Zwischenrechnung

$$x_{1/2} = -\frac{\frac{\varrho\cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{\varrho\cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}}\right)^2 - \frac{\frac{H_1^2}{H_3^2} + \frac{\varrho^2}{H_4^2} - 1}{\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}}}. \tag{27}$$

Sobald eine Doppelwurzel die Lösung darstellt (Radikand gleich Null), bedeutet dies, daß der Verbindungsvektor das Hindernis tangiert. Für diesen Fall sei noch ein Strahlungsaustausch angenommen. Ist der Radikand positiv, so existieren zwei Lösungen im Reellen, d. h., die Verbindungsgerade schneidet das Hindernis, ein Strahlungsaustausch entfällt.

Für diesen Fall muß

$$\left(\frac{\varrho\cdot m}{H_4^2} - \frac{H_1}{H_3^2}\right)^2 > \left(\frac{H_1^2}{H_3^2} + \frac{\varrho^2}{H_4^2} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{H_3^2} + \frac{m^2}{H_4^2}\right) \tag{28}$$

gelten. Des weiteren muß geprüft werden, ob das Hindernis auf Grund seiner Höhe im Strahlengang liegt. Zu diesem Zweck wird die Projektion der Verbindungsgeraden auf die x,z-Ebene betrachtet und die z-Koordinate an der Stelle $x = H_1$ nach

$$z = z_a + \frac{H_1 - x_a}{x_b - x_a}(z_b - z_a) \tag{29}$$

berechnet. Gilt gleichzeitig

$$L_1 < z < L_2 \tag{30}$$

und Gl. (28), so findet kein Strahlungsaustausch statt. Der Einfachheit halber wurde der Höhentest nur für eine Ebene $x = H_1$ durchgeführt. Eventuell hervorstehende Kanten bleiben unberücksichtigt.

Anmerkung

Um einen Zahlenüberlauf durch unerlaubte Division durch Null in Gl. (26) und (29) zu vermeiden, das vorliegende Programm aber nicht noch weiter zu komplizieren, sind die Anordnung der Flächen oder deren Teilungen so zu wählen, daß es keine Verbindungsgerade gibt, für die $x_a = x_b$ gilt. In zyklischer Vertauschung der Koordinaten erhält man die Aussagen und Ableitungen analog.

4. Mathematisches Modell spezieller Strahlungsflächen

4.1. Flächenelement

Entsprechend Bild 6 sind die Koordinaten des Elementes

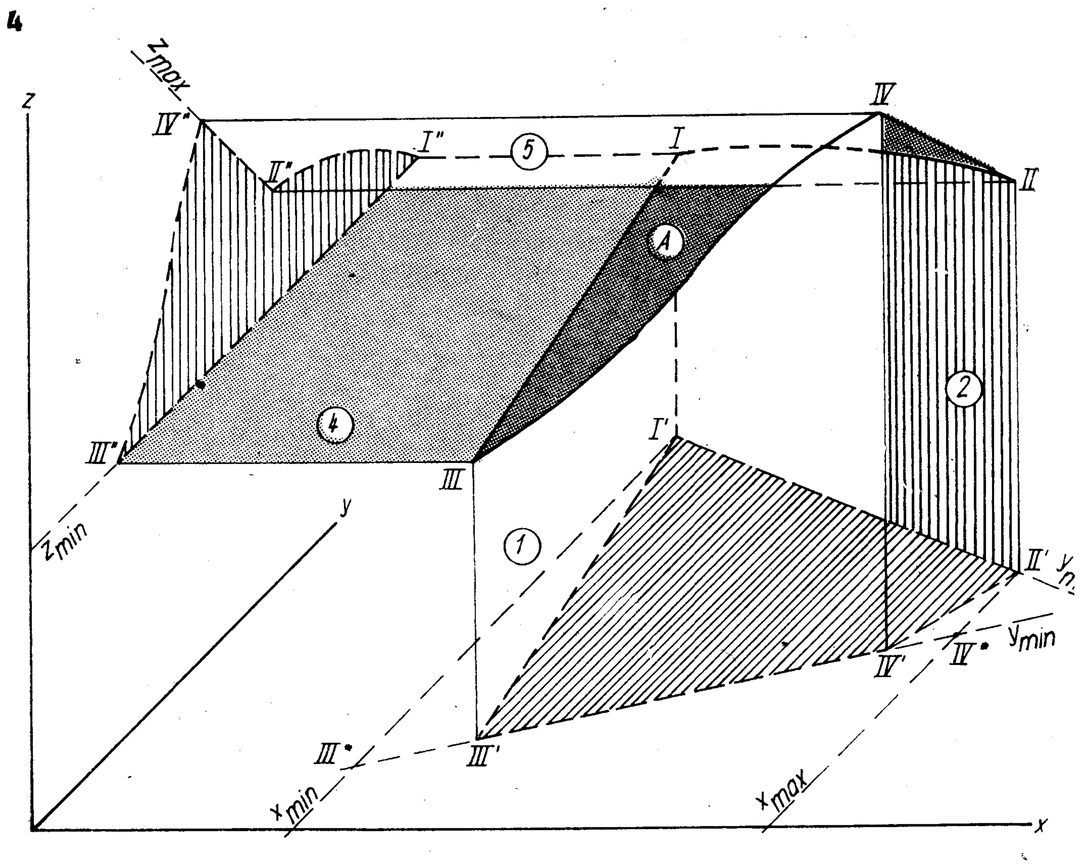
$$x = A_1;\ y = A_2;\ z = A_3 \tag{31}$$

und der zugehörige Normalenvektor

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{pmatrix} \tag{32}$$

in der Form eines Einsvektors ($\sqrt{nx^2 + ny^2 + nz^2} = 1$) einzugeben. Die Angabe $N = +1$ oder $N = -1$ kennzeich-

4



net die Richtung des Normalenvektors. Ist die Richtung mit der in Bild 1 gezeichneten Richtung identisch (man beachte dabei stets Fläche a oder b), dann gilt $N = +1$, sonst $N = -1$.

4.2. Fläche 2. Ordnung

Gemäß Gl. (5) werden die Koeffizienten A_1 bis A_{10}, für das Gleichungssystem Gl. (11) bis (20) die Koeffizienten E_1 bis E_{16}, die Richtung des Normalenvektors N sowie die Schrittweite Δx und Δy eingegeben. Die schrittweise Abarbeitung der Projektionsfläche erfolgt nach folgendem Schema (Bild 7):

Ausgehend von

$$x_{\min} = E_1;\ y_{\min,\,1} = E_3 + E_4 \cdot x_1$$

wird

$$x_1 = x_{\min} + 0{,}5 \cdot \Delta x;\ y_1 = y_{\min,\,1} + 0{,}5 \cdot \Delta y$$

für den ersten Berechnungsschritt gesetzt. Insgesamt werden in diesem Beispiel 55 Berechnungspunkte bearbeitet, wobei die mit „Stern" dargestellten Punkte auf Grund der Begrenzung nach Gl. (13) ausscheiden. Dies geschieht durch den Test

$$E_{10} + E_{11} \cdot x + E_{12} \cdot y > z > E_7 + E_8 \cdot x + E_9 \cdot y$$

mit

$$z = -\frac{A_5 \cdot x + A_6 \cdot y + A_9}{2 \cdot A_3} + \sqrt{\left(\frac{A_5 \cdot x + A_6 \cdot y + A_9}{2 \cdot A_3}\right)^2 \cdots \cdots - \frac{A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_4 xy + A_7 \cdot x + A_8 \cdot y + A_{10}}{A_3}}.$$

Wird die Begrenzung durch Gl. (20) nicht benötigt, so ist $E_{16} = 0$ einzugeben.

Um die Berechnung des Normalenvektors nach Gl. (6) möglichst einfach zu gestalten, wurde zu rechtwinklig aufeinanderstehenden Elementarvektoren (Bild 7, Detail) übergegangen. Damit ergeben sich für diese Elementarvektoren die Koordinatenvektoren

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \cdot \Delta x \\ 0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \cdot \Delta y \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

und deren Vektorprodukt

$$\mathfrak{e} \times \mathfrak{f} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot \Delta y \cdot (z_1 - z_0) \\ -0{,}5 \cdot \Delta x \cdot (z_2 - z_0) \\ 0{,}25\ \Delta x \cdot \Delta y \end{pmatrix} \tag{34}$$

mit dem Betrag

$$|\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}| = \sqrt{[0{,}5 \cdot \Delta y \cdot (z_1 - z_0)]^2 + [0{,}5 \cdot \Delta x \cdot (z_2 - z_0)]^2 \cdots + [0{,}25 \cdot \Delta x \cdot \Delta y]^2}\,. \tag{35}$$

Das Vierfache dieses Betrages ist zahlenmäßig gleich dem Inhalt des Flächenelementes

$$\Delta A = 4 \cdot |\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}|\,. \tag{36}$$

Der Normalenvektor als „Einsvektor" lautet weiterhin

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}}{|\mathfrak{e} \times \mathfrak{f}|}\,. \tag{37}$$

Er steht senkrecht auf dem Flächenelement und weist nach „oben" in z-Richtung (Rechtssystem).

4.3. Ebene

Ausgehend von der allgemeinen Form einer Ebenengleichung

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + a_4 = 0 \tag{38}$$

ist das Rechenprogramm für die Darstellung in der *Hesse*-schen Normalform vorbereitet, so daß Gl. (38) durch den Betrag

$$s = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{39}$$

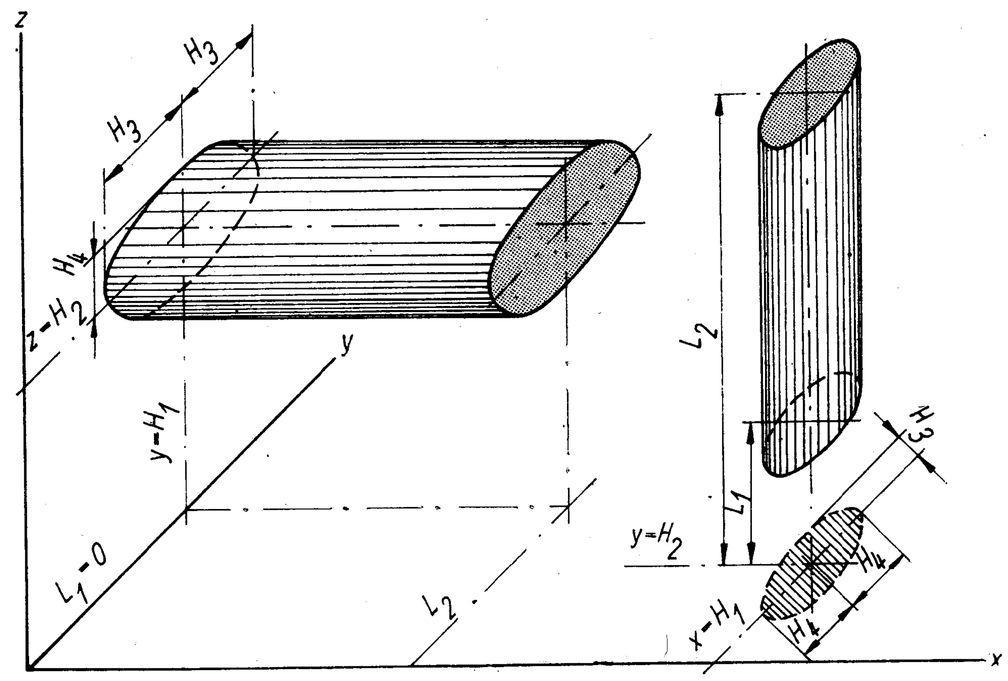
dividiert mit

$$A_1 = \frac{a_1}{s};\ A_2 = \frac{a_2}{s};\ A_3 = \frac{a_3}{s};\ A_4 = \frac{a_4}{s}$$

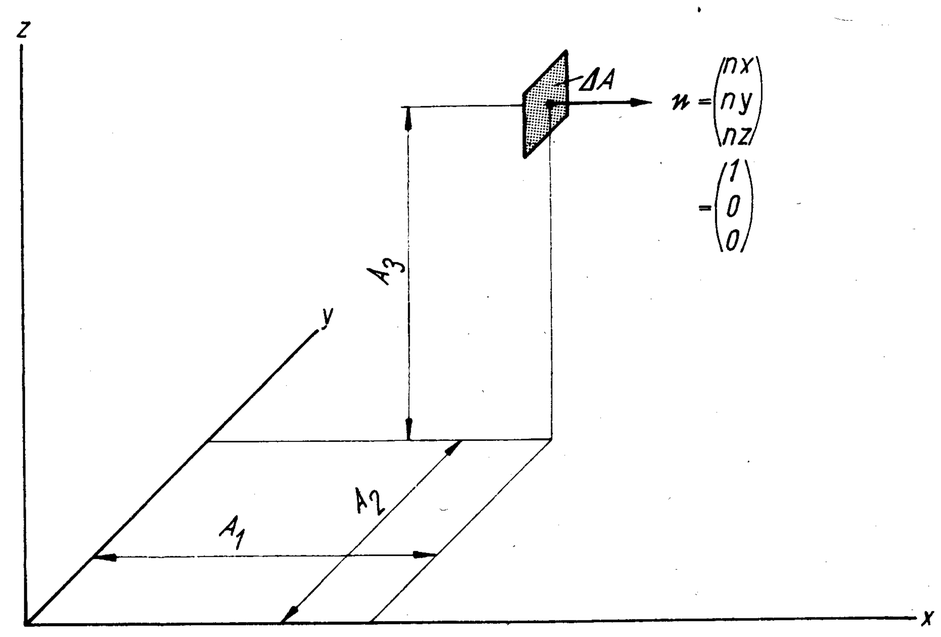
folgt

$$A_1 \cdot x + A_2 \cdot y + A_3 \cdot z + A_4 = 0\,. \tag{40}$$

Somit sind die Koeffizienten A_1 bis A_4, für die Begrenzungen E_1 bis E_{16}, die Richtung des Normalenvektors N, sowie die Schrittweiten Δx und Δy einzugeben.

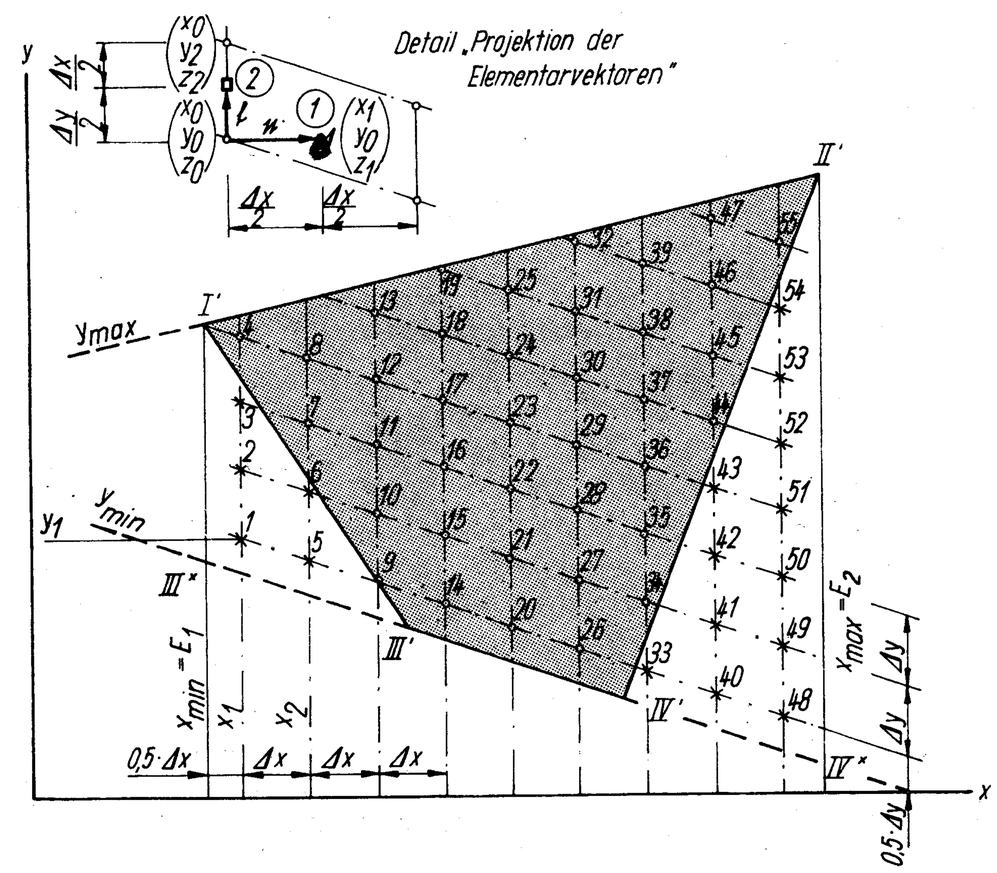


5



6

7



Da die Ebenengleichung in der *Hesse*schen Normalform gewählt wurde, ergibt sich der Normalenvektor als „Einsvektor" sofort zu

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} . \tag{41}$$

Dieser Vektor weist vom Koordinatenursprung weg und steht senkrecht auf der Ebene. Der Vektor gilt für jeden Punkt der Ebene.

Der Inhalt des Flächenelementes kann nach Gl. (35) und (36) berechnet werden. Er ist ebenfalls für alle Netzpunkte der Ebene gleich groß. Die Differenzen

$$z_1 - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} = -\frac{A_1}{A_3} \cdot \frac{\Delta x}{2} \tag{42}$$

$$z_2 - z_0 = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} = -\frac{A_2}{A_3} \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

in die vorgenannten Gleichungen eingesetzt, ergibt

$$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{A_1}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^2} \tag{43}$$

Die schrittweise Abarbeitung der projizierten Grundfläche erfolgt analog Pkt. 4.2. Lediglich die Berechnung der z-Koordinate vereinfacht sich zu

$$z = -\frac{A_4 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot y}{A_3} .$$

Durch zyklische Vertauschung der Koordinaten x, y, z erhält man die analogen Ableitungen für Ebenen, die auf die y,z- und z,x-Ebene eine Projektion ergeben.

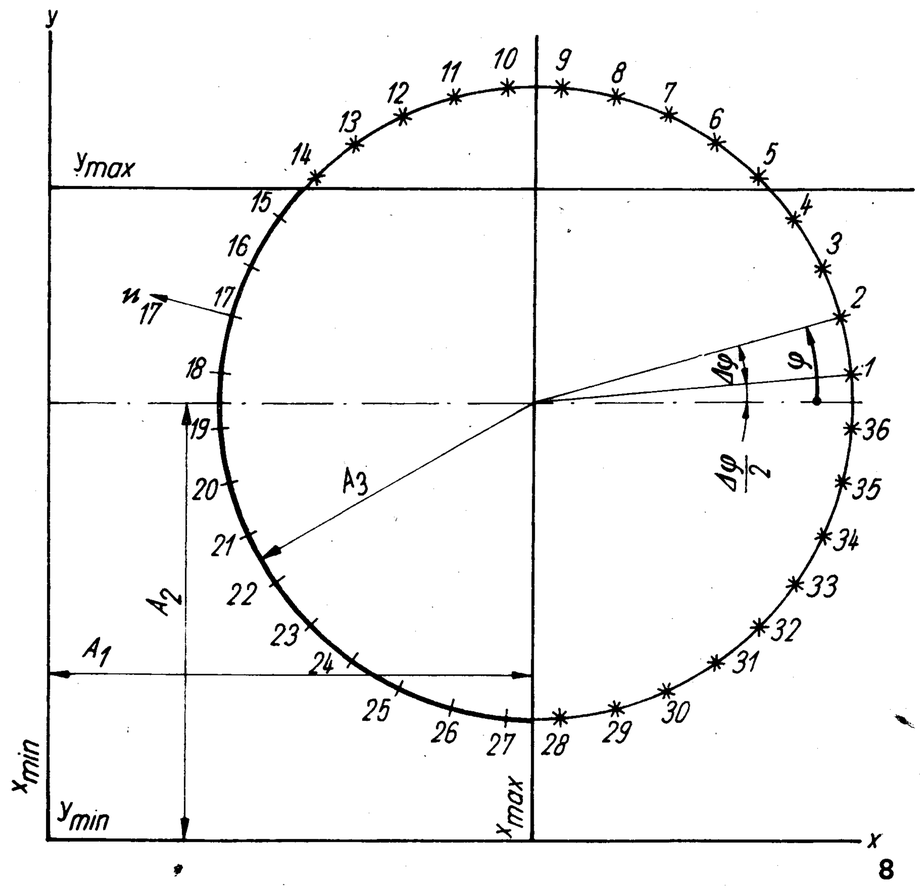
4.4. Kreiszylinder

Für den koordinatentransformierten Grundkreis eines zur z-Achse parallelen Zylinders gilt nach Bild 8 die Parameterdarstellung

$$x = A_1 + A_3 \cdot \cos\varphi \tag{44}$$

$$y = A_2 + A_3 \cdot \sin\varphi . \tag{45}$$

Einzugeben sind somit die Koeffizienten A_1 bis A_3, die Koeffizienten E_1 bis E_{12} (die kugelförmige Begrenzung



8

wurde nicht mit aufgenommen), die Schrittweiten Δz und $\Delta\varphi$ sowie die Richtung des Normalenvektors N.

Der Normalenvektor als „Einsvektor" ergibt sich zu

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{46}$$

und der Inhalt des Flächenelementes zu

$$\Delta A = A_3 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta\varphi}{180°} \cdot \Delta z . \tag{47}$$

Ausgehend von $\varphi_1 = 0{,}5 \cdot \Delta\varphi$ werden in Bild 8 36 Berechnungsschritte durchgeführt, wobei die mit „Stern" gekennzeichneten Punkte auf Grund der Begrenzung y_{max} und x_{max} ausscheiden. Die Höhe des Zylindermantels wird durch Ebenen der Gl. (13) begrenzt. Ist keine weitere Begrenzung erforderlich, so setzt man zweckmäßigerweise $x_{min} = 0$ und $y_{min} = 0$.

Durch zyklische Vertauschung der Koordinaten x, y, z erhält man die analogen Ableitungen für die auf den y,z- und z,x-Ebenen stehenden Zylinder.

(Wird fortgesetzt)