Temperaturdynamik in Rohrleitungen

Dr. sc. techn. B. GLUCK
VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung – Institut

Kenntnisse über den Temperaturverlauf in einer strömenden Flüssigkeit als Funktion der Zeit- und Ortskoordinate werden in zunehmendem Maße auch für die Heizungstechnik interessant. Sie sind beispielsweise für regelungstechnische und wärmewirtschaftliche Untersuchungen grundlegend. Fragestellungen zum Übertragungsverhalten und zum Wärmespeichervermögen von Wärmenetzen können somit einer theoretischen Lösung näher gebracht werden. Die thermodynamischen und hydraulischen Gesetzmäßigkeiten, die die Energiebewegung im strömenden Medium beschreiben, sind bekannt. Es soll daraus ein allgemeingültiges, mathematisches Modell formuliert werden, aus dem sich für konstante Randbedingungen dann die üblichen Zusammenhänge — wie Temperaturabfall längs der Rohrleitung bei stationärer Flüssigkeitsströmung oder der Temperaturabfall als Zeitfunktion bei stagnierendem Medium — ergeben. Da diese an sich bekannten Verhältnisse jedoch oft fehlerhaft ausgelegt werden, sollen die Zusammenhänge umfassend und nach verschiedenen Methoden abgeleitet werden.

1. Ableitung der Temperaturfunktion

Für das im Bild 1 dargestellte infinitesimale Element wird für den Zeitraum $d\tau$ eine Energiebilanz aufgestellt. Die zugeführten Energien sind dabei positiv, die abströmenden Energien negativ gewertet. Es gilt für die Energieerhöhung des Elements

$$dE = dQ_1 + dE_1 + dL_1 - dQ_2 - dQ_U - dE_2 - dL_2 \qquad (1)$$

Im weiteren werden die Summanden näher charakterisiert:

— dQ_1, dQ_2 stellen die durch Wärmeleitung an den Rohrquerschnittsflächen A übertragenen Wärmemengen dar:

$$dQ_1 = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} A \, d\tau; \; dQ_2 = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx\right) A \, d\tau. \qquad (2)$$

— dQ_U ist die an die Umgebung übertragene Wärmemenge:

$$dQ_U = k\,(t - t_U)\, U \, dx \, d\tau. \qquad (3)$$

— dE_1, dE_2 sind die von den Massenteilchen durch die charakterisierten Rohrquerschnitte transportierten Energiemengen. Sie setzen sich aus der inneren Energie ($u dm$), der kinetischen Energie ($w^2 dm/2$) und der potentiellen Energie ($gz\, dm$) zusammen:

$$dE_1 = \left(u_1 + \frac{w_1^2}{2} + gz_1\right) dm_1;$$

$$dE_2 = \left(u_2 + \frac{w_2^2}{2} + gz_2\right) dm_2. \qquad (4)$$

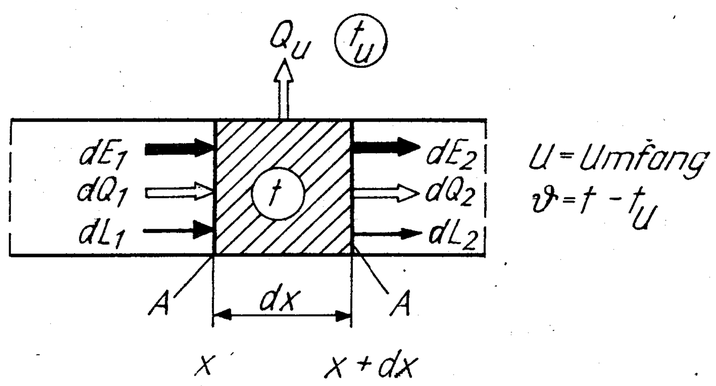
Bei der weiteren Auswertung wird angenommen, daß ein kontinuierlicher Massenstrom durch das Rohr fließt ($dm_1 = dm_2 = dm$) und daß die Geschwindigkeiten und Höhen gleich sind ($w_1 = w_2$; $z_1 = z_2$).
Die Größe dm ist durch die Strömungsgeschwindigkeit w festgelegt. Es gilt:

$$dm = \varrho A w \, d\tau. \qquad (5)$$

— dL_1, dL_2 verkörpern die mechanischen Arbeiten, die beim Ein- und Ausschieben des Massenelementes dm mit dem System getauscht werden (ein Austausch von technischer Arbeit kann bei einem einfachen Rohr nicht erfolgen):

$$dL_1 = p_1 v_1 \, dm; \; dL_2 = p_2 v_2 \, dm. \qquad (6)$$

1



— dE stellt die Energieerhöhung des infinitesimalen Massenteilchens dar. Als spezifische Wärme ist dabei c_p einzusetzen, da sich der mittlere Druck im betrachteten Element bei einer Temperaturänderung infolge der offenen Systemgrenzen nicht ändert.

$$dE = c_p \varrho \frac{\partial t}{\partial \tau} A \, dx \, d\tau. \qquad (7)$$

Das Einsetzen der in den Gln. (2) bis (7) definierten Summanden in die Gl. (1) ergibt

$$c_p \varrho \frac{\partial t}{\partial \tau} A \, dx \, d\tau = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} A \, dx \, d\tau - k\,(t - t_U)\, U \, dx \, d\tau +$$
$$+ (u_1 - u_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2)\, \varrho A w \, d\tau$$

und mit Einführung der Enthalpiedifferenz

$$u_1 + p_1 v_1 - u_2 - p_2 v_2 = h_1 - h_2 = -c_p \frac{\partial t}{\partial x} dx$$

schließlich

$$c_p \varrho \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + w \frac{\partial t}{\partial x}\right) A \, dx \, d\tau =$$
$$\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} A \, dx \, d\tau - k\,(t - t_U)\, U \, dx \, d\tau. \qquad (8)$$

Die Druckabhängigkeit der spezifischen Enthalpie bei konstanter Temperatur kann bei Wasser in den praktisch vorkommenden Druckbereichen vernachlässigt werden $[(\partial h/\partial p)_t \approx 0]$. Der Einfachheit halber wird im weiteren c statt c_p geschrieben.

Anmerkung

Zur Gl. (8) kann man auch auf andere Art gelangen. Ausgehend von der Wärmebilanz

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 - dQ_U$$

mit der Speicherwärme

$$dQ = c \varrho \frac{dt}{d\tau} A \, dx \, d\tau$$

und den in den Gln. (2) und (3) definierten Größen, ist für die Temperaturerhöhung im Element $dt/d\tau$ das vollständige Differential zu bilden. Dieses besteht aus einer zeitlichen und örtlichen Ableitung. Das Differential wird vielfach auch als substantielle Ableitung $Dt/d\tau$ bezeichnet. Es gilt

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} w,$$

wobei w die Geschwindigkeit in x-Richtung darstellt. Vereinbarungsgemäß wird nur eine eindimensionale Strömung betrachtet, weshalb die Ableitungen in y- und z-Richtung entfallen.
Durch Substitution errechnet sich

$$dQ = c \varrho \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} + w \frac{\partial t}{\partial x}\right) A \, dx \, d\tau$$

und bei weiterem Einsetzen in die Wärmebilanz wiederum Gl. (8).
In Gl. (8) kann die kleine Größe zweiter Ordnung gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden. Damit ergibt sich die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -w \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{kU}{c \varrho A}(t - t_U) \qquad (9)$$

bzw. mit der Übertemperatur

$$\vartheta = t - t_U \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -w \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{kU}{c \varrho A} \vartheta. \qquad (11)$$

Die Lösung muß schrittweise erarbeitet werden. Ausgehend von der Rumpfdifferentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \qquad (12)$$

folgt die Differentialgleichung der Niveaulinien

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{w}. \tag{13}$$

Daraus schließlich folgen die Charakteristiken zu

$$C_1 = \frac{x}{w} - \tau \text{ und } C_2 = \vartheta. \tag{14}$$

Durch Kopplung der Parameter erhält man

$$C_2 = C\,(C_1) \text{ und } \vartheta = C\left(\frac{x}{w} - \tau\right). \tag{15}$$

Die Einführung der Variablen

$$\xi = \frac{x}{w} - \tau \text{ und } \eta = \frac{x}{w} + \tau \tag{16}$$

ergibt den allgemeinen funktionellen Zusammenhang

$$\vartheta\,(x, \tau) \equiv \vartheta^* \left[\xi\left(\frac{x}{w} - \tau\right);\ \eta\left(\frac{x}{w} + \tau\right)\right]. \tag{17}$$

Das Bilden der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi}\,\frac{1}{w} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta}\,\frac{1}{w} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi}\,(-1) + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta} \tag{19}$$

ergibt nach Substitution in Gl. (11) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta^*}{\mathrm{d}\eta} + \frac{k\,U}{2c\varrho\,A}\,\vartheta^* = 0, \tag{20}$$

deren Lösung sofort folgt

$$\ln \frac{\vartheta^*}{C(\xi)} = -\frac{k\,U}{2c\varrho\,A}\,\eta. \tag{21}$$

Diese Lösung ergibt sich auch bei veränderter Vorzeichenfestlegung für ξ in Gl. (16).
Entsprechend dem funktionellen Zusammenhang muß die Integrationskonstante von der Variablen ξ abhängig sein, so daß unter Verwendung von Gl. (16)

$$\vartheta = C\left(\frac{x}{w} - \tau\right) \mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{2\,\varrho c A}\left(\frac{x}{w} + \tau\right)} \tag{22}$$

gilt.
Die Bestimmung der Konstanten erfolgt mit Hilfe der Anfangsbedingung. Allgemein gilt dafür

$$\vartheta_0(x_0, \tau_0) = C\left(\frac{x}{w} - \tau\right) \mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{2\,c\varrho A}\left(\frac{x_0}{w} + \tau_0\right)}, \tag{23}$$

woraus nach dem Einsetzen in Gl. (22)

$$\vartheta = \vartheta_0(x_0, \tau_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{2\,c\varrho A}\left[(x - x_0)\,\frac{1}{w} + (\tau - \tau_0)\right]} \tag{24}$$

folgt. ϑ_0 stellt eine beliebige, stetige differenzierbare Funktion dar. Es ist am einfachsten mit der Übertemperatur zu rechnen. Eine Rücktransformation auf t ist jedoch ohne weiteres möglich. Bei den weiteren Betrachtungen ist der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des jeweiligen Berechnungspunktes (x, τ) und denen des Anfangspunktes (x_0, τ_0) herzustellen. Allgemein können x_0 und τ_0 Funktionen von (x, τ) sein. Es werden zwei Spezialfälle untersucht.

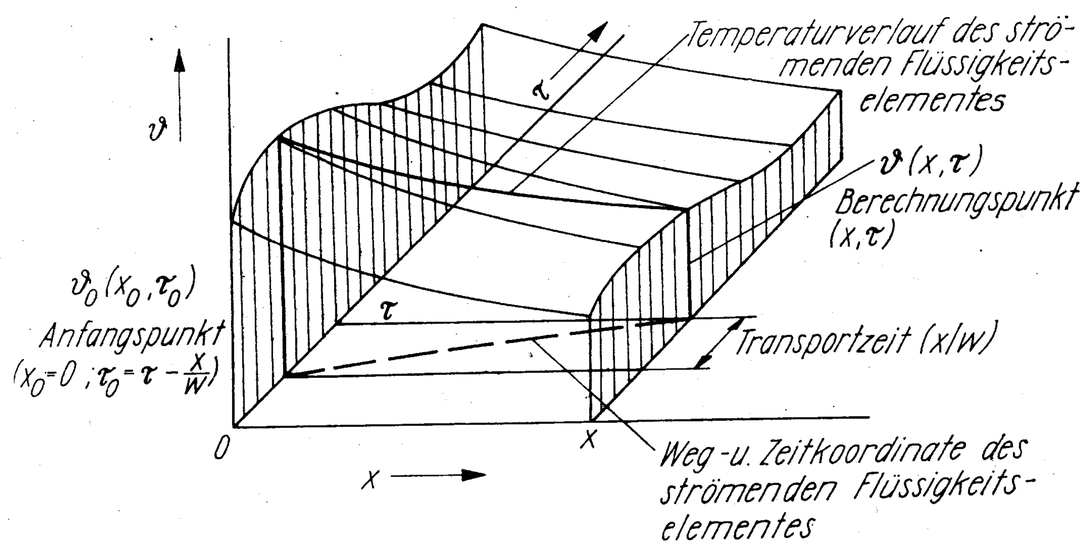
Variante 1

Für den Anfangspunkt einer Rohrleitung $x_0 = 0$ ist die Übertemperatur als Zeitfunktion bekannt. Nach Bild 2 gilt für $\tau_0 = \tau - x/w$, so daß Gl. (24) die spezielle Form

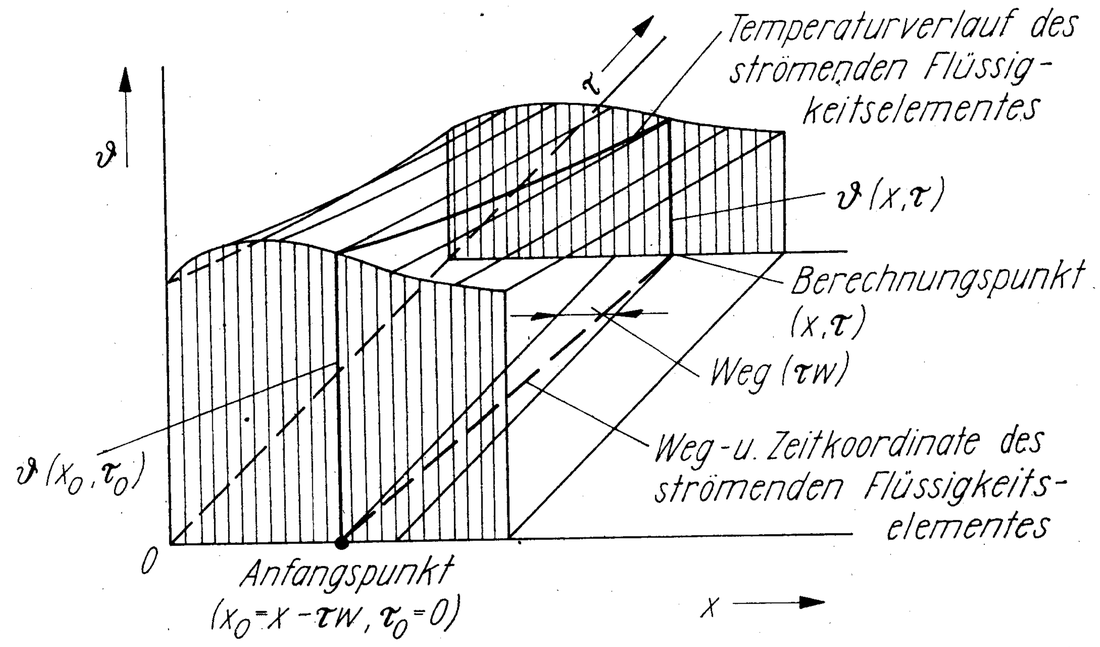
$$\vartheta = \vartheta_0\left(0, \tau - \frac{x}{w}\right) \mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{c\varrho A}\,\frac{x}{w}}$$

$$= \vartheta_0\left(0, \tau - \frac{x}{w}\right) \mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{c\,m}\,x} \tag{25}$$

annimmt.
Bei $k = 0$, $x = 0$ oder $w = \infty$ ergibt Gl. (25) $\vartheta = \vartheta_0$, d. h., es tritt keine Abkühlung der Flüssigkeit ein.



2



3

Variante 2

Längs der Rohrleitung ist für die Zeit $\tau_0 = 0$ der Verlauf der Übertemperatur bekannt. Nach Bild 3 gilt $x_0 = x - \tau w$.
Gl. (24) erhält dann die Form

$$\vartheta = \vartheta_0\,(x - \tau w, 0)\,\mathrm{e}^{-\frac{k\,U}{c\varrho A}\,\tau} = \vartheta_0\,(x - \tau w, 0)\,\mathrm{e}^{-\frac{k\,U\,l}{c\,m}\,\tau} \tag{26}$$

Darin bedeutet m die im Rohrabschnitt l enthaltene Flüssigkeitsmasse.

Anmerkung 1

Bei der grundlegenden Ableitung wurde das Wärmespeichervermögen der Rohrleitung und der Wärmedämmschicht vernachlässigt. Wollte man dies berücksichtigen, dann müßte Gl. (3) so formuliert werden, daß an Stelle der Umgebungstemperatur t_U die Materialtemperaturen der Rohrwand bzw. der Dämmung treten. Für diese Rohrwandelemente sind dann die Differentialgleichungen, die die instationären Temperaturfelder beschreiben, sowie die entsprechenden Randbedingungen aufzustellen. Damit ergibt sich jedoch ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen, deren Lösung einige Probleme bereitet. Da die Wärmekapazität der Wassermasse im Rohr in der Regel zehnmal größer als die des Stahlrohres ist und die übrigen Annahmen — z. B. für die Umgebungstemperatur — relativ ungenau sind, können die vorgeschlagenen Gleichungen durchaus für die praktischen Berechnungen benutzt werden.

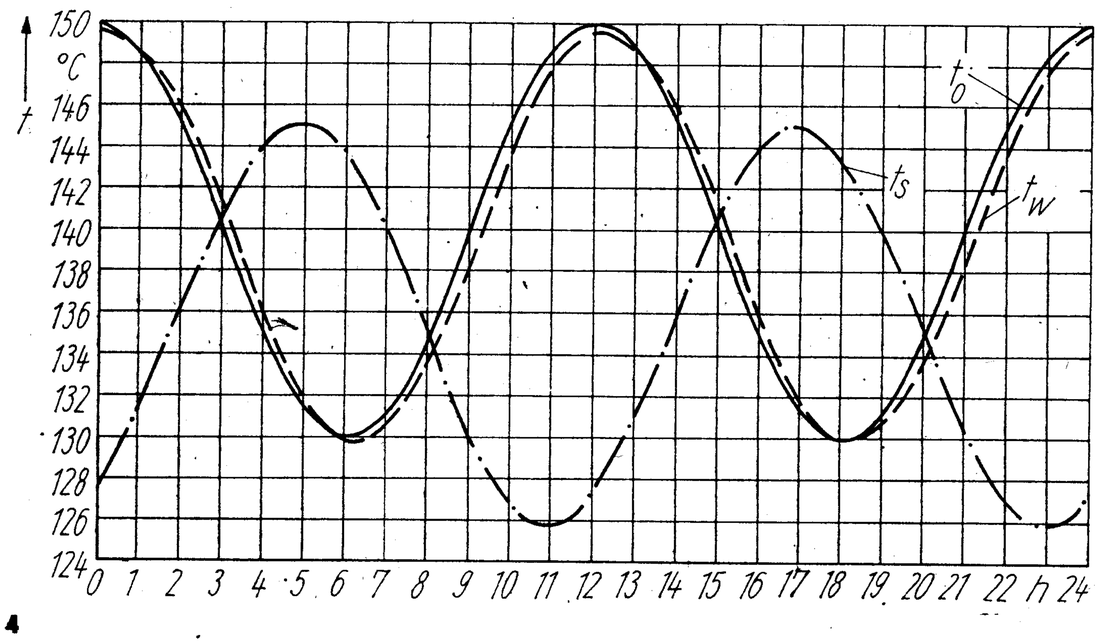
In Sonderfällen — z. B. beim Auskühlen einer Rohrleitung mit unbewegter Flüssigkeit (Abschnitt 3.3.) — ist die Berücksichtigung der Wärmekapazität des Strömungskanals ohne Schwierigkeiten möglich.

Anmerkung 2

Die stationären energetischen Vorgänge in den einzelenen Rohrleitungsabschnitten sowie im gesamten Netz werden durch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik quantitativ bilanziert. So gelten bei Vernachlässigung der kinetischen und potentiellen Energie für die zwischen den Rohrquerschnitten 1 und 2 zugeführte technische Arbeit je Zeiteinheit $\dot{L}_{t,12}$ die allgemeingültigen Beziehungen

$$\dot{L}_{t,12} = \dot{m}\,(h_2 - h_1) - \dot{Q}_{12}$$

$$\dot{L}_{t,12} = \int_1^2 \dot{V}\,\mathrm{d}p + \dot{L}_{\mathrm{diss},\,12}.$$



4

Darin bedeuten: $\dot{m}$ — Massenstrom, h — spezifische Enthalpie, $\dot{V}$ — Volumenstrom, p Druck, $\dot{Q}$ — dem System zugeführter Wärmestrom und $\dot{L}_{diss}$ — dissipative Arbeit (Reibungsarbeit) je Zeiteinheit. Technische Arbeit wird nur am Einbauort der Pumpe zugeführt, bei allen übrigen Rohrleitungsabschnitten ist $\dot{L}_t = 0$. Weiterhin ist bei Annahme einer inkompressiblen Flüssigkeit das in der zweiten Gleichung angegebene Integral gleich $\dot{V}(p_2 - p_1)$. Damit ergeben sich folgende einfache Feststellungen:

— Der Druckabfall in der Rohrleitung ist vollkommen irreversibel; es gilt
$\dot{L}_{diss,12} = -\dot{V}(p_2 - p_1)$.

— Der von einer Rohrleitung abgegebene Wärmestrom hat lediglich die Abnahme des Enthalpiestroms zur Folge
$\dot{Q}_{12} = \dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{m}\, c_p (t_2 - t_1)$.
Die Enthalpiedifferenz enthält auch die Unterschiede zwischen der Ein- und Ausschubarbeit $\dot{V}(p_2 - p_1)$ an den betrachteten Rohrquerschnitten. Der Betrag entspricht gerade der dissipativen Arbeit je Zeiteinheit infolge der Rohrreibung.

— Am Einbauort der Pumpe ist $\dot{L}_{t,12} > 0$.

Bei einem Rohrleitungssystem, das zwischen den Punkten 1, 2, 3, 4 aus drei Rohrabschnitten besteht und das zwischen den Punkten 4 und 1 eine Pumpe enthält, ergeben sich folgende Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{m}(h_2 - h_1) - \dot{Q}_{12} \\ 0 &= \dot{m}(h_3 - h_2) - \dot{Q}_{23} \\ 0 &= \dot{m}(h_4 - h_3) - \dot{Q}_{34} \\ \dot{L}_{t,41} &= \dot{m}(h_1 - h_4) - \dot{Q}_{41} \\ \hline \dot{L}_{t,41} &= \quad 0 \quad - \sum_i \dot{Q}_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= \dot{V}(p_2 - p_1) + \dot{L}_{diss,12} \\ 0 &= \dot{V}(p_3 - p_2) + \dot{L}_{diss,23} \\ 0 &= \dot{V}(p_4 - p_3) + \dot{L}_{diss,34} \\ \dot{L}_{t,41} &= \dot{V}(p_1 - p_4) + \dot{L}_{diss,41} \\ \hline \dot{L}_{t,41} &= \quad 0 \quad + \sum_i \dot{L}_{diss,i} \end{aligned}$$

Die Summenbildung führt zu folgenden trivialen Aussagen:

— Die gesamte zugeführte technische Arbeit wird irreversibel in Reibungsarbeit verwandelt und als Wärmestrom nach außen abgegeben.

— Die Summe aller Enthalpieänderungen ist Null.

— Die Summe aller Druckänderungen ist Null.

Während die beiden letztgenannten Bilanzen zur üblichen Bemessungspraxis gehören, wird die Pumpenleistung bei der Wärmebilanz meistens vernachlässigt. Dieser Anteil zur Gesamt-Wärmezufuhr am Wassererwärmer liegt bei üblichen Wohngebietsnetzen bei 0,2...0,4 Prozent. Die fühlbare Temperaturerhöhung des Massenstroms bei einer sofortigen Umsetzung der zugeführten technischen Arbeit ergäbe Werte von nur etwa 0,1...0,2 K.

2. Beispiel

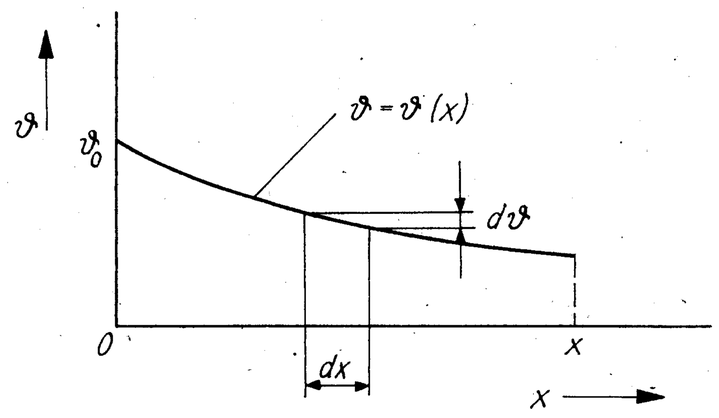
Ein Wärmeerzeuger liefert Heißwasser in eine 1400 m lange Transitleitung zu einem Wohngebiet mit periodisch schwankender Vorlauftemperatur

$$t_0 = 140\,°\mathrm{C} + 10\ \mathrm{K} \cdot \sin\left(\frac{\tau_0}{12}\,2\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

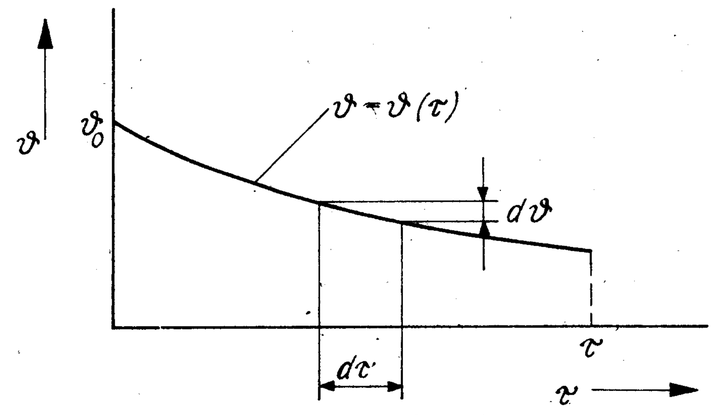
wobei τ in h zu zählen ist und $\tau_0 = 0$ der Zeit 0.00 Uhr entspricht. Es gelten weiterhin die Parameter:

NW 400; $A = 0{,}132\ \mathrm{m}^2$; $U = 1{,}29$ m; $k = 0{,}9\ \mathrm{W/m^2K}$;
$c = 4285$ Ws/kg K; $\varrho = 926\ \mathrm{kg/m^3}$.

Dabei beziehen sich Umfang und Wärmedurchgangskoeffizient jeweils auf den Rohrinnendurchmesser.



5



6

Es ist der Temperaturverlauf am Ende der Rohrleitung für

Winterbetrieb $t_U = -15\,°\mathrm{C}$ $w = 1{,}5$ m/s
Sommerbetrieb $t_U = +20\,°\mathrm{C}$ $w = 0{,}08$ m/s

zu ermitteln.

Lösung

Ausgehend von Gl. (25) und der gegebenen Temperaturkurve ergeben sich für Winterbetrieb

$$\vartheta_W = \left\{ 140 + 15 + 10 \left[\sin\left(\frac{\tau - \dfrac{1400}{1{,}5 \cdot 3600}}{6} + 0{,}5 \right) \pi \right] \right\} e^{-\frac{0{,}9 \cdot 1{,}29 \cdot 1400}{4285 \cdot 926 \cdot 0{,}132 \cdot 1{,}5}}\ \mathrm{K} - 15\,°\mathrm{C}$$

Sommerbetrieb

$$\vartheta_S = \left\{ 140 - 20 + 10 \left[\sin\left(\frac{\tau - \dfrac{1400}{0{,}08 \cdot 3600}}{6} + 0{,}5 \right) \pi \right] \right\} e^{-\frac{0{,}9 \cdot 1{,}29 \cdot 1400}{4285 \cdot 926 \cdot 0{,}132 \cdot 0{,}08}}\ \mathrm{K} + 20\,°\mathrm{C}$$

Die Ergebnisse sind im Bild 4 aufgezeichnet. Dabei wird deutlich, daß beispielsweise bei Vollast-Winterbetrieb die Zeitverschiebung und der Temperaturabfall gering sind, während beide Werte bei Minimallast-Sommerbetrieb eine beachtliche Größe aufweisen.

3. Temperaturänderung bei konstanten Anfangsbedingungen

Entsprechend den im Abschnitt 1. vorgestellten Varianten, die auch in den Bildern 2 und 3 veranschaulicht wurden, besteht theoretisch die Möglichkeit, von einer stets konstanten Temperatur am Anfang der Rohrleitung ($x_0 = 0$) aber auch von einer stets konstanten Temperatur längs der Rohrleitung zur Zeit ($\tau_0 = 0$) auszugehen. Deshalb ergeben sich im folgenden zwei unterschiedliche Betrachtungen.

3.1. Temperaturabfall in Funktion des Weges

Ausgehend von $\vartheta_0(x_0, \tau_0) = \vartheta_0 = \text{const.}$ folgt aus Gl. 25)

$$\vartheta = \vartheta_0\, e^{-\frac{kU}{c\varrho A}\frac{x}{w}} = \vartheta_0\, e^{-\frac{kU}{c\dot{m}}x}, \tag{27}$$

wenn am Anfang der Rohrleitung die Koordinate $x_0 = 0$ gilt. Ausgehend von den Bezeichnungen nach Bild 1 und dem Verlauf der Übertemperatur gemäß Bild 5, kann eine stark verkürzte Ableitung erfolgen, die ebenfalls zu obigem Ergebnis führt:

$$-c\dot{m}\, d\vartheta = k\, U\, \vartheta\, dx$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{kU}{c\dot{m}} \int_0^x dx,$$

$$\vartheta = \vartheta_0\, e^{-\frac{kU}{c\dot{m}}x}.$$

3.2. *Beispiel*

Eine Rohrleitung mit einem Innendurchmesser von $d_i = 51{,}2$ mm wird kontinuierlich mit einem Massenstrom $\dot{m} = 0{,}69$ kg/s und $t_0 = 110\,°C$ beaufschlagt. Der Wärmedurchgangskoeffizient betrage — bezogen auf den Innendurchmesser — $k = 0{,}8$ W/m²K. Es ist zu überprüfen, welche Temperatur sich am Ende der Rohrleitung ($l = 800$ m) bei einer Umgebungstemperatur von $t_U = -10\,°C$ einstellt.

Lösung

Da die notwendigen Daten in der Aufgabenstellung bereits gegeben wurden, kann sofort in Gl. (27) eingesetzt werden ($c \approx 4230$ Ws/kg K). Es ergibt sich die Austrittstemperatur

$$t - (-10\,°C) = [110 - (-10)]\ \mathrm{K} \cdot e^{-\frac{0{,}8\,\pi \cdot 0{,}0512}{4230 \cdot 0{,}69}\,800}$$

$$t = 105{,}8\,°C.$$

3.3. *Temperaturabfall in Funktion der Zeit*

Für $\vartheta_0(x_0, \tau_0) = \vartheta_0 = \text{const.}$ ergibt sich aus Gl. (26)

$$\vartheta = \vartheta_0\, e^{-\frac{k\,U}{c\,\varrho A}\tau} = \vartheta_0\, e^{-\frac{k\,U\,l}{c\,m}\tau} \tag{28}$$

als Abkühlfunktion einer Rohrleitung der Länge l mit der Flüssigkeitsmasse m, wenn zur Zeit $\tau_0 = 0$ an allen Stellen die konstante Übertemperatur ϑ_0 vorlag. Auch diese Ableitung läßt sich vereinfacht an Hand der Bilder 1 und 6 gewinnen. Es gelten:

$$-cm\,d\vartheta = k\,U\,l\,\vartheta\,d\tau$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\frac{k\,U\,l}{cm} \int_0^{\tau} d\tau; \quad \vartheta = \vartheta_0\, e^{-\frac{k\,U\,l}{c\,m}}.$$

Bei der Ableitung kann relativ einfach auch das Wärmespeichervermögen des Stahlrohrs mit einbezogen werden, wenn näherungsweise die mittlere Temperatur der Rohrwand gleich der der Flüssigkeit gesetzt wird. Dies ist vertretbar, da der Wärmeübergang von der Flüssigkeit an die Wand gut, die Wärmeleitfähigkeit des Stahls sehr groß und die Rohrwanddicken klein sind. Damit ist für das Produkt $(c\varrho A)$ bzw. (cm) in Gl. (28) die Summe der Wärmekapazitäten des Wassers und des Stahls einzusetzen. Somit gilt

$$(c\varrho A)_W + (c\varrho A)_{Stahl} \text{ bzw. } (cm)_W + (cm)_{Stahl}$$

oder bei Orientierung auf die Wärmekapazität des Wassers im Rohr

$$(c\varrho A)_W \left[1 + \frac{(c\varrho A)_{Stahl}}{(c\varrho A)_W}\right] \text{ bzw. } (cm)_W \left[1 + \frac{(cm)_{Stahl}}{(cm)_W}\right].$$

Die Berechnung nach Gl. (28) kann damit auch bei Berücksichtigung des Wärmespeichervermögens der Stahlrohre vorgenommen werden, indem für die Terme $(c\varrho A)$ bzw. (cm) die Werte für den Wasserinhalt einzusetzen und der Faktor $\mu = [1 + (cm)_{Stahl}/(cm)_W]$ hinzuzufügen sind. Der Faktor μ ist für übliche Stahlrohrleitungen, die in der Heizungstechnik eingesetzt werden, in Tabelle 1 aufgeführt.

Damit gilt

$$\vartheta = \vartheta_0\, e^{-\frac{k\,U}{(c\varrho A)_W\,\mu}\tau} = \vartheta_0\, e^{-\frac{k\,U\,l}{(c\,m)_W\,\mu}\tau}. \tag{29}$$

3.4. *Beispiel*

Eine Rohrleitung NW 65 ($d_i = 70{,}2$ mm) wird von Wasser mit einer Temperatur von 100 °C durchströmt. Zur Zeit $\tau_0 = 0$ wird der Durchfluß gestoppt. Der Wärmedurchgangskoeffizient beträgt $k = 1{,}0$ W/m² K. Er ist auf den Rohrinnendurchmesser bezogen. Es ist zu prüfen, nach wieviel Stunden Stillstandzeit bei $t_U = -20\,°C$ Einfriergefahr besteht. Die Wärmekapazität der Stahlrohrleitung soll zunächst unberücksichtigt bleiben, bei einer weiteren Berechnung jedoch einbezogen werden.

Lösung

Gl. (28) wird nach

$$\tau = \frac{c\varrho A}{k\,U} \ln \frac{\vartheta_0}{\vartheta}$$

aufgelöst. Die Übertemperatur zu Beginn des Stillstands beträgt $\vartheta_0 = 120$ K. Am Ende der zulässigen Stillstandszeit τ darf das Wasser auf 0 °C abgekühlt sein. Dies entspricht einer Übertemperatur von $\vartheta = 20$ K. Während zur Bestimmung der Masse die

Tabelle 1

Rohr-Nennweite	μ	$\mu_{Mittelwert}$
500	1,081	
400	1,089	
350	1,080	1,09
300	1,087	
250	1,091	
200	1,105	
150	1,107	
125	1,114	
100	1,134	
80	1,143	
65	1,156	1.15
50	1 195	
40	1,238	
32	1,345	
25	1,471	
20	1,483	1,50
15	1,671	
10	1,779	

Dichte bei Anfangstemperatur ($\varrho = 958$ kg/m³) eingesetzt wird, werde für die spezifische Wärmekapazität ein Mittelwert gewählt ($c = 4190$ Ws/kg K). Damit ergibt sich

$$\tau = \frac{4190 \cdot 958 \cdot \pi \cdot 0{,}0702^2}{1{,}0\,\pi\,0{,}0702 \cdot 4} \ln \frac{120}{20}\ \mathrm{s}$$

$$\tau = 126\,222\ \mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 35{,}1\ \mathrm{h}.$$

Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Wärmekapazität der Stahlrohrleitung ergibt sich die Berechnungsgleichung (29), die aufgelöst nach der Zeit

$$\tau = \frac{(c\varrho A)_W \mu}{k\,U} \ln \frac{\vartheta_0}{\vartheta}$$

lautet.

Das Einsetzen liefert unter Beachten von $\mu = 1{,}156$ nach Tabelle 1

$$\tau = \frac{4190 \cdot 958 \cdot \pi \cdot 0{,}0702^2 \cdot 1{,}156}{1{,}0 \cdot \pi \cdot 0{,}0702 \cdot 4} \ln \frac{120}{20}\ \mathrm{s}$$

$$\tau = 145\,913\ \mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 40{,}5\ \mathrm{h}.$$