Einstrahlzahlen von „Punkten", infinitesimalen Kugeln und endlichen Kugeln auf Flächen

Dr. sc. techn. Bernd GLÜCK
VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung – Institut –

Kollmar, der sich um die Berechnung der Einstrahlzahlen große Verdienste erwarb, gab unter anderem auch eine Berechnungsformel für die sogenannte Punktstrahlung an. Ein geometrischer Punkt kann keine Strahlung emittieren oder absorbieren. Deshalb wurde häufig von einem „materiellen" Punkt gesprochen.
Von vielen auf dem Gebiet der Wärmephysiologie arbeitenden Forschern wurde die Formel für die Punktstrahlung verwendet. Es blieb aber stets das Unbehagen, mit einer eventuell groben Näherung zu arbeiten, denn bei den Betrachtungen hinsichtlich der thermischen Behaglichkeit wurden sehr oft Kugelthermometer mit natürlich endlichen Durchmessern für die Messung der Empfindungstemperatur zugrunde gelegt. Bei der Ermittlung der optimalen Kugeldurchmesser müssen die physikalischen Wärmeübertragungsbedingungen mathematisch richtig nachgebildet werden. Dabei blieb der erwähnte Zweifel über den möglichen Fehler der Einstrahlzahl. Das Gleiche gilt auch für die modellhafte Approximation des menschlichen Kopfes oder des gesamten Körpers als Kugel, die verschiedene Wissenschaftler als Grundlage für ein „Behaglichkeitsmodell" wählten.
In /1/ konnte die Einstrahlzahl für eine Kugel mit infinitesimaler Oberfläche auf eine Ebene abgeleitet werden. Das Ergebnis entsprach erwartungsgemäß dem der Punktstrahlung. Die Ableitung sei zum weiteren Verständnis kurz skizziert.
Nach Bild 1 sendet die kleine Kugel mit der Oberfläche dA_1 die Strahlung

$$dE_1 = \varepsilon_1 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad dA_1 \tag{1}$$

aus. In dem vom Flächenelement dA_2 aufgespannten Raumwinkel $d\Omega_1$ wird – bezogen auf den gesamten Raumwinkel 4π – der Anteil

$$d^2E_1 = \varepsilon_1 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad dA_1 \frac{d\Omega_1}{4\pi} \tag{2}$$

emittiert. Entsprechend dem Absorptionskoeffizienten a_2 wird von dA_2 nur ein Teil der in das Raumwinkelelement

$$d\Omega_1 = \frac{dA_2 \cos\beta_2}{r^2} \tag{3}$$

ausgesendeten Energie aufgenommen. Sie berechnet sich zu

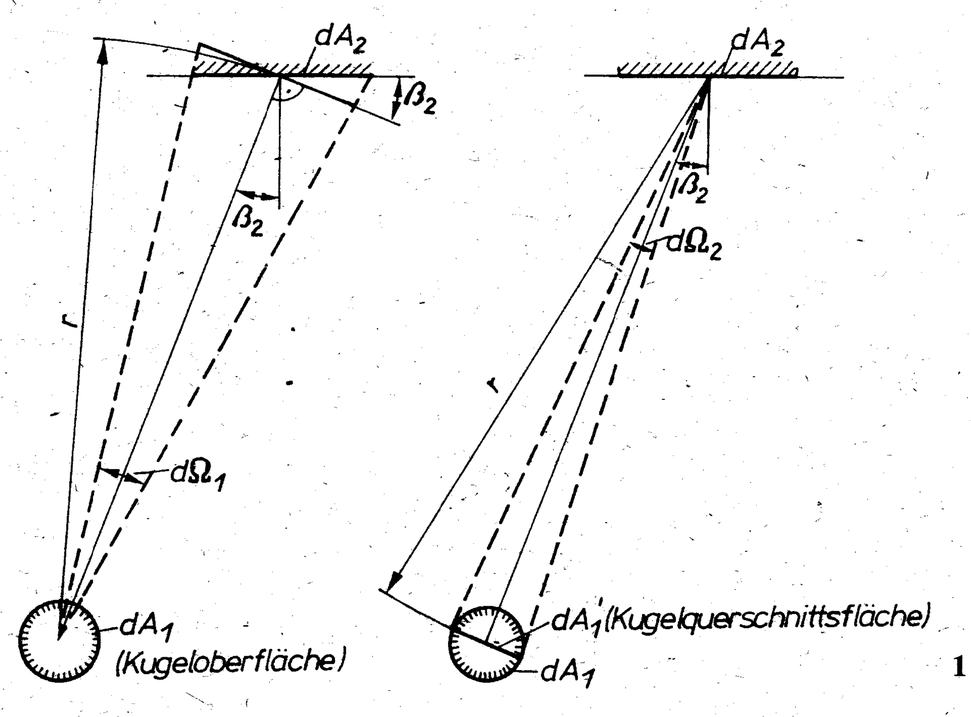
$$d^2E_{1,2} = \varepsilon_1 a_2 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad \frac{\cos\beta_2}{4\pi r^2} dA_1\, dA_2. \tag{4}$$

Analog dazu kann die Gegenstrahlung abgeleitet werden. Mit dem Raumwinkelelement

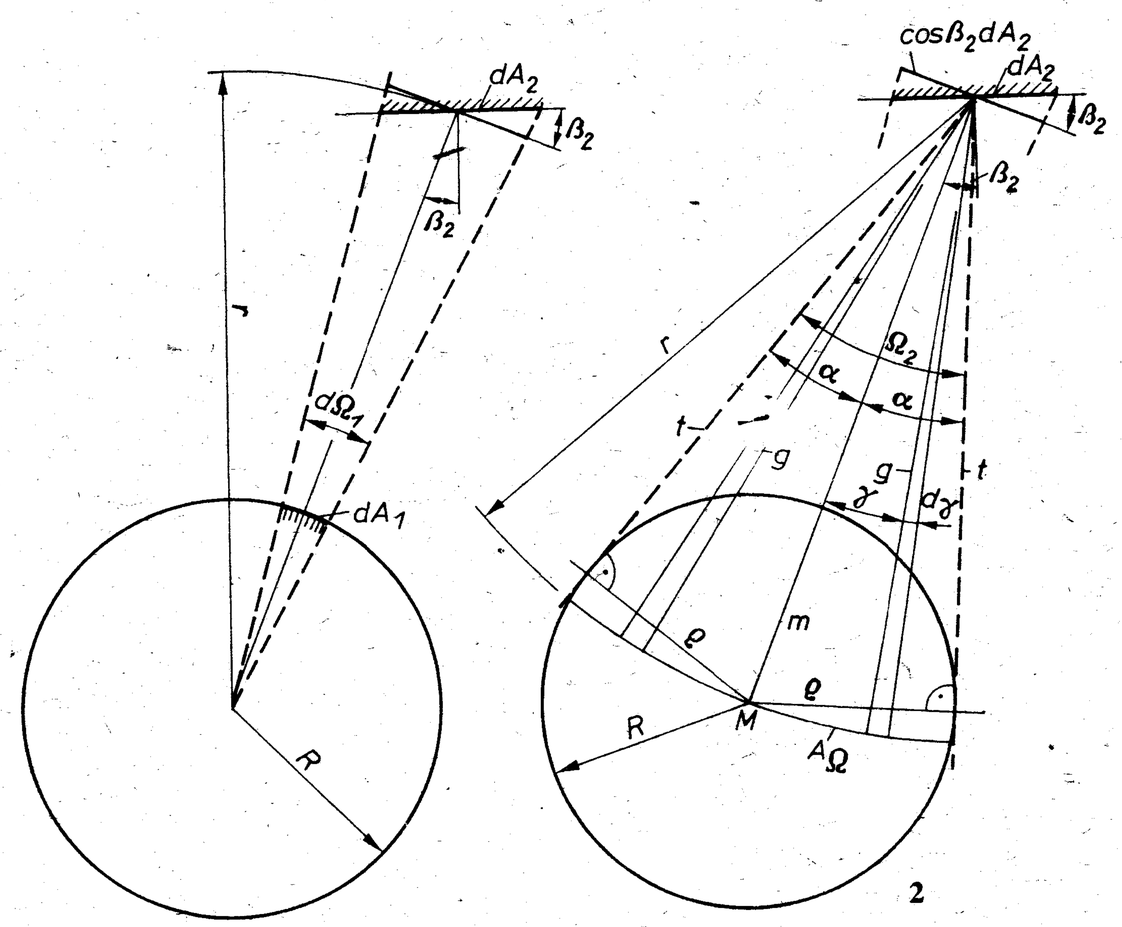
$$d\Omega_2 = \frac{dA_1'}{r^2} = \frac{dA_1}{4r^2} \tag{5}$$

und der Emission in Kugelrichtung

$$d^2E_2 = \varepsilon_2 C_S \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \quad \frac{\cos\beta_2}{\pi} d\Omega_2\, dA_2 \tag{6}$$



1



2

folgt für den von dA_1 absorbierten Anteil

$$d^2E_{2,1} = \varepsilon_2 a_1 C_S \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \quad \frac{\cos\beta_2}{4\pi r^2} dA_1\, dA_2. \tag{7}$$

Wegen $\varepsilon_1 a_2 = \varepsilon_2 a_1$ ergibt sich für den übertragenen Wärmestrom

$$d^2\dot{Q}_{1,2} = \varepsilon_1 a_2 C_S \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \frac{\cos\beta_2}{4\pi r^2} dA_1\, dA_2. \tag{8}$$

Daraus läßt sich sofort die Einstrahlzahl des kugelförmigen Elements, bezogen auf eine Fläche, ableiten

$$\varphi^{\circ}_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_2}{r^2} dA_2. \tag{9}$$

Der spezifische Wärmestrom (≡ Wärmestromdichte) ergibt sich zu

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{d\dot{Q}_{1,2}}{dA_1} = \varphi^{\circ}_{1,2} C_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]. \tag{10}$$

Ein endlicher Wärmestrom kann von einer unendlich kleinen Fläche natürlich nicht übertragen werden.
Die Betrachtungen für Kugeln mit endlichen Durchmessern können zwar auf einige vorstehend verwendete Grundgleichungen aufbauen, die getroffenen Näherungen für die infinitesimale Kugel als Empfängerfläche gelten für große Kugeln aber nicht mehr.
Nach Bild 2 wird von dem Flächenteilchen des Empfängers dA_2 – wie auch schon im Bild 1 – ein Raumwinkel $d\Omega_1$ gebildet. Dieser schneidet aus der strahlenden Oberfläche der Kugel das zugehörige Flächenelement dA_1 aus. Da es für die Kugel keine bevorzugte Emissionsrichtung gibt, ist auch für eine endlich große Kugel die im Raumwinkel $d\Omega_1$ transportierte Strahlungsenergie gleich dem $(d\Omega_1/4\pi)$-Teil der Gesamtemission.
Bei dieser komplexen Betrachtung ist es gleichgültig, ob dieser Teil in seiner Gesamtheit ursprünglich vom Element dA_1 stammt oder sich durch Austausch auch aus Emissionen der nebenliegenden Flächenabschnitte summativ ergibt. Die feste Zuordnung von dA_1 und dA_2 zum Raumwinkel $d\Omega_1$ führt dazu, daß nur kleine Größen erster Ordnung bei der Ableitung verwendet werden müssen. Es ergibt sich die von dA_1 nach dA_2 transportierte Energiemenge in folgenden Schritten:
Gesamtemission der Kugel

$$E_1 = \varepsilon_1 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad 4\pi R^2 \tag{11}$$

Emission in den Raumwinkel $d\Omega_1$

$$dE_1 = \varepsilon_1 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \quad R^2\, d\Omega_1. \tag{12}$$

Substitution der Gl. (3) und Einführen des Absorptionskoeffizienten liefert die Energiemenge, die dA_2 absorbiert.

$$dE_{1,2} = \varepsilon_1 a_2 C_S \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \cos\beta_2\, dA_2. \tag{13}$$

Die Emission des Elements dA_2 in Richtung des Kugelmittelpunkts M ist durch Gleichung (6) gegeben. Für infinitesimale Elemente reichte dieser Ansatz aus. Bei endlichen Kugeln als Empfänger muß über Ω_2 integriert und deshalb die Strahlungsenergie in Abhängigkeit von $d\Omega_2$ dargestellt werden.

Für die weitere Ableitung ist es zweckmäßig, zunächst die mittlere Strahlungsenergie $E_{g,m}$ längs eines durch die Strahlen g gebildeten rotationssymmetrischen Kegelmantels zu berechnen. Im Bild 3 wird deshalb die winkelabhängige Strahlungsverteilung, die von dA_2 ausgeht, gezeigt. Längs zweier Geraden g würden beispielsweise die Energieströme E_g und E_g' emittiert. Die unterschiedliche Größe ist den Längen der Kugelsehnen, die zwischen dA_2 und R bzw. Q gebildet werden, äquivalent. Dies ist nichts anderes als die Veranschaulichung des *Lambert*schen Kosinusgesetzes, dabei entspricht der Kugeldurchmesser der Normalstrahlung E_n.

Um den Mittelwert über alle E_g in einfacher Weise bilden zu können, wurde ein Koordinatensystem x, y, z so in das Modell gelegt, daß die z-Achse mit m zusammenfällt. Für den Strahl E_g wird eine Parameterdarstellung gewählt. Für Q gelten die Koordinaten

$z_Q = E_g \cos\gamma$

$x_Q = E_g \sin\gamma \cos\varphi$

$y_Q = E_g \sin\gamma \sin\varphi.$

Der Kugelmittelpunkt P liegt, wenn E_n, m und x eine Ebene aufspannen, bei

$x_P = -0{,}5\, E_n \sin\beta_2$

$y_P = 0$

$z_P = 0{,}5\, E_n \cos\beta_2.$

Die Gleichung der Kugeloberfläche lautet damit

$(x + 0{,}5\, E_n \sin\beta_2)^2 + y^2 + (z - 0{,}5\, E_n \cos\beta_2)^2 = 0{,}25\, E_n^2.$

Da Q einen Punkt dieser Fläche darstellt, folgt weiter

$(E_g \sin\gamma \cos\varphi + 0{,}5\, E_n \sin\beta_2)^2 + (E_g \sin\gamma \sin\varphi)^2$
$+ (E_g \cos\gamma - 0{,}5\, E_n \cos\beta_2)^2 = 0{,}25\, E_n^2.$

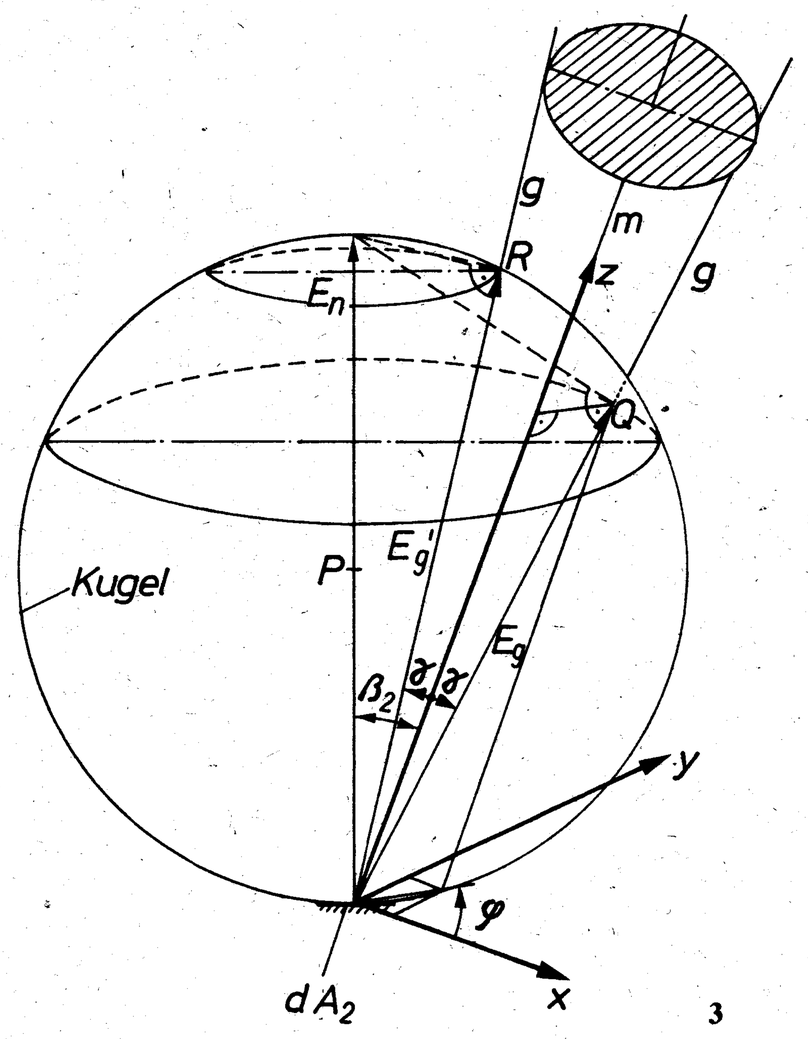
Nach einigen Umformungen ergibt sich

$E_g = E_n (\cos\gamma \cos\beta_2 - \sin\gamma \sin\beta_2 \cos\varphi).$

Signifikante Werte werden richtig wiedergegeben:

$\gamma = 0$:	$E_g = E_n \cos\beta_2$	(g und m sind identisch)
$\beta_2 = 0$:	$E_g = E_n \cos\gamma$	(alle g durchstoßen die Kugel auf einem Breitenkreis)
$\gamma = 0; \beta_2 = 0$:	$E_g = E_n$	(g und m sind mit dem Durchmesser identisch)
$\gamma = 0; \beta_2 = 90°$:	$E_g = 0$	(g und m liegen in der Ebene von dA_2)
$\gamma = 90°; \beta_2 = 0°$:	$E_g = 0$	(„Breitenkreis" am Pol bei dA_2).

Der Mittelwert $E_{g,m}$ ist durch Integration über φ zu bilden



3

$$E_{g,m} = \frac{E_n}{360} \int_0^{360} (\cos\gamma \cos\beta_2 - \sin\gamma \sin\beta_2 \cos\varphi)\, d\varphi$$

$$E_{g,m} = E_n \cos\gamma \cos\beta_2 = \frac{\varepsilon_2 C_S}{\pi} \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \quad \cos\gamma \cos\beta_2. \tag{14}$$

Anmerkung:

Mit diesem sehr interessanten Ergebnis ließe sich gedanklich auch ein völlig anderes Modell aufbauen. Der Ausdruck $\cos\beta_2\, dA_2$ sei danach als Flächenkorrektur zur orthogonal stehenden Verbindungslinie m aufgefaßt, $\cos\gamma$ würde das Kosinusgesetz für die rotationssymmetrische Strahlung enthalten.

Damit kann zu Bild 2 zurückgekehrt werden.

Von der von dA_2 emittierten Strahlung trifft nur der innerhalb des Raumwinkels Ω_2 liegende Teil die Kugel 1. Wegen der endlichen Kugelgröße ist der durch die Tangentenschar t gebildete Raumwinkel Ω_2 nicht sofort bestimmbar (bei der infinitesimalen Kugel war die Empfängerfläche stets ein Viertel der Kugeloberfläche Gl. (5)). Da die Tangenten mit den Kugelradialen ϱ rechte Winkel bilden, gilt für den halben ebenen Öffnungswinkel

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}. \tag{15}$$

Für den Raumwinkel ist definitionsgemäß

$$\Omega_2 = \frac{A_\Omega}{r^2}. \tag{16}$$

Dabei stellt A_Ω die im Abstand r von den Tangenten t ausgeschnittene Kugeloberfläche dar (diese hat nichts mit der Kugel 1 zu tun). Durch Rotation des Strahls g wird auf A_Ω die Linie $2\pi r \sin\gamma$ gezeichnet. Durch Variation des Winkels um $d\gamma$ entsteht die kleine Kreisringfläche

$$dA_\Omega = 2\pi r \sin\gamma\, r\, d\gamma. \tag{17}$$

Damit erhält Gl. (16) die differentielle Form

$$d\Omega_2 = 2\pi \sin\gamma\, d\gamma. \tag{18}$$

Für den in Ω_2 gestrahlten und von der Kugel 1 absorbierten Energiestrom lautet damit die Beziehung

$$dE_{2,1} = \varepsilon_2 a_1 C_S \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \quad \cos\beta_2\, 2 \int_0^\alpha \sin\gamma \cos\gamma\, d\gamma\, dA_2. \tag{19}$$

Für das Integral gilt mit der in Gl. (15) gegebenen Grenze

$$\int_0^\alpha \sin\gamma \cos\gamma\, d\gamma = \frac{1}{2} \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{20}$$

Die Substitution in Gl. (19) ergibt dann endgültig

$$dE_{2,1} = \varepsilon_2 a_T C_S \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\beta_2\, dA_2. \tag{21}$$

Der übertragene Wärmestrom zwischen der Kugel 1 und dem Flächenelement dA_2 berechnet sich als Differenz der getauschten Energieströme zu

$$d\dot{Q}_{1,2} = \varepsilon_1 a_2 C_S \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] R^2 \frac{\cos\beta_2}{r^2}\, dA_2 \tag{22}$$

bzw.

$$\dot{Q}_{1,2} = \varepsilon_1 a_2 C_S \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] R^2 \int_{A_2} \frac{\cos\beta_2}{r^2}\, dA_2. \tag{23}$$

In der Praxis hat sich für den Wärmestrom infolge Strahlung zwischen zwei endlichen Flächen die Gleichungsform

$$\dot{Q}_{1,2} = A_1 \Phi_{1,2} C_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right] \tag{24}$$

eingeführt. Mit $C_{1,2} = \varepsilon_1\, a_2\, C_s$ und $A_1 = 4\pi R^2$ ergibt sich für die zwischen zwei endlichen Flächen vereinbarten Einstrahlzahl $\Phi_{1,2}$ durch Vergleich der Gln. (23) und (24)

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_2}{r^2}\, dA_2. \tag{25}$$

Damit ist die Einstrahlzahl $\Phi_{1,2}$ einer beliebig großen Kugel 1 mit dem Radius R identisch mit der Einstrahlzahl $\varphi_{1,2}^{\circ}$ eines kugelförmigen Elements 1, jeweils bezogen auf eine Fläche 2.

Alle in der Literatur (z. B. in /1/) enthaltenen Berechnungsgleichungen und Diagramme für die „Punktstrahlung" und für im Strahlungsaustausch stehende Kugelelemente gelten auch für Kugeln beliebiger Größe mit gleichen Mittelpunkten.
Mit dem Ergebnis dürften sich viele Überlegungen der auf dem Gebiet der Wärmephysiologie arbeitenden Wissenschaftler vereinfachen. Auch wenn die vorgestellten Ableitungen trivial und schlüssig erscheinen, sei es dem Verfasser erlaubt, daran zu erinnern, daß zu dieser Lösung die Vorarbeiten von mehreren Generationen erforderlich waren und das Ergebnis auch die mit der Materie vertrauten Fachleute überraschte.

Literatur

/1/ *Glück, B.:* Strahlungsheizung – Theorie und Praxis. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1981