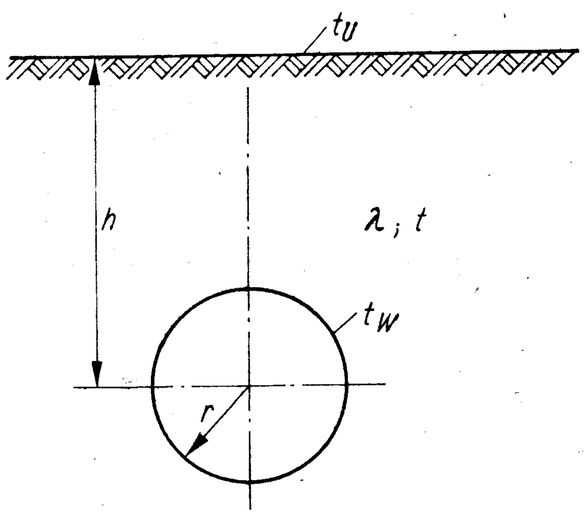
Wärmeverlustströme von erdverlegten Rohrleitungen
Teil I, Einzelrohre

Dr. sc. techn. Bernd Glück
VEB Kombinat Technische Gebäudeausrüstung – Institut –

Moderne Fernheizungssysteme werden in kanalfreier Erdverlegung ausgeführt. Stahl- oder Kunststoffrohre sind mit einer Verbund-Wärmedämmung versehen und werden von einem Mantelrohr umhüllt.
Die Berechnung der Wärmeverlustströme ist sehr kompliziert, da die Wärmeleitung mindestens zweidimensional betrachtet werden muß und die Randbedingungen konstante Temperatur am Rohrumfang, konstante Außenlufttemperatur an der Erdoberfläche und konstante Grundwassertemperatur in vorgegebener Tiefe einzuarbeiten sind. In Wirklichkeit müßten die Rohrtemperatur und die Außenlufttemperatur als Zeitfunktion angesetzt werden, wodurch eigentlich ein instationäres Wärmeleitproblem zu berücksichtigen wäre. Eine analytische Lösung existiert dafür nicht. Die numerische Berechnung könnte mit der Methode der finiten Elemente erfolgen. Diese wäre sehr aufwendig, nicht verallgemeinerungsfähig und setzte Kenntnisse über das genaue Temperaturregime der betrachteten Netzteilstrecke als Zeitfunktion voraus.
In guter Näherung kann der Wärmetransport jedoch auch als stationärer Vorgang behandelt werden. Die Gründe dafür sind:

- Im Dämmantel des Rohres werden etwa 80 bis 90 Prozent der Temperaturdifferenz (Rohr – Erdoberfläche) abgebaut. Wegen der relativ geringen Schichtdicke ist der Temperaturverlauf im Mantel näherungsweise als quasistationär anzusehen.
- Die zeitliche Betriebsweise des Netzes ist im allgemeinen nicht genau bekannt. Temperaturschwingungen mit kurzen Periodendauern beeinflussen infolge der großen Dämpfung die Erdreichtemperatur nur in unmittelbarer Rohrnähe.
- Für die Temperaturen der Erdoberfläche t_U bzw. Außenluft $t_{U,i}$ und des Grundwassers $t_{U,a}$ werden analog der genormten Berechnung für den Wärmeverlust erdreichberührender Bauteile zeitliche Mittelwerte verwendet. Als Empfehlung gelten:
  $t_{U,min} \approx t_{U,i,min} \approx t_{a,min} + 15$ K,
  mit $t_{a,min}$ der minimalen Norm-Außenlufttemperatur des Standortes in °C,
  $t_{U,a} \approx 10$ °C.

Aber auch für den quasistationären Wärmetransport im Erdreich mit den gegebenen Randbedingungen wurde noch keine geschlossene analytische Lösung gefunden. Bei allen bisherigen Berechnungen ist beispielsweise kein Wärmeaustausch mit einer grundwasserführenden Schicht betrachtet worden. In einer Reihe von Untersuchungen ist die Elektroanalogie (elektrisch leitende Folie oder elektrolytischer Trog) zu Hilfe genommen worden /2, 3, 4/. Die grafisch oder tabellarisch mitgeteilten Ergebnisse haben durchweg den Nachteil, daß sie nur für die untersuchten Parameter gelten und eine Interpolation auf andere Werte kaum möglich ist.
Andere Verfahren gehen von vereinfachten Annahmen aus. So werden in /5/ die Rohrleitungen als Linienquellen approximiert. In /6/ wird auf den analytischen Lösungen für ein im einseitig unendlichen Medium verlegtes Einzelrohr sowie für ein im unendlich ausgedehnten Medium verlegtes Rohrpaar aufgebaut; im praktischen Versuchsbetrieb ermittelte Korrekturfaktoren werden eingearbeitet. Die zweidimensionalen Wärmeleitvorgänge werden dabei durch eindimensionale Ersatzschaltungen nachgebildet.
Die weiteren Aussagen stützen sich auf zwei analytische Verfahren, die so aufbereitet werden, daß ein Anwenden mit den Mitteln der Kleinstrechentechnik ohne weiteres möglich ist.



1 Einzelrohr im Erdreich

Einzelrohr im Erdreich
Verfahren 1

Von *Krischer* /7/ stammt eine mit den Mitteln der konformen Abbildung erarbeitete interessante Lösung. Die tatsächlichen Randbedingungen werden vereinfacht dargestellt. Das Rohr mit der Temperatur t_W liegt ungedämmt in dem einseitig unendlich ausgedehnten Erdreich mit der Oberflächentemperatur t_U (Bild 1). Der vom Rohr ausgehende Wärmestrom führt zur Oberfläche. Ein Wärmeaustausch zum Grundwasser existiert nicht. An der Erdoberfläche wird eine Randbedingung 1. Art angenommen.
Die Temperaturverteilung gehorcht der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0. \qquad (1)$$

Lösungen sind Funktionen der Form

$$t = f(x + iy) + g(x - iy). \qquad (2)$$

Die weiteren Überlegungen, daß die Isothermen Kreise darstellen, die Temperaturen nach außen analog der Verteilung in der Zylinderwand mit dem Logarithmus der Radien abnehmen und daß spiegelbildlich zur Wärmequelle M eine Wärmesenke M' gedanklich angeordnet wird (Bild 2), führen schließlich zu dem Ansatz

$$t = a + b \ln \sqrt{x^2 + (y + e)^2} + c \ln \sqrt{x^2 + (y + 2h - e)^2}. \qquad (3)$$

Diese Gleichung erfüllt die Differentialgleichung. Wenn sich die Größen a, b, c und e als wirkliche Konstanten erweisen, ist die Temperaturverteilung richtig beschrieben. Es gelten die Randbedingungen:

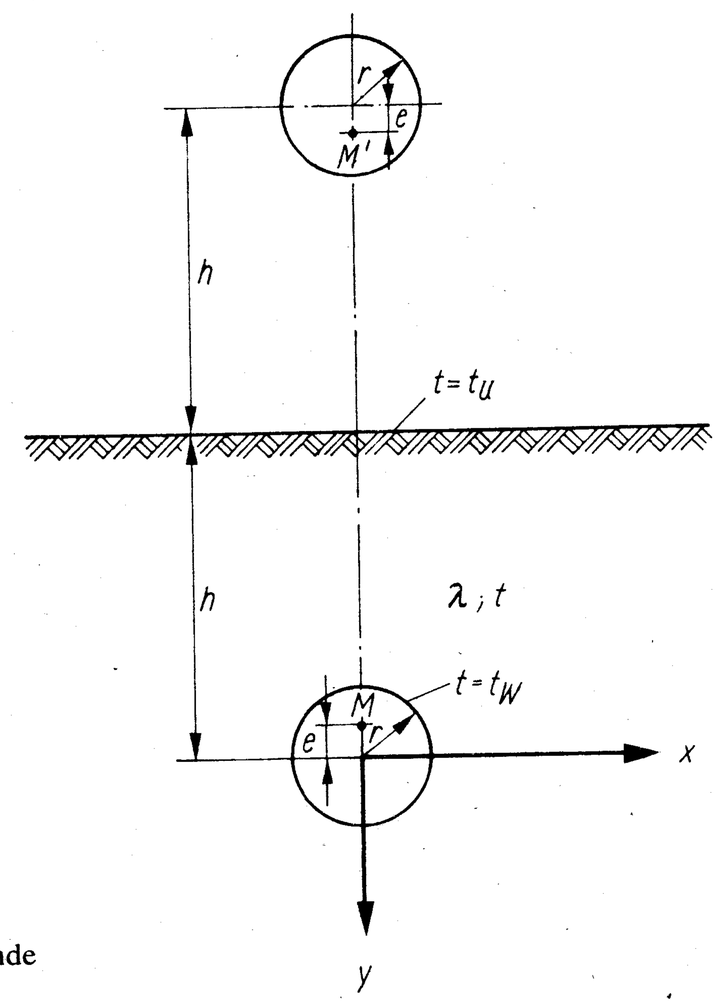
$t = t_U$ für $y = -h; x = 0$
$t_U = a + (b + c) \ln |h - e|$
$t = t_U$ für $y = -h; x \to \infty$
Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn $b = -c$ gilt.
Es folgt dann weiter $a = t_U$.
$t = t_W$ für $y = -r; x = 0$ und $y = r; x = 0$

$$t_W = t_U + \frac{b}{2} \ln \frac{(-r + e)^2}{(-r + 2h - e)^2}$$

$$t_W = t_U + \frac{b}{2} \ln \frac{(r + e)^2}{(r + 2h - e)^2} \qquad (*)$$

Aus der Annahme $r > e$ und $2h > r + e$ folgt:

$$e = h - \sqrt{h^2 - r^2}.$$



2 Einzelrohr im Erdreich als Wärmequelle und außenliegende fiktive Wärmesenke (Ableitung des Verfahrens 1)

Das Einsetzen in Gl. (*) liefert

$$t_W - t_U = b \ln \frac{r + h - \sqrt{h^2 - r^2}}{r + h + \sqrt{h^2 - r^2}}$$

$$b = -\frac{t_W - t_U}{\operatorname{arcos} h \frac{h}{r}}.$$

Damit lautet die Temperaturfunktion endgültig

$$t = t_U - \frac{t_W - t_U}{2 \operatorname{arcos} h \frac{h}{r}} \ln \frac{x^2 + (y + h - \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y + h + \sqrt{h^2 - r^2})^2}. \tag{4}$$

Der vom Rohr abgegebene Wärmestrom fließt in gleicher Größe durch die Erdoberfläche. Da an dieser Stelle die Berechnung einfacher ist, wird der Ansatz

$$\dot{q} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{dt}{dy} \right|_{y = -h} dx \tag{5}$$

verwendet. Der Differentialquotient lautet allgemein

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{t_W - t_U}{2 \operatorname{arcos} h \frac{h}{r}} \left(\frac{2 (y + h - \sqrt{h^2 - r^2})}{x^2 + (y + h - \sqrt{h^2 - r^2})^2} - \frac{2 (y + h + \sqrt{h^2 - r^2})}{x^2 + (y + h + \sqrt{h^2 - r^2})^2} \right)$$

und an der Stelle $y = -h$

$$\left. \frac{dt}{dy} \right|_{y = -h} = \frac{t_W - t_U}{\operatorname{arcos} h \frac{h}{r}} \frac{2 \sqrt{h^2 - r^2}}{x^2 + h^2 - r^2}. \tag{6}$$

Damit kann der spezifische Wärmestrom (bezogen auf 1 m Länge) nach Gl. (5) bestimmt werden

$$\dot{q}_R = \lambda \frac{t_W - t_U}{\operatorname{arcos} h \frac{h}{r}} 2 \sqrt{h^2 - r^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 - r^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{h^2 - r^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\dot{q}_R = 2\pi\lambda \frac{t_W - t_U}{\operatorname{arcos} h \frac{h}{r}}. \tag{7}$$

Ist das im Erdreich verlegte Rohr wärmegedämmt, gilt mit den im Bild 3 vermerkten Größen das Wärmestromgleichgewicht

$$\dot{q}_R = 2\pi\lambda \frac{t_W - t_U}{\operatorname{arcos} h \frac{h}{r_D}} = 2\pi\lambda_D \frac{t_F - t_W}{\ln \frac{r_D}{r_R}}.$$

Daraus folgt sofort nach Eliminieren der Oberflächentemperatur t_W die Berechnungsgleichung für den spezifischen Wärmestrom

$$\dot{q}_R = 2\pi\lambda \frac{t_F - t_U}{\frac{\lambda}{\lambda_D} \ln \frac{r_D}{r_R} + \operatorname{arcos} h \frac{h}{r_D}}. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist im Bild 4 grafisch ausgewertet.

Beispiel 1

Die Oberflächentemperatur einer Rohrwärmedämmung beträgt t_W = 50 °C, die des Erdreichs t_U = 10 °C. Das Rohr ist h = 1,5 m tief verlegt und hat einen Außendurchmesser von $2r_D$ = 0,6 m. Es sind die Isothermen rechnerisch und grafisch zu ermitteln.

Lösung

Es wird von Gl. (4) ausgegangen. Sie kann auch

$$e^{-(t - t_U) \frac{2 \operatorname{arcos} h \frac{h}{r}}{t_W - t_U}} = \frac{x^2 + (y + h - \sqrt{h^2 - r^2})^2}{x^2 + (y + h + \sqrt{h^2 - r^2})^2} = K \tag{**}$$

geschrieben werden. Nach unkompliziertem aber aufwendigem Umformen ist die Darstellung

$$x^2 + \left(y + h + \sqrt{h^2 - r^2} \frac{K + 1}{K - 1} \right)^2 = (h^2 - r^2) \left[\left(\frac{K + 1}{K - 1} \right)^2 - 1 \right]$$

erreichbar. Dies ist aber wieder eine Kreisgleichung mit dem Radius

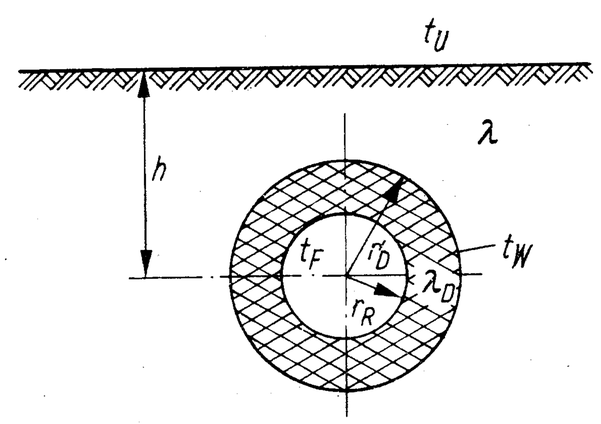
$$R = \sqrt{(h^2 - r^2) \left[\left(\frac{K + 1}{K - 1} \right)^2 - 1 \right]}$$

und der Verschiebung auf der y-Achse

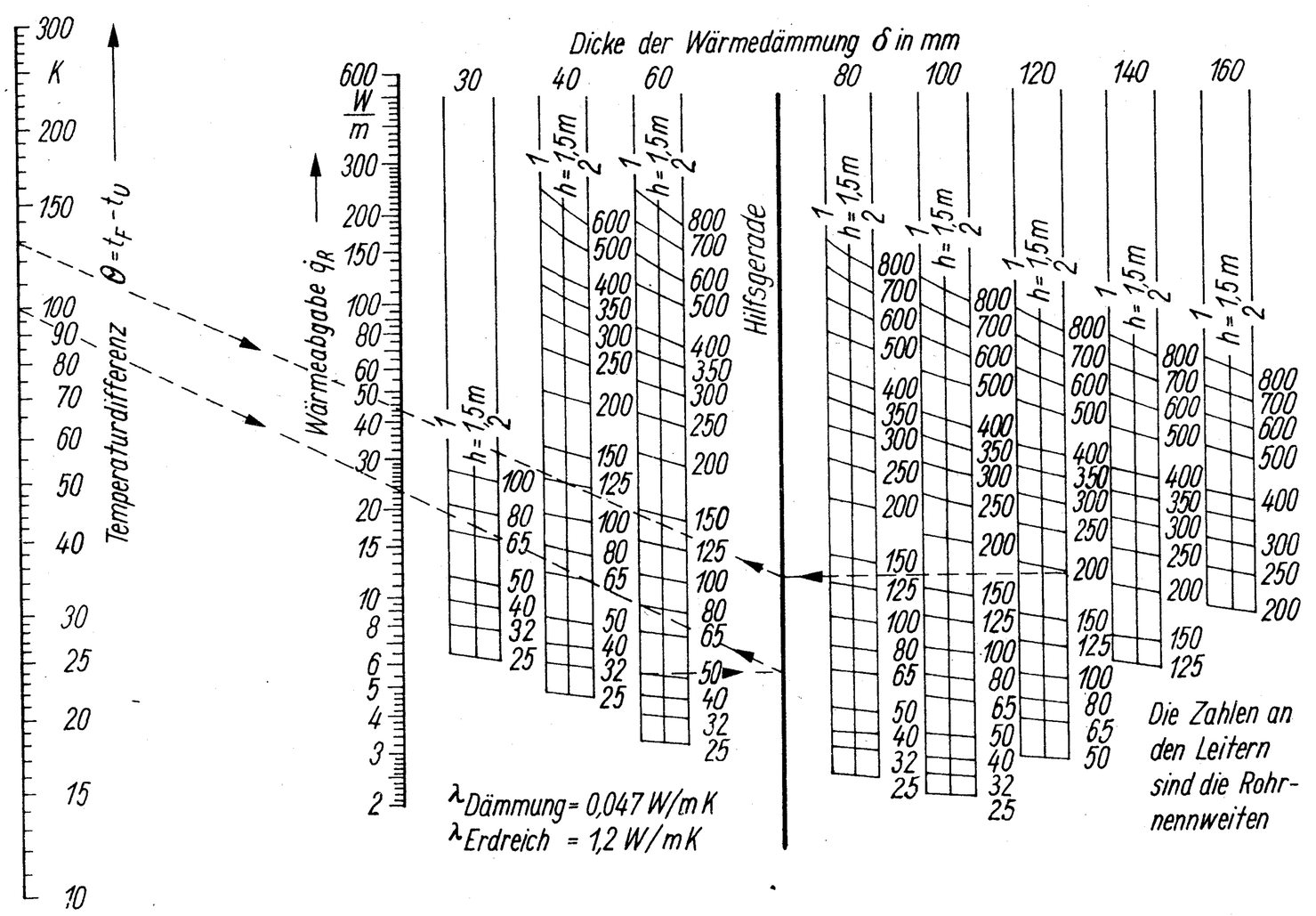
$$Y = h + \sqrt{h^2 - r^2} \frac{K + 1}{K - 1}.$$

Es gelten in Abhängigkeit von der Temperatur:

t °C	K	Y m	R m
10	1	– ∞	∞
15	0,564	– 3,768	5,059
20	0,318	– 1,339	2,429
25	0,179	– 0,611	1,516
30	0,101	– 0,300	1,039
35	0,057	– 0,147	0,744
40	0,032	– 0,067	0,544
45	0,018	– 0,024	0,403
50	0,010	0	0,300



3 Wärmegedämmtes Einzelrohr im Erdreich



4 Wärmeabgabe von gedämmten Rohrleitungen im Erdreich
(Werte nach Gl. (8), Verfahren 1)

Die zugehörigen Kreise, die die Isothermen darstellen, sind im Bild 5 aufgezeichnet.
Die Isothermen können auch konstruiert werden. Dazu sind der Quell- und Senkenpunkt (M; M') zu fixieren. Der Abstand

$$e = 1{,}5 - \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}3^2}\ \mathrm{m} = 0{,}03\ \mathrm{m}$$

ist vom Rohrmittelpunkt nach oben und von der gespiegelten Rohrmitte nach unten abzutragen (vgl. auch Bild 2). Die Gl. (**) sagt aus, daß für eine Isotherme K = const. gilt und daß das Verhältnis der Radien r_t und r'_t der um die Punkte M und M' geschlagenen Kreisbögen stets gleich sein muß. Die genannte Gleichung lautet mit den im Bild 5 definierten Radien

$$\frac{r_t}{r'_t} = \sqrt{K}.$$

Für t = 25 °C war K = 0,179 berechnet worden. Für vorgegebene r'_t folgen dann die Radien r_t

r'_t in m	2,5	3	4	5
r_t in m	1,06	1,27	1,69	2,12

und im Schnittpunkt beider die im Bild eingetragenen Punkte P_1 bis P_4.

Einzelrohr im Erdreich
Verfahren 2

Faxén gibt in /8/ ein Berechnungsverfahren für den Wärmestrom von Rohren an, die in einer ebenen Platte mit dem Abstand l verlegt sind. Der Lösungsweg ist in /1/ ausführlich und mit Ergänzungen versehen wiedergegeben, so daß hier auf die Ableitung verzichtet werden kann. Das Verfahren ist auf ein Einzelrohr anwendbar, wenn der Abstand l zwischen den Rohren rechnerisch so groß gewählt wird, daß eine gegenseitige Beeinflussung entfällt (z. B. l = 100 m).
Wie im Bild 6 dargestellt, kann sowohl der Wärmefluß zur Erdoberfläche als auch zum Grundwasser unter Berücksichtigung von Wärmeübergangskoeffizienten ermittelt werden.
Es gelten folgende Berechnungsgleichungen:
Temperatur im Erdreich für $t_{U,i} = t_{U,a}$ und vorgegebenes t_W

$$t = t_{U,i} - A\left\{\frac{\pi}{l}\left[G_a y + G_i + |y|\right] - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left[e^{-\frac{2\pi s}{l}|y|} + g_a(s)\,e^{-\frac{2\pi s}{l}y} + g_i(s)\,e^{\frac{2\pi s}{l}y}\right]\cos\left(\frac{2\pi s}{l}x\right)\right\}. \tag{9}$$

Konstanten

$$\bar{\kappa}_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{h_i}{\lambda}}; \qquad \bar{\kappa}_a = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{h_a}{\lambda}}$$

$$G_i = \frac{-2\lambda}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i}; \qquad G_a = \frac{\bar{\kappa}_a - \bar{\kappa}_i}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i}$$

$$\varepsilon_a = \frac{\alpha_a}{\lambda}\,l; \qquad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}\,l$$

$$g_a(s) = \frac{\frac{\varepsilon_a + 2\pi s}{\varepsilon_a - 2\pi s}\,e^{-\frac{4\pi s}{l}h_i} - e^{-\frac{4\pi s}{l}(h_i + h_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{l}(h_i + h_a)} - \frac{\varepsilon_a + 2\pi s}{\varepsilon_a - 2\pi s}\,\frac{\varepsilon_i + 2\pi s}{\varepsilon_i - 2\pi s}}$$

$$g_i(s) = \frac{\frac{\varepsilon_i + 2\pi s}{\varepsilon_i - 2\pi s}\,e^{-\frac{4\pi s}{l}h_a} - e^{-\frac{4\pi s}{l}(h_i + h_a)}}{e^{-\frac{4\pi s}{l}(h_i + h_a)} - \frac{\varepsilon_a + 2\pi s}{\varepsilon_a - 2\pi s}\,\frac{\varepsilon_i + 2\pi s}{\varepsilon_i - 2\pi s}} \tag{10}$$

$$A = \frac{t_W - t_{U,i}}{\ln\frac{l}{2\pi r_D} - \frac{\pi}{l}G_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_a(s) + g_i(s)}{s}} \tag{11}$$

Spezifischer Wärmestrom für $t_{U,i} \neq t_{U,a}$ und vorgegebenes t_W bzw. t_F (letztere werden als Isothermen am Mantel- bzw. Rohrumfang aufgefaßt).

$$\dot{q}_R = 2\pi\lambda\,\frac{t_W - t_i - \Delta\frac{\bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_a + \bar{\kappa}_i}}{\ln\frac{l}{2\pi r_D} - \frac{\pi}{l}G_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_a(s) + g_i(s)}{s}} = 2\pi\lambda_D\,\frac{t_F - t_W}{\ln\frac{r_D}{r_R}}$$

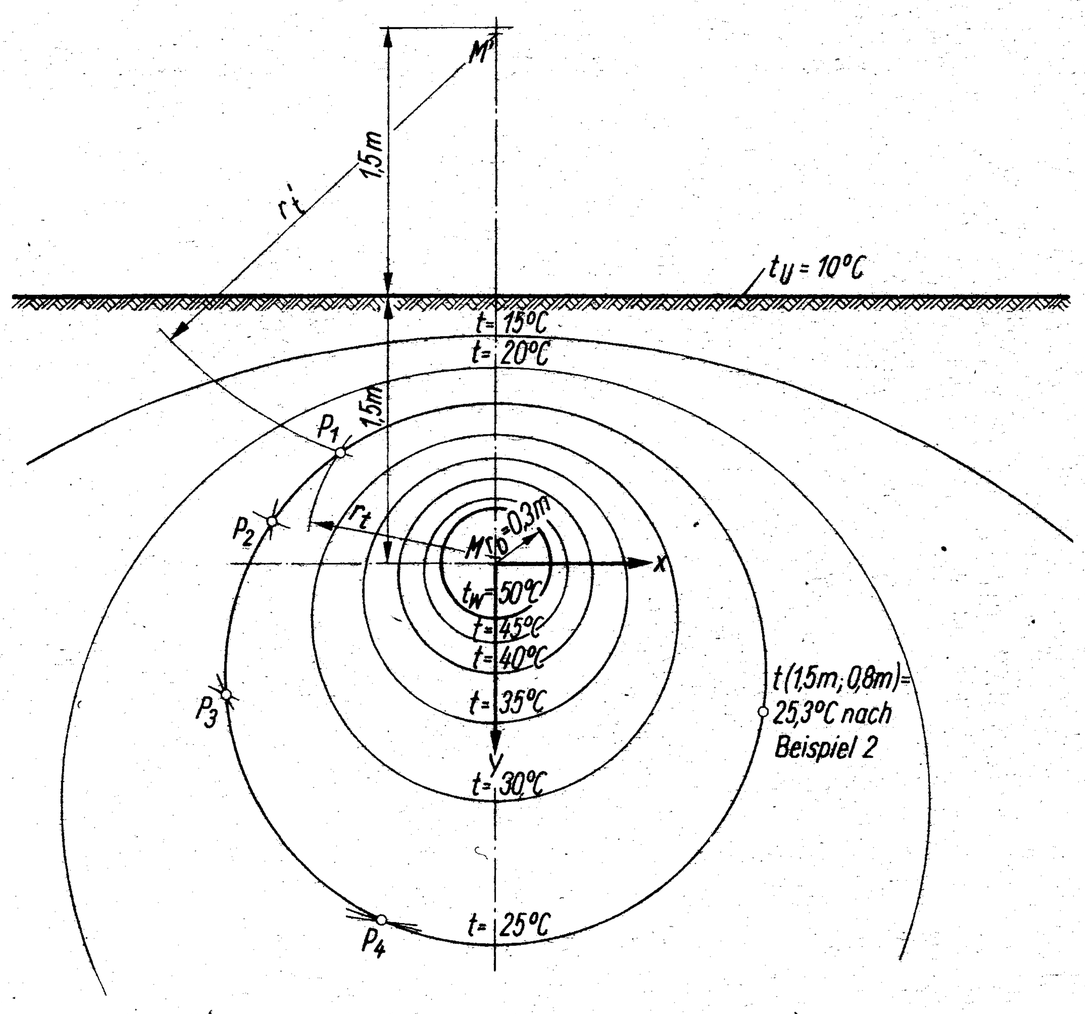
$$\dot{q}_R = 2\pi\lambda\,\frac{t_F - \frac{t_{U,i}\bar{\kappa}_i + t_{U,a}\bar{\kappa}_a}{\bar{\kappa}_i + \bar{\kappa}_a}}{\frac{\lambda}{\lambda_D}\ln\frac{r_D}{r_R} + \ln\frac{l}{2\pi r_D} - \frac{\pi}{l}G_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{g_a(s) + g_i(s)}{s}} \tag{12}$$

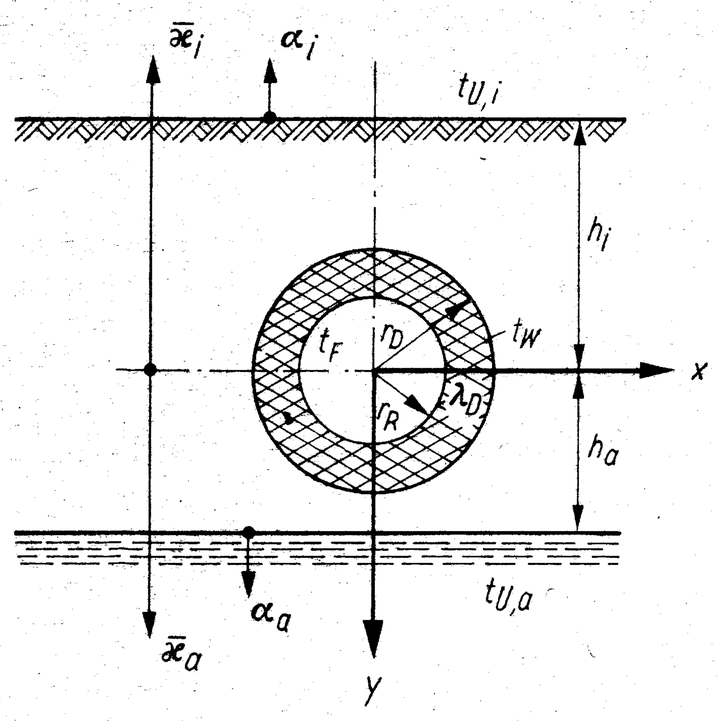
Anmerkung

Der Rohrabstand l ist nach der eingangs aufgestellten Bemerkung so groß zu wählen, daß keine Beeinflussung durch die „benachbarten Rohre" geschieht. Dies ist für l = 100 m stets mit ausreichender Genauigkeit gegeben. Beispielsweise berechnet sich für die Ausgangswerte

α_a = 10 000 W/m²K; α_i = 23 W/m²K; Δ_a = 3 m; Δ_i = 2 m;
λ = 1,2 W/mK; $2r_D$ = 0,6 m

die l-abhängige Summe





5 Einzelrohr im Erdreich mit Darstellung der Isothermen (Beispiel 1)
6 Wärmegedämmtes Einzelrohr im Erdreich bei unterschiedlichen Umgebungstemperaturen $\Delta = t_{U,a} - t_{U,i}$ (Verfahren 2)
$t_{U,a}$ – Grundwassertemperatur,
$t_{U,i}$ – Lufttemperatur

Tabelle 1
Spezifische Wärmeverlustströme $\dot{q}_R$ in W/m von im Erdreich verlegten Einzelrohrleitungen bei einer Medientemperatur $t_F = 130$ °C

$t_{U,i}$ °C	$t_{U,a}$ °C	$h_i + h_a$ m	λ W/mK	λ_D W/mK	$\dot{q}_R$ in W/m; $2\,r_R/2\,r_D$ in m; 0,1/0,26 h_i in m		0,2/0,44 h_i in m		0,4/0,68 h_i in m		0,8/1,16 h_i in m	
					1	2	1	2	1	2	1	2
0	10	5	1,2	0,047	35,6	34,5	43,2	41,7	63,0	60,3	90,1	85,1
−5	10	5	1,2	0,047	36,7	35,3	44,6	42,7	65,0	61,7	92,9	87,1
0	10	5	2,0	0,047	37,0	36,1	44,9	43,7	66,0	63,8	94,2	90,4
0	10	5	1,2	0,052	38,7	37,5	47,1	45,3	68,5	65,4	98,0	92,2
0	10	3	1,2	0,047	35,4	34,5	43,0	41,9	62,9	61,4	90,2	88,1
0	10	100	1,2	0,047	36,0	35,1	43,7	42,4	63,7	61,0	90,9	85,5
0	0	100	1,2	0,047	36,1	35,2	43,8	42,5	63,8	61,1	90,9	85,6
0	0	∞	1,2	0,047	36,1	35,2	43,9	42,6	64,1	61,2	92,2	86,0

$$a = \ln \frac{l}{2\pi r_D} - \frac{\pi}{l} G_i + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{g_a + g_i}{s}$$

für $s = 300$ Schritte zu

l in m	2	5	10	100	1000
a	3,888	2,501	2,335	2,328	2,328

Nach dem beschriebenen Algorithmus wurde eine Reihe von Beispielrechnungen durchgeführt. Dabei wurden die Verlegetiefe, die Grundwassertiefe, die Erdoberflächentemperatur und die Wärmeleitkoeffizienten des Erdreichs und der Dämmung variiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Außerdem sind in der letzten Zeile die nach Gl. (8) berechneten Wärmeströme eingetragen. Die nach dem ersten und zweiten Verfahren berechneten Werte stimmen sehr gut überein, wenn gleiche Wärmeleitkoeffizienten vorausgesetzt werden. Die unterschiedlichen Annahmen für die Grundwassertiefe und die Umgebungstemperaturen führen nur zu Fehlern unter 2,5 Prozent. Diese Aussage ist sehr praxisfreundlich, da die genannten Größen und die Stoffwerte vom Projektanten ohnehin nur geschätzt werden können.
Es sei auch noch einmal auf das eigentliche instationäre Problem hingewiesen (die Amplitudendämpfung der Außentemperatur beträgt in 1,5 m Tiefe etwa 50 Prozent und die Phasenverschiebung etwa 40 Tage). Damit kann schlußfolgernd festgestellt werden, daß für technische Berechnungen die Gl. (8) bzw. Bild 4 ausreichende Genauigkeit gewährleistet.

Beispiel 2

Für die im Beispiel 1 gegebenen Verhältnisse soll die Temperatur an der Stelle $x = 1{,}5$ m; $y = 0{,}8$ m errechnet werden.

Lösung

Die Gln. (9) bis (11) wurden programmiert und für $s = 500$ Schritte ausgewertet. Um die geometrischen und wärmetechnischen Verhältnisse so nachzubilden, daß sie angenähert den Annahmen zum Verfahren 1 entsprechen, sind $l = 100$ m; $h_a = 100$ m; $\alpha_i = 10^6$ W/m²K; $\alpha_a = 10^{-6}$ W/m²K gesetzt worden.
Das Ergebnis lautet $t(1{,}5; 0{,}8) = 25{,}3$ °C.
Der Wert ist im Bild 5 eingetragen. Es besteht gute Übereinstimmung mit der früheren Lösung.

Literatur

/1/ *Glück:* Strahlungsheizung – Theorie und Praxis.
Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1981

/2/ *Vidal:* Determination des pertes calorifiques dans les canalisations enterrées.
Brüssel: Editions SIC 1962
(Deutsche Fassung von *Brauer*: Berechnung der Wärmeverluste von im Erdreich verlegten Rohrleitungen.
„Energie" (1963) Heft 9)

/3/ *Tanaka:* Ermittlung der Wärmeverluste erdverlegter Rohrleitungen mit Hilfe einer thermisch-elektrischen Analogie.
„Heizung, Lüftung, Haustechnik" (1973) Heft 5.

/4/ *Franz / Grigull:* Wärmeverluste von beheizten Rohrleitungen im Erdboden.
„Wärme- und Stoffübertragung" (1969) Heft 2

/5/ *Merker / Schällig / Grigull:* Berechnung des Temperaturfeldes um eine im Erdboden verlegte Punkt- und Linienquelle bei Randbedingung III. Art an der Erdoberfläche.
„Wärme- und Stoffübertragung" (1977) Heft 10

/6/ *Zeitler:* Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Wärmeverlustes von verschiedenen Verlegesystemen erdverlegter Rohrleitungen.
„Fernwärme – international" (1980) Heft 3

/7/ *Krischer:* Das Temperaturfeld in der Umgebung von Rohrleitungen, die in der Erde verlegt sind.
„Gesundheitsingenieur" (1936) Nr. 37

/8/ *Faxén:* Beräkning av wärmeavgivning fran rör, ingjuta i betonplattor.
„Teknisk Tidskrift Mekanik" (1937) Heft 3