Ein verbessertes Näherungsverfahren für die Berechnung der Energieströme infolge Wärmestrahlung zwischen festen Oberflächen

Dr. sc. techn. Bernd GLÜCK
VEB Forschung und Rationalisierung Technische Gebäudeausrüstung

Stand der Berechnungen

Bei der bisher üblichen Berechnung des Strahlungsaustausches zwischen Feststoffoberflächen wurden in der Regel drei Fälle unterschieden:

Fall 1: Parallele Platten (Bild 1)
Ist der Abstand der Platten untereinander klein gegenüber den Flächenabmessungen, hat die Randabstrahlung keinen Einfluß auf den Gesamtwärmeaustausch. Für den spezifischen Energiestrom (Wärmestrom) von der Oberfläche 1 nach 2 gilt

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_S}} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] = \frac{\sigma_s (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \tag{1}$$

Fall 2: Körper mit Umhüllung (Bild 2)
Der Energiestrom zwischen einem konvexen Körper und seiner Umhüllung beträgt

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_S}\right)} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] = \frac{\sigma_S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{2}$$

Fall 3: Zwei Flächen in beliebiger Lage (Bild 3)

Für den von Oberfläche 1 nach Oberfläche 2 unter Beachtung der Gegenstrahlung transportierten Energiestrom gilt

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_S} \Phi_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma_S \Phi_{1,2} (T_1^4 - T_2^4). \tag{3}$$

Darin bedeuten:
A Fläche in m^2
C Strahlungskoeffizient in W/m^2K^4
C_S Strahlungskoeffizient des schwarzen Strahlers ($C_S = 5{,}67\ W/m^2K^4$)
T absolute Temperatur der Oberfläche in K
ε, a Emissionskoeffizient, Absorptionskoeffizient ($\varepsilon = a$)
$\Phi_{1,2}$ mittlere Einstrahlzahl der Fläche 1 auf die Fläche 2

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{A_1 \pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{r^2} \, dA_2 \, dA_1$$

σ_S Strahlungskonstante des schwarzen Strahlers ($\sigma_S = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W/m^2K^4$)
Indizes
1 Oberfläche 1
2 Oberfläche 2.

Würden sich die beiden Oberflächen wie schwarze Strahler verhalten, dann absorbierten sie die gesamte auftreffende Strahlung. In der Praxis können die Körperflächen günstigenfalls als graue Strahler mit $a < 1$ approximiert werden. Dadurch wird ein Teil der auftreffenden Strahlung reflektiert, wovon wiederum der $\Phi_{2,1}$-fache Teil den Empfänger trifft usw. Diese Reflexionen und Gegenreflexionen setzen sich unendlich fort. Unter stationären Strahlungsbedingungen können diese Abläufe als zeitlich nacheinander betrachtet werden, woraus mathematische Reihenentwicklungen folgen /1/. Im Ergebnis entsteht Gl. (1). Diese aufwendigen Betrachtungen können umgangen werden, wenn die Eigenemission der Oberfläche und alle reflektierten Anteile zu einer Gesamtenergiestromdichte $\dot{f}$ zusammengefaßt werden. Die Differenzbildung von $A_1\dot{f}_1$ und $A_2\dot{f}_2$ führt unter Beachtung der Flächenverhältnisse zu Gl. (2) /1/.

Kennzeichnend für beide Verfahren ist, daß die Flächen 1 und 2 umschlossene bzw. bei zwei unendlich großen parallelen Platten quasiumschlossene Räume bilden. Im dritten vorgestellten Fall – zwei Flächen in beliebiger Lage – trifft dies nicht zu, da die reflektierten Strahlungsanteile nicht nur auf die ursprüngliche Sendefläche zurückfallen, sondern auch alle anderen Raumbegrenzungen treffen können. Das einfache Modell des bilateralen Strahlungsaustausches kann beibehalten werden, wenn nur jeweils die erste Absorption rechnerisch berücksichtigt wird. Diesem von *Nusselt* (1918) stammenden Vorschlag wurde seither entsprochen. Die Ergebnisse sind um so besser, je näher der Emissionskoeffizient ε an den des schwarzen Körpers ($\varepsilon_S = 1$) kommt.
Mit der Verbreitung der Rechentechnik verstärkte sich die Forderung nach genauerer Rechnung, und es wurde der multilaterale Strahlungsaustausch zwischen allen Umfassungsflächen eines Raumes analytisch formuliert. Der gefundene Berechnungsgang wird als *Methode des umschlossenen Raumes* (enclosure method) oder wegen des Erfassens aller Reflexionen als *Bruttomethode* bezeichnet. Inhaltlich wird wie im Fall des umschlossenen Körpers von der Gesamtenergiestromdichte $\dot{f}$ ausgegangen. Von einigen Autoren wird diese Größe anschaulich „Flächenhelligkeit" genannt. Für einen Raum mit n Flächen gilt allgemein für den von der Fläche i abgestrahlten Energiestrom

$$A_i \dot{f}_i = A_i \dot{e}_i + (1 - a_i) \sum_{j=1}^{n} \Phi_{j,i} A_j \dot{f}_j. \tag{4}$$

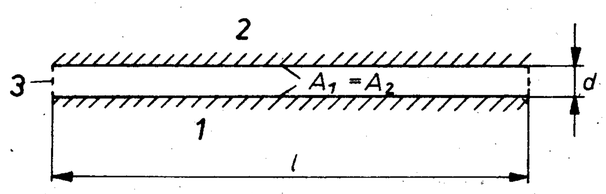
Mit dem bekannten Sachverhalt $\Phi_{i,j} A_i = \Phi_{j,i} A_j$ folgt der spezifische Wert

$$\dot{f}_i = \dot{e}_i + (1 - a_i) \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j} \dot{f}_j. \tag{5}$$

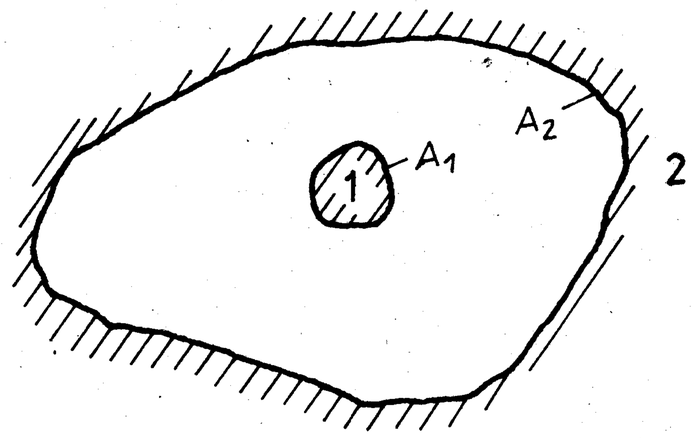
Dabei stellen der erste Term die Eigenemission

$$\dot{e}_i = \varepsilon_i \sigma_S T_i^4 \tag{6}$$

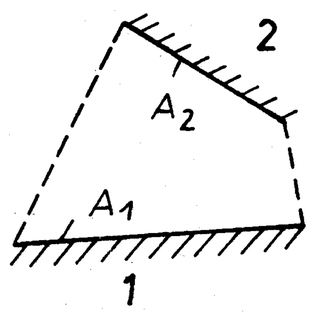
und der zweite Summand die reflektierten Gesamtenergiestromdichten aller Umfassungsflächen dar. Die Fläche i ist mit einzuschließen, wenn eine Eigenbestrahlung infolge konkaver Flächengeometrie ($\Phi_{i,i} \neq 0$) auftritt. Da durch Gl. (5) alle Größen $\dot{f}$ miteinander verknüpft sind, muß ein Gleichungssystem der Form



1 Parallele Platten, deren Abstand d klein gegenüber den Plattenabmessungen l ist



2 Allseitig konvexer Körper und seine Umhüllung



3 Zwei Oberflächen in beliebiger Lage ohne Beachtung der weiteren Raumbegrenzungen

$$
\begin{array}{llll}
[1-(1-a_1)\,\Phi_{1,1}]\,\dot f_1 - \ldots - (1-a_1)\,\Phi_{1,i}\,\dot f_i & - \ldots - (1-a_1)\,\Phi_{1,n}\,\dot f_n & = \dot e_1 \\
\vdots & & \vdots \\
-(1-a_i\,\Phi_{i,1}\,\dot f_1 \quad - \ldots + [1-(1-a_i)\,\Phi_{i,i}]\,\dot f_i & - \ldots - (1-a_i)\,\Phi_{i,n}\,\dot f_n & = \dot e_i \\
\vdots & & \vdots \\
-(1-a_n)\,\Phi_{n,1}\,\dot f_1 \quad - \ldots - (1-a_n)\,\Phi_{n,i}\,\dot f_i & - \ldots + [1-(1-a_n)\,\Phi_{n,n}]\,\dot f_n & = \dot e_n
\end{array}
\tag{7}
$$

gelöst werden. Das Einführen von zusätzlichen ideal reflektierenden, selbst nicht emittierenden Oberflächen k ($\varepsilon_k = 0$; $\dot e_k = 0$) verfälscht das Ergebnis nicht, wenn die Einstrahlzahlen entsprechend der neuen Geometrie Berücksichtigung finden. Der Wärmestrom, den die Fläche i abgibt, berechnet sich dann aus der Eigenemission vermindert um den absorbierten Anteil der auf die Fläche i gerichteten Gesamtenergieströme,

$$
\dot Q_i = A_i\,\dot e_i - A_i a_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j}\,\dot f_j. \tag{8}
$$

Der spezifische Wärmestrom beträgt somit

$$
\dot q_i = \dot e_i - a_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j}\,\dot f_j. \tag{9}
$$

Gegenüberstellung der Ergebnisse

Ausgehend von den Gln. (7) und (9), werden im weiteren die Ergebnisse der Gln. (1) bis (3) beurteilt. Dabei genügt es, von einem Raum, der von drei isothermen Flächen (A_1, A_2, A_3) mit homogenen Strahlungseigenschaften ($\varepsilon_1 = a_1$, $\varepsilon_2 = a_2$, $\varepsilon_3 = a_3$) umgeben ist, auszugehen. Das Gleichungssystem (7) wird in Matrizenform angeschrieben

$$
\begin{pmatrix}
1-(1-\varepsilon_1)\,\Phi_{1,1} & -(1-\varepsilon_1)\,\Phi_{1,2} & -(1-\varepsilon_1)\,\Phi_{1,3} \\
-(1-\varepsilon_2)\,\Phi_{2,1} & 1-(1-\varepsilon_2)\,\Phi_{2,2} & -(1-\varepsilon_2)\,\Phi_{2,3} \\
-(1-\varepsilon_3)\,\Phi_{3,1} & -(1-\varepsilon_3)\,\Phi_{3,2} & 1-(1-\varepsilon_3)\,\Phi_{3,3}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \dot f_1 \\ \dot f_2 \\ \dot f_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \dot e_1 \\ \dot e_2 \\ \dot e_3 \end{pmatrix}
\tag{10}
$$

Fall 1: Parallele Platten

Die Fläche 3 stellt die Verbindungsfläche zwischen beiden Plattenrändern her (Bild 1). Ihre Strahlungseigenschaft ist dadurch gekennzeichnet, daß $\varepsilon_3 = 1$ (auftreffende Strahlung verschwindet), $\dot e_3 = 0$ (keine Eigenemission) und die mittleren Einstrahlzahlen

$\Phi_{1,2} = 1$; $\quad \Phi_{1,3} = 0$; $\quad \Phi_{1,1} = 0$

$\Phi_{2,1} = 1$; $\quad \Phi_{2,3} = 0$; $\quad \Phi_{2,2} = 0$

gelten. Damit entfallen die dritte Spalte und die dritte Zeile der Koeffizientenmatrix. Das Ergebnis für die Gesamtenergiestromdichten lautet:

$$
\dot f_1 = \frac{\dot e_1 + \dot e_2\,(1-\varepsilon_1)}{1-(1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)}
$$

$$
\dot f_2 = \frac{\dot e_2 + \dot e_1\,(1-\varepsilon_2)}{1-(1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)}.
$$

Die Gl. (9) liefert dann

$$
\dot q_1 = \dot e_1 - \varepsilon_1 \frac{\dot e_2 + \dot e_1\,(1-\varepsilon_2)}{1-(1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)} = \frac{\sigma_s\,(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \tag{11}
$$

Da aufgrund der geometrischen Verhältnisse die Oberfläche 1 nur auf die Fläche 2 strahlt und umgekehrt, gelten $\dot q_1 \equiv \dot q_{1,2}$ und $\dot q_2 = -\dot q_1$. Damit besteht Identität mit Gl. (1).

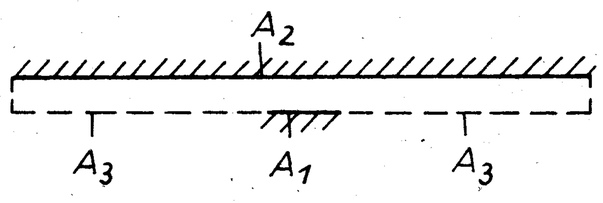
Fall 2: Körper mit Umhüllung

Da die Fläche 3 nicht existiert, reduziert sich die Matrix von vornherein auf den Typ (2,2). Die Einstrahlzahlen haben folgende Größen:

$\Phi_{1,2} = 1$; $\quad \Phi_{1,1} = 0$

$\Phi_{2,1} = \dfrac{A_1}{A_2}$; $\quad \Phi_{2,2} = 1 - \dfrac{A_1}{A_2}$.

Die Lösung des Gleichungssystems (10) liefert damit:



4 Transformierte Abbildung der Oberflächen A_1 und A_2 eines Körpers 1 mit seiner Umhüllung 2 als parallele Ebenen und ergänzender Abschluß durch eine vollreflektierende, jedoch nicht selbst emittierende Fläche 3

$$
\dot f_1 = \frac{\dot e_1\left[1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right)\right] + \dot e_2\,(1-\varepsilon_1)}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right) - (1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}}
$$

$$
\dot f_2 = \frac{\dot e_2 + \dot e_1\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right) - (1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}}
$$

Schließlich ergeben sich die von den Körpern abgegebenen Wärmeströme nach Gl. (9) zu

$$
\dot q_1 = \dot e_1 - \varepsilon_1 \frac{\dot e_2 + \dot e_1\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right) - (1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}} = \frac{\sigma_s\,(T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \tag{12}
$$

$$
\dot q_2 = \dot e_2 - \varepsilon_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\dot e_1\left[1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right)\right] + \dot e_2\,(1-\varepsilon_1)}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right) - (1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}} - \varepsilon_2\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)
$$

$$
\cdot \frac{\dot e_2 + \dot e_1\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}}{1-(1-\varepsilon_2)\left(1-\dfrac{A_1}{A_2}\right) - (1-\varepsilon_1)\,(1-\varepsilon_2)\dfrac{A_1}{A_2}} = \frac{A_1}{A_2}\,\frac{\sigma_s\,(T_2^4 - T_1^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}
$$

$$
= \frac{A_1}{A_2}\left(-\dot q_1\right).
$$

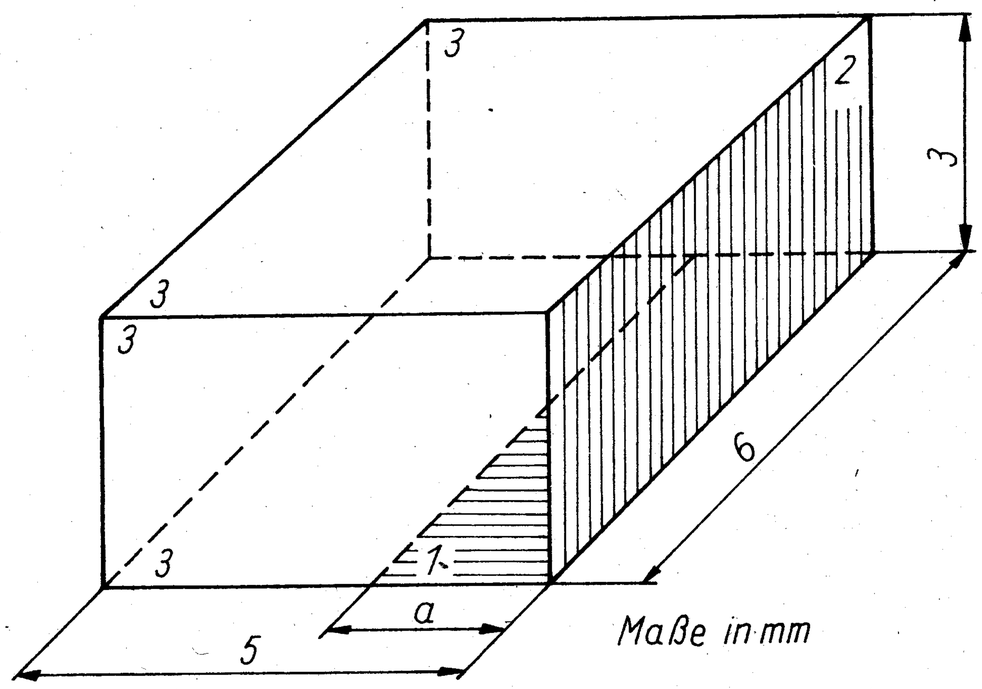
Es besteht erwartungsgemäß Übereinstimmung zwischen Gln. (12) und (2).

Das gleiche Ergebnis wird erreicht, wenn entsprechend Bild 4 eine zusätzliche Scheinfläche 3 mit den Eigenschaften ($\varepsilon_1 = 0$; $\dot e_3 = 0$) eingeführt wird und die Oberflächen 1 und 2 abgewickelt in Form paralleler Flächen gegenüberliegen. Für die Einstrahlzahlen gelten dann

$\Phi_{1,2} = 1$; $\quad \Phi_{1,3} = 0$; $\quad \Phi_{1,1} = 0$

$\Phi_{2,1} = \dfrac{A_1}{A_2}$; $\quad \Phi_{2,3} = 1 - \dfrac{A_1}{A_2}$; $\quad \Phi_{2,2} = 0$

$\Phi_{3,1} = 0$; $\quad \Phi_{3,2} = 1$; $\quad \Phi_{3,3} = 0$.



5 Abmessungen eines Modellraums mit variablen Flächen 1 und 3

Tabelle 1: Ausgangswerte und Ergebnisse von Modellrechnungen
(ϱ^* – Verhältniswerte der konventionellen Nährung; ϱ^{**} – Verhältniswerte der neuen Näherung)

Fall	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$	1		0,95						0,90						0,80		0,60		0,40		0,001	
t_1 in °C	27		27		20		15		27		20		15		27		27		27		27	
t_2 in °C	15		15		27		20		15		27		20		15		15		15		15	
t_3 in °C	20		20		15		27		20		15		27		20		20		20		20	
a in m	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5
ϱ_1^*	1	1	1,04	1,04	0,69	1,03	1,07	1,04	1,09	1,08	0,36	1,07	1,14	1,08	1,20	1,18	1,54	1,49	2,22	2,12	829	771
ϱ_2^*	1	1	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,09	1,09	1,09	1,09	1,10	1,09	1,20	1,21	1,53	1,56	2,21	2,27	823	854
ϱ_3^*	1	1	1,04	1,03	1,05	1,04	1,05	1,04	1,09	1,06	1,10	1,09	1,10	1,08	1,20	1,15	1,53	1,41	2,21	1,97	822	683
ϱ_1^{**}	1	1	1,00	1,00	0,93	0,99	1,00	1,00	1,00	0,99	0,79	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,99	0,98	1,00	1,00
ϱ_2^{**}	1	1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00
ϱ_3^{**}	1	1	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,99	0,97	0,99	0,97	1,00	1,00

Fall	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
ε_1	0,95						0,90						0,85						0,95		1,00	0,80	
ε_2	0,90						0,85						0,95						0,50		0,50	0,90	
ε_3	0,85						0,95						0,90						0,90		0,90	0,95	
t_1 in °C	27		20		15		27		20		15		27		20		15		127		27	127	
t_2 in °C	15		27		20		15		27		20		15		27		20		15		15	15	
t_3 in °C	20		15		27		20		15		27		20		15		27		20		127	20	
a in m	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	5	0,3	0,3	5
ϱ_1^*	1,12	1,11	0,38	1,09	1,18	1,11	1,08	1,05	–0,51	1,05	1,13	1,05	1,07	1,07	0,65	1,06	1,11	1,07	1,37	1,14	1,55	1,08	1,05
ϱ_2^*	1,13	1,12	1,14	1,11	1,15	1,09	1,04	1,05	1,05	1,06	1,05	1,07	1,09	1,10	1,09	1,11	1,10	1,12	1,05	1,10	1,10	1,03	1,05
ϱ_3^*	1,14	1,10	1,15	1,11	1,15	1,10	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,05	1,09	1,04	1,10	1,09	1,10	1,08	1,68	1,14	1,14	1,21	1,05
ϱ_1^{**}	1,00	0,99	0,85	0,98	1,00	0,99	0,99	1,00	2,84	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	1,02	1,00	1,00
ϱ_2^{**}	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1,00	0,99	0,97
ϱ_3^{**}	1,00	1,02	1,00	1,00	1,00	1,01	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1,01	0,96	1,00	1,00	1,00	0,99	1,25	1,01	0,96	1,06	0,96

Fall 3: Zwei Flächen in beliebiger Lage

Da dieser Fall nicht allgemeingültig abgehandelt werden kann, wird auf einen Raum mit der im Bild 5 dargestellten Geometrie bezogen.

Zunächst könnte man sich die Fläche 1 mit einer Fußbodenheizung belegt, Fläche 2 als Außenwand mit transparentem Anteil und Fläche 3 schlechthin als innere Umfassung eines Wohn- oder Büroraums vorstellen. In weiteren Variantenrechnungen werden die Oberflächentemperaturen aber so variiert, daß ganz abstrakte Zuordnungen entstehen. Für den Modellraum gelten mit a in m:

$A_1 = 6\,a\ \mathrm{m}^2$

$A_2 = 18\ \mathrm{m}^2 \qquad A_3 = 6\,(18 - a)\ \mathrm{m}^2$

a in m	0,3	5
$\Phi_{1,2}$	0,453	0,169

$$\Phi_{2,1} = \Phi_{1,2}\frac{a}{3};$$

$$\Phi_{1,3} = 1 - \Phi_{1,2}; \qquad \Phi_{3,1} = \Phi_{1,3}\frac{a}{18-a}$$

$$\Phi_{2,3} = 1 - \Phi_{2,1}; \qquad \Phi_{3,2} = \Phi_{2,3}\frac{3}{18-a}$$

$$\Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = 0; \qquad \Phi_{3,3} = 1 - \Phi_{3,1} - \Phi_{3,2}. \tag{13}$$

Die Auswertung des Gleichungssystems (10) und der Gl. (9) erfolgte mit einem Taschenrechner. Um den Vergleich mit der konventionellen Berechnungsmethode zu bekommen, wird Gl. (3) allgemeingültig dargestellt

$$\dot{q}_{i,j} = \Phi_{i,j}\,(\varepsilon_j\,\dot{e}_i - \varepsilon_i\,\dot{e}_j) \tag{14}$$

und über alle im bilateralen Strahlungsaustausch befindlichen Flächen summiert, so daß beispielsweise

$$\dot{q}_1^* = \Phi_{1,2}\,(\varepsilon_2\,\dot{e}_1 - \varepsilon_1\,\dot{e}_2) + \Phi_{1,3}\,(\varepsilon_3\,\dot{e}_1 - \varepsilon_1\,\dot{e}_3) \tag{15}$$

den von der Oberfläche 1 abgegebenen spezifischen Wärmestrom darstellt. Schließlich werden die Verhältniswerte

$$\varrho_1^* = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_1^*}; \qquad \varrho_2^* = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_2^*}; \qquad \varrho_3^* = \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_3^*}$$

gebildet. Die Ausgangswerte und Ergebnisse finden sich für eine Vielzahl von Beispielen in Tabelle 1. Die Abweichungen sind leider schon bei den praxisüblichen Emissionskoeffizienten (ε = 0,90 . . . 0,95) beträchtlich. Die Einstrahlzahlen, die Oberflächentemperaturen und die Emissionskoeffizienten beeinflussen die Ergebnisse unvorhersehbar, so daß eine nachträgliche Korrektur als unmöglich erscheint.

Vorschlag für eine neue Approximationsgleichung

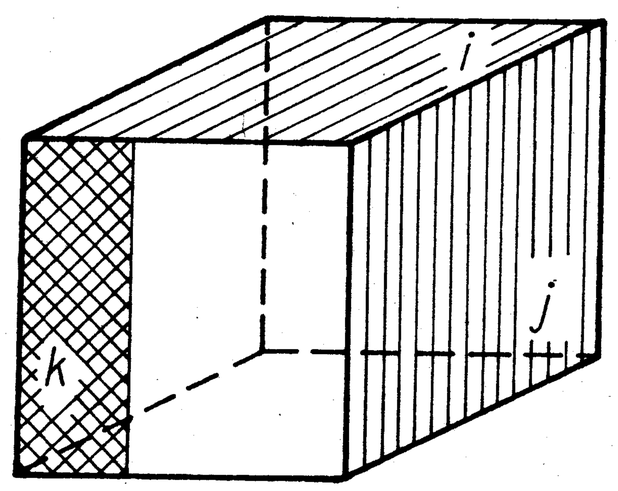
Mit den Gln. (7) und (9) existiert prinzipiell ein exakter Lösungsweg, der Näherungen eigentlich überflüssig macht. Es ist aber zu bedenken, daß die Anzahl der Umfassungsflächen eines Raums recht groß sein kann, denn die Unterteilung in Einzelflächen hat nach Lage, Oberflächentemperatur und Strahlungseigenschaften (Oberflächenbeschaffenheit) zu erfolgen. Weiterhin stellen die flächenbezogenen Einstrahlzahlen Mittelwerte dar, so daß oft eine verfeinerte Unterteilung angestrebt wird. Das Lösen von Gleichungssystemen mit beispielsweise zehn Unbekannten setzt eine gewisse mathematische Fertigkeit und Hardware voraus. Vor allem ist die vorbereitende Ermittlung der Koeffizientenmatrix, die alle 100 Einstrahlzahlen der im Strahlungsaustausch stehenden Flächen enthält, aufwendig. Vielfach soll nur eine Wärmebilanz für eine signifikante Fläche i (z. B. eine Heizfläche) aufgestellt und dabei die Berechnung auf die zehn Einstrahlzahlen $\Phi_{i,j}$ begrenzt werden. Damit dürfte der Wunsch nach einer Näherung hinreichend begründet sein.

Approximationsgleichungen sollten nicht vollkommen empirisch formuliert werden, sondern auf physikalischen Zusammenhängen aufbauen und den Grenzfall ($\varepsilon_i = 1$ für $i = 1 \ldots n$) richtig wiedergeben. In Gl. (9)

$$\dot{q}_i = \dot{e}_i - \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j}\,\dot{f}_j, \tag{16}$$

die prinzipiell beibehalten werden soll, ist die Gesamtenergiestromdichte f_j zu substituieren. Für sie gilt analog Gl. (5)

$$\dot{f}_j = \dot{e}_j + (1 - \varepsilon_j) \sum_{k=1}^{n} \Phi_{j,k}\,\dot{f}_k. \tag{17}$$



6 Umschlossener Raum mit speziell markierten Oberflächen

Tabelle 2 Absolute Wärmestromdifferenzen $\Delta\dot{Q}$ *bei maximalen* ϱ^{**}-Abweichungen

Fall	5	11	25	31	41	44
i	1	1	1	1	3	3
ϱ_i^{**}	0,93	0,79	0,85	2,84	1,25	1,06
$\dot{q}_i^{**}$ in W/m²	−2,36	−1,29	−1,69	0,24	−8,28	−3,93
$\dot{q}_1$ in W/m²	−2,21	−1,02	−1,44	0,69	977,53	834,52
$\dot{q}_2$ in W/m²	64,01	60,16	59,61	57,33	−36,70	−58,85
$\dot{q}_3$ in W/m²	−10,81	−10,18	−10,08	−9,73	−10,35	− 4,17
$\dot{Q}_1$ in W	−4	−2	−3	1	1 760	1 502
$\dot{Q}_2$ in W	1 152	1 083	1 073	1 032	−661	−1 059
$\dot{Q}_3$ in W	−1 148	−1 081	−1 070	−1 033	−1 099	−443
$\Delta\dot{Q}_i$ in W	0,27	0,49	0,45	0,81	−219,83	−25,49

Vereinbarungsgemäß soll die Bestimmung der $\Phi_{j,k}$ umgangen werden. Der Term

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_{j,k}\dot{f}_k = \dot{f}_{mittel} \tag{18}$$

stellt einen Mittelwert der Gesamtenergiestromdichten („Flächenhelligkeiten") aus dem „Blickfeld" der Fläche j dar (Bild 6). Aufgrund der Reflexionen gilt $\dot{f}_k > \dot{e}_k$, woraus die pauschale Annahme

$$\dot{f}_{mittel} \approx \frac{\dot{e}_{mittel}}{\varepsilon_{mittel}} \doteq \frac{\sum_{i=1}^{n} \dot{e}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i A_i} \tag{19}$$

getroffen wird. Die Substitution in rückwärtiger Reihenfolge liefert die Berechnungsgleichung für den von der Fläche i abgegebenen spezifischen Wärmestrom in zweiter Näherung

$$\dot{q}_i^{**} = \dot{e}_i - \varepsilon_i \sum_{j=1}^{n} \Phi_{i,j}\left[\dot{e}_j + (1-\varepsilon_j)\dot{f}_{mittel}\right]. \tag{20}$$

Der Wert $\dot{f}_{mittel}$ ist nach Gl. (19) einfach zu berechnen. Er gilt für den gesamten Raum, unabhängig, für welche Fläche i der Wärmestrom bestimmt werden soll. Er stellt die „mittlere Flächenhelligkeit des Raums" dar. Es sind nur so viele – stets auf die Fläche i bezogene – Einstrahlzahlen zu berechnen, wie Umfassungsflächen n in Ansatz gebracht wurden. (Bei der genauen Ermittlung waren n^2 erforderlich!)

Zum Vergleich mit den genauen Ergebnissen werden wiederum Verhältniswerte

$$\varrho_1^{**} = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_1^{**}}; \qquad \varrho_2^{**} = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_2^{**}}; \qquad \varrho_3^{**} = \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_3^{**}}$$

gebildet. In Tabelle 1 sind diese den ϱ^*-Werten der konventionellen Näherung gegenübergestellt. Sie zeigen weitaus geringere Abweichungen vom Idealwert Eins.

Wegen der zahlreichen Einflußgrößen und der Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten ist es leider nicht möglich, der Näherung allgemeingültige Fehlergrenzen zuzuordnen. Es zeigt sich, daß die großen relativen Abweichungen ϱ_i^{**}, gepaart mit den kleinsten Wärmestromdichten $\dot{q}_i$ bzw. $\dot{q}_i^{**}$, auftreten.

Sie werden in Tabelle 2 hinsichtlich ihrer absoluten Werte untersucht

$$\Delta\dot{Q}_i = \dot{Q}_i - \dot{Q}_i^{**},$$

dabei gelten

$$\dot{Q}_i = A_i\dot{q}_i \qquad \text{und} \qquad \dot{Q}_i^{**} = A_i\dot{q}_i^{**}.$$

Bemerkenswerte Fehler sind somit nur bei stark unterschiedlichen Emissionskoeffizienten (z. B. bei stark reflektierenden Tapeten an der Außenwand) zu erwarten. Die in üblichen Wohn- und Büroräumen vorliegenden Strahlungsbedingungen werden auch bei unterschiedlichen Emissionskoeffizienten ($\varepsilon = 1 \ldots 0{,}80$) in guter Näherung erfaßt. Ebenso dürften Bilanzen um Heizflächen bei praktischen Berechnungen gute Ergebnisse liefern.

Im Pauschalwert $\dot{f}_{mittel}$ begründet sich aber ein Schönheitsfehler. Es kann vorkommen, daß die Summe aller von den Oberflächen abgegebenen Wärmeströme von Null verschieden ist. Soll der Abgleich unbedingt erreicht werden, ist dies durch eine geringfügige Korrektur von $\dot{f}_{mittel}$ möglich.

Beispiel

Für den im Bild 5 dargestellten Raum gelten die Werte

$\varepsilon_1 = 0{,}95$; $\varepsilon_2 = 0{,}93$; $\varepsilon_3 = 0{,}90$
$T_1 = 300$ K; $T_2 = 288$ K; $T_3 = 293$ K
$a = 5$ m.

Es ist der spezifische Wärmestrom des Fußbodens infolge Strahlungsaustausches nach dem konventionellen und nach dem neuen Näherungsverfahren zu berechnen. Der genaue Wert beträgt $\dot{q}_1 = 42{,}64$ W/m².

Lösung

Für den speziellen Fall ergeben sich die Einstrahlzahlen nach Gl. (13) zu
$\Phi_{1,2} = 0{,}169$; $\Phi_{1,3} = 0{,}831$.

Die Eigenemissionen der Oberflächen folgen nach Gl. (6):

$$\dot{e}_1 = 0{,}95 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 \text{ W/m}^2 = 436{,}31 \text{ W/m}^2$$
$$\dot{e}_2 = 0{,}93 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 288^4 \text{ W/m}^2 = 362{,}77 \text{ W/m}^2$$
$$\dot{e}_3 = 0{,}90 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 293^4 \text{ W/m}^2 = 376{,}09 \text{ W/m}^2.$$

Der Wärmestrom entsprechend der konventionellen Näherung kann nach Gl. (15) berechnet werden

$$\dot{q}_1^* = 0{,}169\,(0{,}93 \cdot 436{,}31 - 0{,}95 \cdot 362{,}77) \text{ W/m}^2 + 0{,}831\,(0{,}90 \cdot 436{,}31 - 0{,}95 \cdot 376{,}09) \text{ W/m}^2$$
$$\dot{q}_1^* = 39{,}74 \text{ W/m}^2.$$

Die Abweichung beträgt 6,8 Prozent.

Für die vorgeschlagene Approximation muß noch die Kenntnis über die mittlere Flächenhelligkeit nach Gl. (19)

$$\dot{f}_{mittel} = \frac{436{,}31 \cdot 30 + 362{,}77 \cdot 18 + 376{,}09 \cdot 78}{0{,}95 \cdot 30 + 0{,}93 \cdot 18 + 0{,}90 \cdot 78} \text{ W/m}^2 = 424{,}07 \text{ W/m}^2$$

vorliegen. Schließlich kann Gl. (20) ausgewertet werden:

$$\dot{q}_1^{**} = 436{,}31 \text{ W/m}^2 - 0{,}95\,\{0{,}169\,(362{,}77 + 0{,}07 \cdot 424{,}07) + 0{,}831\,(376{,}09 + 0{,}10 \cdot 424{,}07)\} \text{ W/m}^2$$
$$\dot{q}_1^{**} = 42{,}92 \text{ W/m}^2.$$

Die Abweichung zum genauen Wert ergibt sich zu 0,6 Prozent.

Ergänzend sei mitgeteilt, daß sich für die übrigen Wärmestromdichten $\dot{q}_2^{**} = -36{,}65$ W/m² und $\dot{q}_3^{**} = -7{,}89$ W/m² errechnen. Die Gesamtwärmebilanz führt zu einem Rest von

$(30 \cdot 42{,}92 - 18 \cdot 36{,}65 - 78 \cdot 7{,}89)$ W = 12 W.

Die Erhöhung von $\dot{f}_{mittel}$ um 0,3 Prozent liefert dann

$(30 \cdot 42{,}80 - 18 \cdot 36{,}75 - 78 \cdot 7{,}98)$ W = 0,1 W.

Zusammenfassung

Die Berechnung des Strahlungsaustausches zwischen Oberflächen nach der Methode des umschlossenen Raums berücksichtigt alle Reflexionen. Unter der Voraussetzung homogener Strahlungseigenschaften und Temperaturen über die Flächen ist das Verfahren genau.

Die bisher für parallele Platten (unendlicher Größe) und Körper mit Umhüllungen verwendeten Berechnungsgleichungen sind identisch mit diesem Verfahren.

Für beliebig zueinander liegende Flächen führt die konventionelle Methode, die nur jeweils eine Absorption berücksichtigt, zu beträchtlichen Abweichungen. Das genaue Verfahren erfordert aber erheblichen Aufwand bezüglich der Datenbereitstellung (Einstrahlzahlen) und bedingt den Einsatz von Computern, so daß dies in erster Linie wissenschaftlichen Untersuchungen vorbehalten bleibt.

Für praktische Berechnungen, bei denen mitunter nur eine Fläche des Raums bilanzmäßig zu betrachten ist, wird ein Näherungsverfahren mit guter Genauigkeit vorgeschlagen. Es ist von der Methode des umschlossenen Raums abgeleitet, wobei die Gesamtenergiestromdichten der Umfassungen durch einen raumbezogenen Mittelwert ersetzt werden. Dadurch sind nur einfache lineare Gleichungen und keine Gleichungssysteme zu lösen. Die Anzahl der zu bestimmenden Einstrahlzahlen entspricht der des konventionellen Verfahrens.

Literatur:

/1/ *Glück, B.:* Strahlungsheizung – Theorie und Praxis. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1982