Vorschläge zur Mittelwertbildung der Zustandsgrößen für die Druckverlustberechnung von kompressiblen Rohrströmungen

Dr. sc. techn. Bernd GLÜCK
VEB Forschung und Rationalisierung Technische Gebäudeausrüstung

Bei der Strömung von Gasen und Dämpfen tritt mit sinkendem Druck p eine Expansion ein, d. h., das spezifische Volumen v wächst. Wärmeströme, die mit der Umgebung getauscht werden und zu Temperaturänderungen führen, bewirken ebenfalls Volumenänderungen. Je nach Wärmestromrichtung erfolgt eine Volumenzu- oder -abnahme. Die resultierende Volumenänderung führt zur Änderung der über den Querschnitt der Rohrleitung gemittelten Geschwindigkeit $\bar{w}$. Im Bild 1 sind mögliche Verläufe des Drucks, des spezifischen Volumens und der Geschwindigkeit des in einer 1 000 m langen Rohrleitung strömenden Dampfes dargestellt. Außerdem ist im doppeltlogarithmischen Netz (Bild 2) der Zusammenhang $p = p\,(v)$ aufgetragen. In guter Näherung liegen die Zustandspunkte auf einer Regressionsgeraden, die der Gleichung

$$p\,v^{\mu} = \text{const.} \tag{1}$$

genügt. Der Exponent beträgt im vorliegenden Fall

$$\mu = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 1{,}13\,.$$

Die bekannte *polytrope* Zustandsänderung ist durch einen beliebigen Wärmeaustausch mit der Umgebung bei gleichzeitig reversiblem, d. h. reibungsfreiem Verlauf gekennzeichnet. Als Gesetzmäßigkeit gilt $p\,v^{n} = \text{const.}$, wobei n Polytropenexponent genannt wird.
Für die Sonderfälle isentrope bzw. isotherme Zustandsänderung idealer Gase gelten $n = \kappa$ bzw. $n = 1$. Für reibungsbehaftete Vorgänge – beispielsweise auch für reale Rohrströmungen – ist die polytrope Zustandsänderung nach der Definition der Thermodynamik nicht gültig.
Die Auswertung realer reibungsbehafteter Prozesse zeigt jedoch, daß in den meisten Fällen ein Zusammenhang gemäß Gl. (1) hergestellt werden kann (vgl. Bild 2). Zumindest ist dies abschnittsweise möglich. Trotz der Analogie der Druck-Volumen-Beziehung zur Polytrope handelt es sich im weiteren nicht um eine solche, was durch die Bezeichnung des Exponenten mit μ verdeutlicht wird. Zwecks Abgrenzung soll der Vorgang eine *reibungsbehaftete polytrope Zustandsänderung* genannt werden. Die Zustandsgrößen ändern sich nach den Beziehungen

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{v}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}. \tag{2}$$

Der Schluß von p bzw. v auf die absolute Temperatur T gilt in der angegebenen Form exakt nur für ideale Gase.
Im Bild 3 sind theoretisch und praktisch mögliche Zustandsänderungen zusammengestellt.
Für die Berechnung des Druckverlaufs in kompressiblen Rohrströmungen gibt es in der Literatur eine Vielzahl von Berechnungsvorschlägen für analytische Lösungen, die jedoch teilweise große Vereinfachungen enthalten. Der Exponent μ ist eine Funktion des Wärmestroms, der dissipativen Effekte und des Strömungsmediums selbst. Die Unsicherheit bei der Festlegung von μ sowie die Temperaturberechnung nach Gl. (2) befriedigen in der Praxis nicht.
Beim numerischen Berechnungsverfahren können, ausgehend von den Energiegleichungen, alle physikalischen Einflüsse, wie zum Beispiel der mit der Umgebung getauschte Wärmestrom sowie die speziellen Stoff- und Zustandsdaten der Strömungsmedien recht genau modelliert werden. Die Rechengenauigkeit ist beliebig wählbar.
Die Energiegleichungen lauten

$$\int_1^2 v\,\mathrm{d}p + \frac{1}{2}(K_{E,2}\,\bar{w}_2^2 - K_{E,1}\,\bar{w}_1^2) + v_m \lambda_m \frac{l}{d}\left(\frac{\bar{w}^2}{2v}\right)_m = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}} = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(K_{E,2}\,\bar{w}_2^2 - K_{E,1}\,\bar{w}_1^2). \tag{4}$$

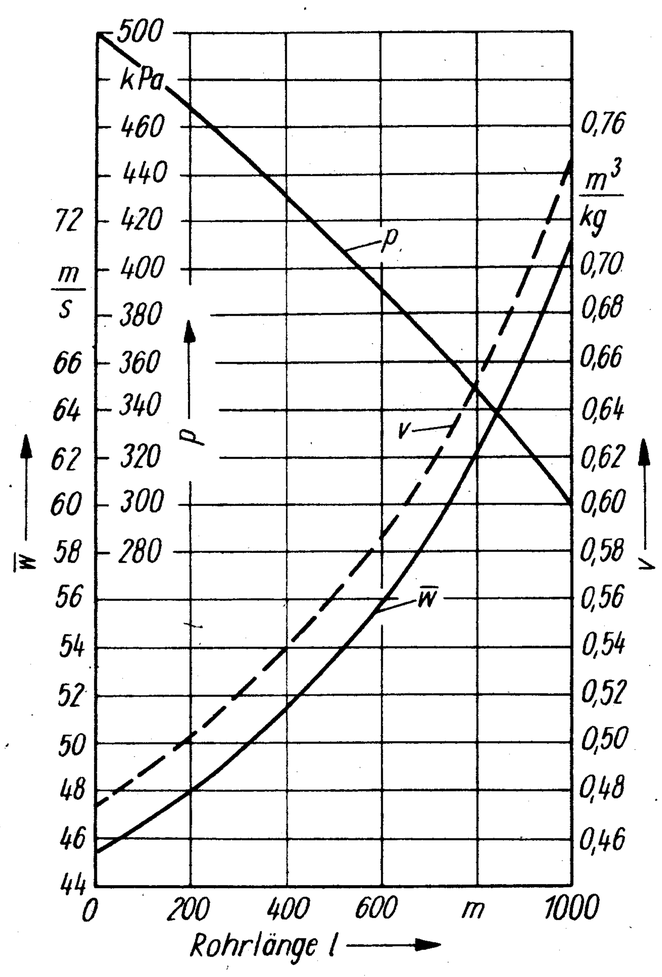
Darin bedeuten

- v spezifisches Volumen
- p Druck (Absolutwert)
- $\bar{w}$ Geschwindigkeit
- h spezifische Enthalpie
- $\dot{Q}$ Wärmestrom
- $\dot{m}$ Massestrom
- λ Rohrreibungsbeiwert
- l Rohrlänge
- d Rohrdurchmesser
- K_E Korrekturfaktor der kinetischen Energie $K_E = \dfrac{\int_A w^3 \mathrm{d}A}{\bar{w}^3 \int_A \mathrm{d}A}$

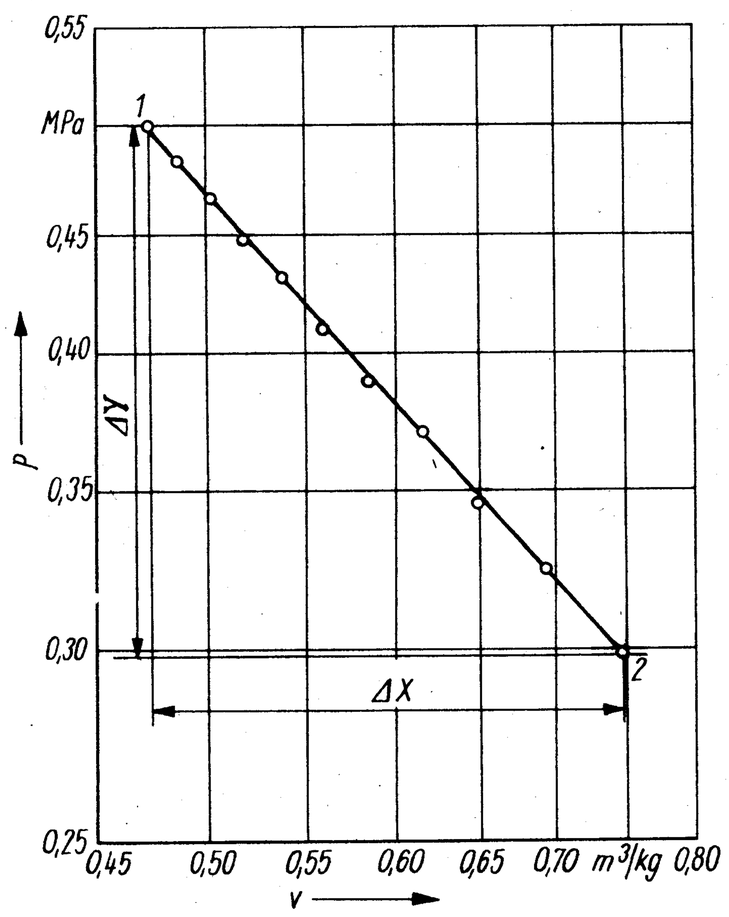
Grundsätzlich wächst die Genauigkeit eines numerischen Verfahrens mit feiner werdender Unterteilung, das heißt, eine 1 000 m lange Dampfleitung wird nicht in einem Durchgang, sondern beispielsweise in zehn Abschnitten zu je 100 m berechnet. Sind die Abschnitte klein genug, wäre es akzeptabel, statt der Mittelwerte $\bar{w}_m$, v_m usw. die Eingangsgrößen $\bar{w}_1$, v_1 usw. zu verwenden. Es würde sich dann um ein sogenanntes explizites Einschrittverfahren handeln.
Implizite Verfahren beziehen die gesuchte Lösung bereits mit ein, so daß eine *Mittelwertbildung* aus Anfangs- und Endwerten des Intervalls möglich ist. Da ohnehin eine iterative Lösung benötigt wird, soll von einer Schätzung der Austrittsparameter

p_2 und t_2

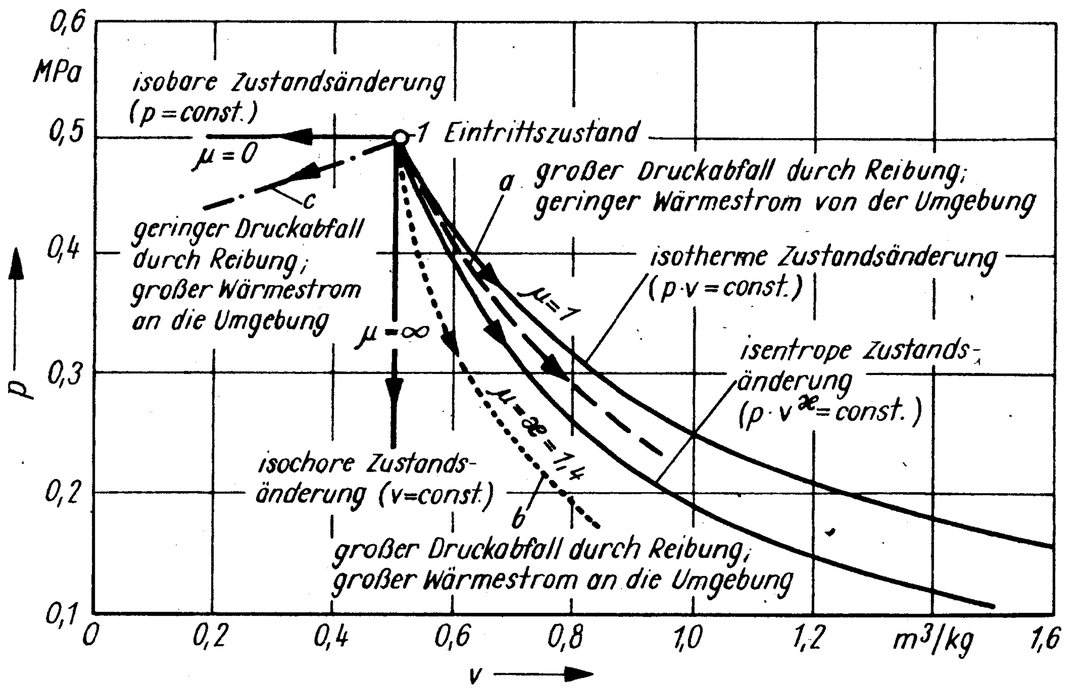
ausgegangen werden. Damit liegen auch das spezifische Volumen v_2 und unter Beachten der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit $\bar{w}_2$ fest.



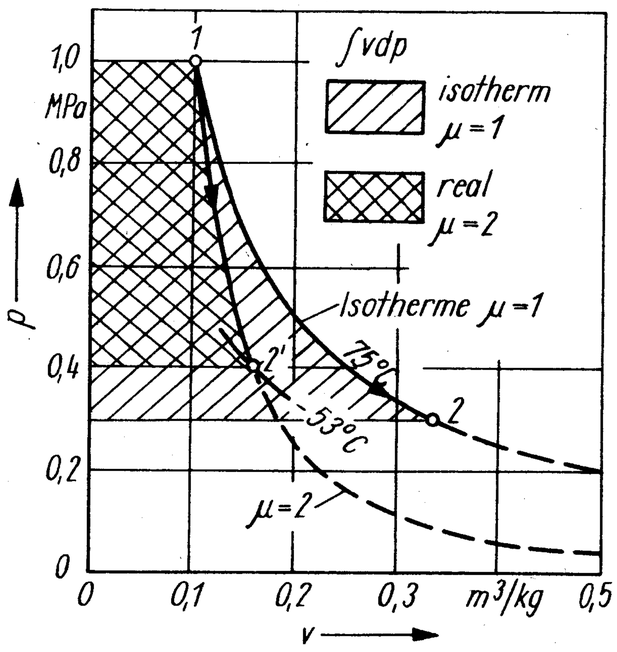
1 Wegabhängiger Druckverlauf p, Geschwindigkeitsverlauf $\bar{w}$ und Verlauf des spezifischen Volumens v des in einer 1 000 m langen Dampfleitung strömenden, überhitzten Wasserdampfes

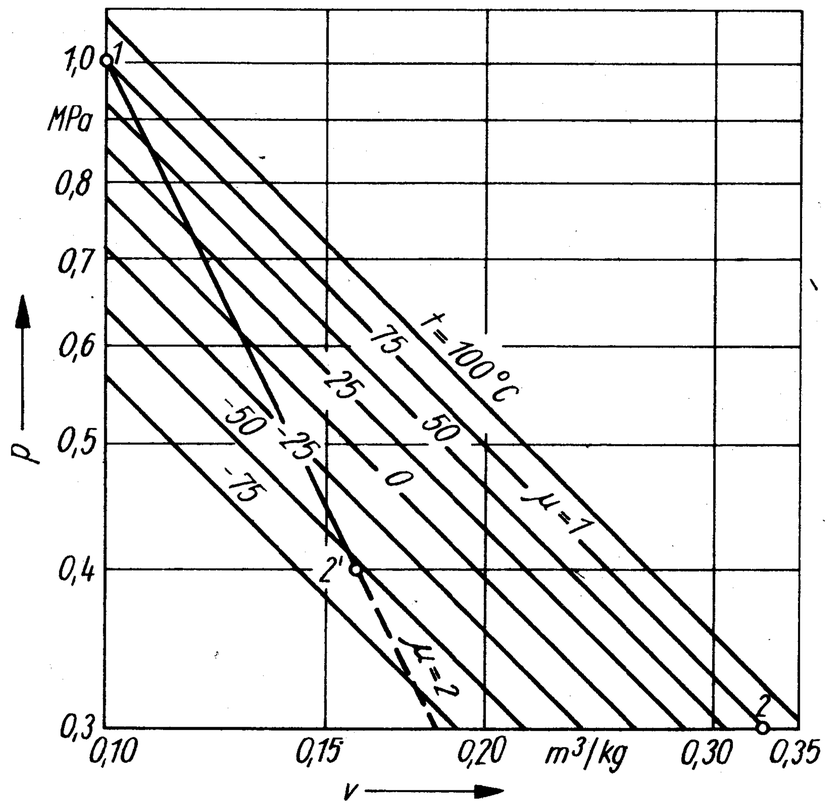


2 Zustandsparameter p, v – der im Bild 1 vorgestellten Dampfströmung – liegen im doppeltlogarithmischen Netz in guter Näherung auf einer Geraden $p\,v^{1,13} = \text{const.}$



3 Reibungsbehaftete polytrope Zustandsänderung, beginnend vom Zustand 1. Den theoretisch üblichen, reibungsfreien Zustandänderungen sind praktisch vorkommende Zustandsänderungen (a, b, c), die die Reibungsarbeit beachten, gegenübergestellt





4 Links: Veranschaulichung des Integrals $\int v\,dp$ als Fläche im p, v-Diagramm für eine isotherme Zustandsänderung ($\mu = 1$) von 1 nach 2 und für eine reibungsbehaftete Polytrope ($\mu = 2$) von 1 nach 2'. Rechts: Darstellung der reibungsbehafteten Polytropen im doppeltlogarithmischen Netz zur Veranschaulichung der möglichen Temperaturänderungen bei nichtisothermen Zustandsänderungen eines idealen Gases (Werte gelten näherungsweise für Luft)

Ein entsprechendes Rechenprogramm wurde unter Verwendung einer neuartigen Mittelwertbildung der Zustandswerte erarbeitet /1/.

Mittelwerte

Die Mittelwerte der Zustands- und Stoffwerte sind in einfachster Form als arithmetische Mittelwerte zu berechnen. Bild 1 zeigt jedoch, daß dies nur eine recht grobe Näherung darstellt. Der Mittelwert ist dann am besten, wenn der tatsächliche physikalische Zusammenhang aufgestellt und über den realen Bereich ein integrales Mittel gebildet wird. Nachfolgend sei dies mit vereinfachten aber jeweils charakteristischen Modellen versucht.

Mittlere Temperatur

Diese wird vor allem zum Berechnen des mit der Umgebung getauschten Wärmestroms $\dot{Q}$ längs der Rohrteilstrecke benötigt. Weiterhin ist die mittlere Temperatur für die Berechnung der Zähigkeit von Bedeutung. In beiden Fällen ist der Mittelwert längs des Weges, d. h. der Heizfläche „Rohr", zu bilden. Es gilt das bekannte logarithmische Mittel für die mittlere Übertemperatur

$$t_m - t_u = \frac{t_1 - t_2}{\ln \dfrac{t_1 - t_u}{t_2 - t_u}}, \tag{5}$$

wenn sich t_1 und t_2 auf den Ein- bzw. Austrittzustand beziehen und t_u die konstante Umgebungstemperatur darstellt. Die mittlere Temperatur des Mediums lautet dann

$$t_m = t_u + \frac{t_1 - t_2}{\ln \dfrac{t_1 - t_u}{t_2 - t_u}}. \tag{6}$$

Strömt gesättigter Dampf, gilt in guter Näherung

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}. \tag{6a}$$

Mittleres spezifisches Volumen

Für das Integral in Gl. (3) kann

$$\int_1^2 v\,dp = v_m (p_2 - p_1)$$

geschrieben werden; daraus folgt die Definitionsgleichung für den integralen Mittelwert

$$v_m = \frac{\int_1^2 v\,dp}{p_2 - p_1}. \tag{7}$$

Der Einfachheit halber wird zunächst eine *isotherme Zustandsänderung* angenommen. Für ein ideales Gas gilt der Zusammenhang

$$p\,v = p_1\,v_1 = p_2\,v_2. \tag{8}$$

Nach Substitution und anschließender Integration folgt

$$v_m = \frac{p_1\,v_1}{p_2 - p_1} \int_1^2 \frac{1}{p}\,dp = \frac{p_1\,v_1}{p_2 - p_1} \ln \frac{p_2}{p_1}. \tag{9}$$

Mit dem Druckverhältnis

$$\pi = \frac{p_2}{p_1} \tag{10}$$

und der Beziehung

$$p_1\,v_1 = \sqrt{p_1\,v_1\,p_2\,v_2} \tag{11}$$

gemäß Gl. (8), kann Gl. (9)

$$v_m = \sqrt{v_1\,v_2}\,\frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}} \tag{12}$$

geschrieben werden. Interessant ist es, den Faktor

$$\varphi = \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}} \tag{13}$$

auf seine Abhängigkeit von π zu untersuchen:

π	0,2	0,4	0,6	0,8	1
φ	0,8997	0,9659	0,9892	0,9979	1

Bei Druckänderungen $p_2 > 0{,}6\,p_1$ kann $\varphi \approx 1$ gesetzt werden. Damit ist das mittlere spezifische Volumen in guter Näherung als geometrisches Mittel aus den Anfangs- und Endwerten

$$v_m \approx \sqrt{v_1\,v_2} \tag{14}$$

bestimmbar.

Im Bild 4 ist das Integral $\int v dp$ als Fläche unter einer isothermen ($\mu = 1$) und einer reibungsbehafteten Polytrope (hier: $\mu = 2$) dargestellt. Es liegen zunächst keine Kenntnisse vor, ob die Mittelwertbildung nach Gl. (12) auch für $\mu \neq 1$ näherungsweise zulässig ist. Deshalb wird im folgenden die Ableitung von v_m für den allgemeinen Fall einer *reibungsbehafteten polytropen Zustandsänderung* wiederholt.

Die Gl. (7) liefert nach Substitution der Polytropenbeziehung

$$p\,v^\mu = p_1\,v_1^\mu = p_2\,v_2^\mu \tag{15}$$

$$v_m = \frac{v_1\,p_1^{\frac{1}{\mu}}}{p_2 - p_1} \int p^{-\frac{1}{\mu}}\,dp$$

sowie nach anschließender Integration

$$v_m = \frac{v_1 p_1^{\frac{1}{\mu}}}{p_2 - p_1}\left[p_2^{\frac{\mu-1}{\mu}} - p_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]\frac{\mu}{\mu-1}\,. \tag{16}$$

Das erneute Einsetzen der Gl. (15) ergibt beispielsweise die Form 1

$$v_m = \frac{v_2 p_2 - v_1 p_1}{p_2 - p_1}\,\frac{\mu}{\mu-1}\,.$$

Die Werte v_1, p_1 sind vorgegeben, die Parameter v_2, p_2 nach der Schätzung bekannt. Sehr großen Einfluß auf das Ergebnis hat aber der Term $\mu/(\mu-1)$:

μ	1	1,05	1,1	1,2	1,4	2	3	∞
$\frac{\mu}{\mu-1}$	∞	21	11	6	3,5	2	1,5	1

Selbstverständlich könnte

$$\mu = \frac{\ln(p_1/p_2)}{\ln(v_2/v_1)}$$

aus den bekannten Daten gebildet werden. Die sensible Wirkung von μ auf v_m ist einer konvergenten Lösungsentwicklung im Verlaufe der Iterationen mit realen Stoffdaten möglicherweise abträglich. Außerdem ist v_m nach Form 1 mit Gl. (12) nicht allgemeingültig vergleichbar.
Ausgehend von Gl. (16) wird deshalb eine weitere Umformung vorgenommen. Gl. (15) kann auch

$$p_1^{\frac{1}{\mu}} v_1 = \sqrt{p_1^{\frac{1}{\mu}} v_1}\,\sqrt{p_2^{\frac{1}{\mu}} v_2} \tag{17}$$

geschrieben werden. Unter Verwenden der in Gl. (10) definierten Abkürzung π folgt nach einigen Umformungen

$$v_m = \sqrt{v_1 v_2}\,\frac{\mu}{\mu-1}\left[\frac{\pi^{-\frac{0,5}{\mu}}}{1-\frac{1}{\pi}} - \frac{\pi^{\frac{0,5}{\mu}}}{\pi-1}\right]. \tag{18}$$

Dabei erhält der Faktor nunmehr die Form

$$\varphi = \frac{1}{1-\frac{1}{\mu}}\left[\frac{\pi^{-\frac{0,5}{\mu}}}{1-\frac{1}{\pi}} + \frac{\pi^{\frac{0,5}{\mu}}}{1-\pi}\right]. \tag{19}$$

Er beträgt in Abhängigkeit von π und μ:

μ \ π	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,5	1	1	1	1	1
1	0,8997	0,9659	0,9892	0,9979	1
1,2	0,9024	0,9668	0,9895	0,9980	1
1,3	0,9049	0,9677	0,9898	0,9980	1
1,4	0,9077	0,9686	0,9901	0,9981	1
2	0,9242	0,9743	0,9919	0,9984	1
∞	1	1	1	1	1

Die Werte der letzten Zeile sind sofort einleuchtend, da bei einer isochoren Zustandsänderung $v = v_1 = v_2 = v_m$ gelten.

Die Tabellenwerte stellen ein gutes Ergebnis dar, denn φ ist im praktischen Bereich nahezu unabhängig von μ. Das heißt, der reale Temperaturverlauf in der Rohrleitung kann unbeachtet bleiben. Die Mittelwertbildung für Isothermen nach Gl. (12) ist in guter Näherung allgemeingültig anwendbar.
Die Leistungsfähigkeit dieser Näherung ist aus Bild 4 ersichtlich. Für $\mu = 2$ wird der Zustandspunkt 2′ bei $p_2' = 0,4$ MPa und $t_2' = -53$ °C erreicht, d. h., die Temperatur fiel um 128 K. Nach vorstehender Tabelle weist der Mittelwert v_m aber nur einen Fehler auf von

$$\frac{0,9743 - 0,9659}{0,9659}\,100\,\% = 0,9\,\%.$$

Weiterhin war der „Kunstgriff", die Zustandsparameter der Eintritt- und Austrittseite mit den Gln. (11) bzw. (17) paritätisch einzuführen, für reale Gase und Dämpfe günstig, weil dadurch die Abweichungen vom Verhalten idealer Gase gut kompensiert werden dürften. Dies sei am Beispiel der Dampfleitung, deren Verläufe $p = p(l)$ und $\bar{w} = \bar{w}(l)$ im Bild 1 dargestellt sind, verdeutlicht.
In Auswertung des in Gl. (7) definierten Mittelwerts wurde im Bild 5 der Zusammenhang $v = v(p)$ aufgezeichnet und durch Planimetrieren oder numerische Berechnung der Mittelwert

$v_{m,num} = 0,5868$ m³/kg

gebildet. Aus Gl. (12) folgt

$v_m = 0,5890$ m³/kg (Abweichung 0,4 %).

Im Bild 5 ist weiterhin der Verlauf des spezifischen Volumens über die Länge gegenübergestellt. Wird vergleichsweise der Mittelwert über die Rohrlänge gebildet, so ergibt sich

$v_m' = 0,5768$ m³/kg (Abweichung − 1,7 %).

Schließlich beträgt das arithmetische Mittel

$v_m^* = 0,6110$ m³/kg (Abweichung − 4,1 %).

Mittlerer Staudruck

Für die Berechnung des Staudrucks sind das Quadrat der Geschwindigkeit und das spezifische Volumen erforderlich. Der Mittelwert über dem Strömungsquerschnitt $\bar{w}^2$ muß zusätzlich über die Länge der Rohrteilstrecke l gemittelt werden, so daß $\bar{w}_m^2$ entsteht. Ebenso müßte v über die Länge l zu v_m' gebildet werden. Wie Bild 5 verdeutlicht, unterscheiden sich die Mittelwerte der Kurven $v = f_1(p)$ bzw. $v = f_2(l)$. Um den physikalischen Zusammenhang richtig zu erfassen, werden deshalb die Größen $\bar{w}^2$ und v nicht einzeln, sondern zusammengefaßt gemittelt. Für den mittleren Staudruck gilt

$$S_m = \left(\frac{\bar{w}^2}{2v}\right)_m = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\bar{w}^2}{2v}\,\mathrm{d}l. \tag{20}$$

Für die einfache Mittelwertbestimmung sind im weiteren allerdings einige Näherungen unerläßlich. So folgt aus Gl. (3) bei *Vernachlässigung der Geschwindigkeitsänderung* für das Rohrleitungselement der Länge dl

$$-\,\mathrm{d}p = \frac{\lambda}{d}\,\frac{\bar{w}^2}{2v}\,\mathrm{d}l. \tag{21}$$

Für λ = const. ergibt sich über die Länge l bzw. das Druckintervall p_1 bis p_2 integriert

$$\int_0^l \frac{\bar{w}^2}{2v}\,\mathrm{d}l = \frac{d}{\lambda}(p_1 - p_2).$$

Damit ist der Mittelwert in Gl. (20) auch nach der Gleichung

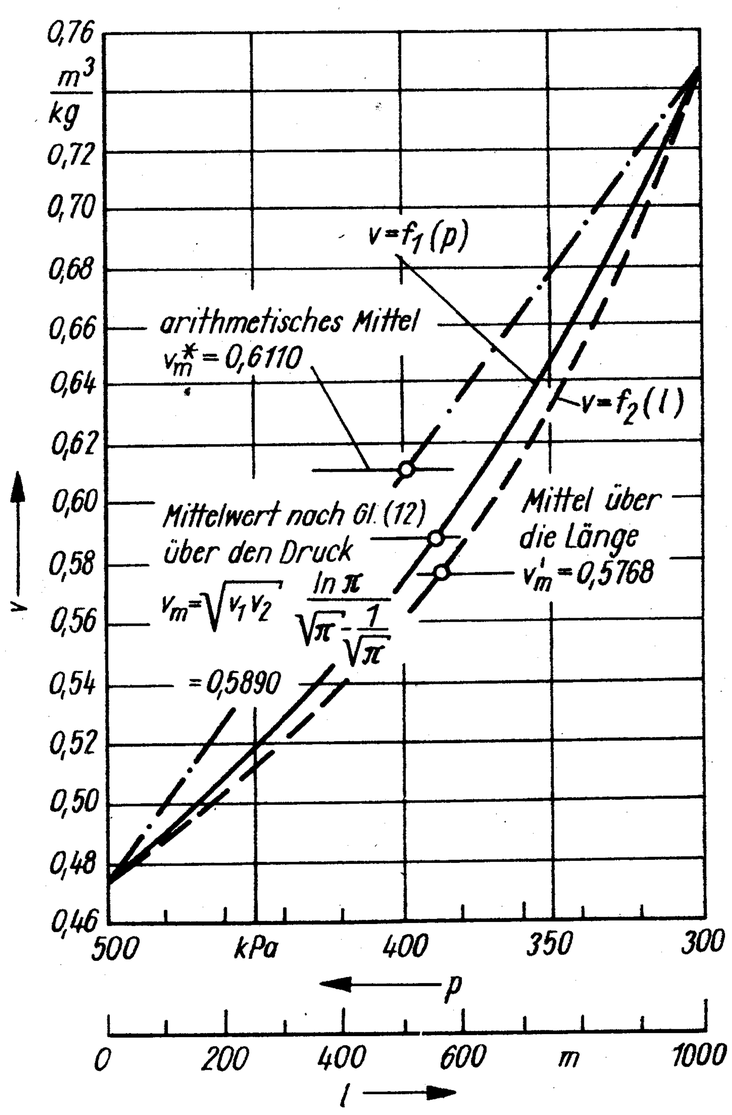
$$S_m = \left(\frac{\bar{w}^2}{2v}\right)_m = \frac{d}{\lambda l}(p_1 - p_2) \tag{22}$$

bestimmbar.
Für eine *isotherme Zustandsänderung* gelten die Gl. (8) und in Erweiterung dieser

$$\bar{w}\,p = \bar{w}_1\,p_1 = \bar{w}_2\,p_2. \tag{23}$$

Damit liefert die Gl. (21) nach Integration

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{\bar{w}_1^2}{v_1}\,p_1. \tag{24}$$



5 Spezifisches Volumen v als Funktion des Drucks und des Strömungsweges mit verschiedenen Mittelwerten (Grundlage: Dampfleitung nach Bild 1)

(Diese Gleichung wird häufig auch für analytische Berechnungen des Druckabfalls benutzt.) Die einfache mathematische Umformung

$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 - p_2)(p_1 + p_2)$ ergibt

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{w}_1^2}{v_1} \frac{p_1}{p_1 + p_2} \tag{25}$$

und nach Substitution der Gln. (8) und (23)

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\bar{w}_1 \bar{w}_2}{v_1 + v_2}. \tag{26}$$

Damit kann Gl. (22)

$$S_m = \left(\frac{\bar{w}^2}{2v}\right)_m = \frac{\bar{w}_1 \bar{w}_2}{v_1 + v_2} \tag{27}$$

geschrieben werden. Dies ist eine ideale Form der Mittelwertbildung.
Das gleiche Ergebnis gilt übrigens auch für die isochore Zustandsänderung. Aus $v = v_1 = v_2 = \text{const.}$ folgt $\bar{w} = \bar{w}_1 = \bar{w}_2 = \text{const.}$, womit Gl. (20) sofort

$S_m = \frac{\bar{w}_1^2}{2 v_1}$ liefert. Diese Beziehung kann inhaltsgleich auch in Form der Gl. (27) geschrieben werden.
Im Bild 6 ist, aufbauend auf Bild 1, $\bar{w}^2/(2v)$ über l und p aufgetragen. Die numerische Mittelwertbildung, bezogen auf die Länge, ergab für den Staudruck

$S_{m,num} = 2631$ Pa.

Gl. (27) liefert für die Idealisierung einer Isotherme

$S_m = 2647$ Pa (Abweichung 0,6 %).

Erwartungsgemäß führt die arithmetische Mittelwertbildung zu einem relativ schlechten Wert

$S_m^* = 2786$ (Abweichung 5,9 %).

Würde das Geschwindigkeitsquadrat über den Druck gemittelt, so folgte $\bar{w}_m^2 = \bar{w}_1 \bar{w}_2$, und in Kombination mit Gl. (12) ergäbe sich

$$S_m' = \frac{\bar{w}_1 \bar{w}_2}{2\sqrt{v_1 v_2}} \frac{\sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}}{\ln \pi} = 2746 \text{ Pa} \quad \text{(Abweichung 4,4 \%)}.$$

Schlußfolgernd stellt Gl. (27) eine sehr gute Näherung dar.

Mittlerer Druck

Dieser ist nur für die Bestimmung der Zähigkeit erforderlich. Deshalb muß der Mittelwert über die Rohrlänge l

$$p_m = \frac{1}{l} \int p \, dl \tag{28}$$

gebildet werden. Wird die Änderung der kinetischen Energie vernachlässigt und wird eine *isotherme Zustandsänderung* angenommen, folgt mit den Gln. (21), (8) und (23)

$$p_m = -\frac{2}{l} \frac{d}{\lambda} \frac{v_1 p_1}{\bar{w}_1^2 p_1^2} \int p^2 \, dp. \tag{29}$$

Nach Integration dieser Gleichung sowie anschließendem Einsetzen der Gl. (26) ergibt sich

$$p_m = -\frac{2 \bar{w}_1 \bar{w}_2}{(p_1 - p_2)(v_1 + v_2)} \frac{v_1}{\bar{w}_1^2 p_1} \frac{1}{3} (p_2^3 - p_1^3).$$

Die weiteren Umformungen liefern mit den Gln. (23) und (8)

$$p_m = \frac{2}{3} \frac{p_1^3 - p_2^3}{p_1^2 - p_2^2}.$$

Daraus läßt sich mit dem Druckverhältnis π gemäß Gl. (10) der mittlere Druck

$$p_m = \frac{2}{3} \frac{1 - \pi^3}{1 - \pi^2} p_1 \tag{30}$$

berechnen.
Für den im Bild 1 dargestellten Druckverlauf liefert die numerische Auswertung

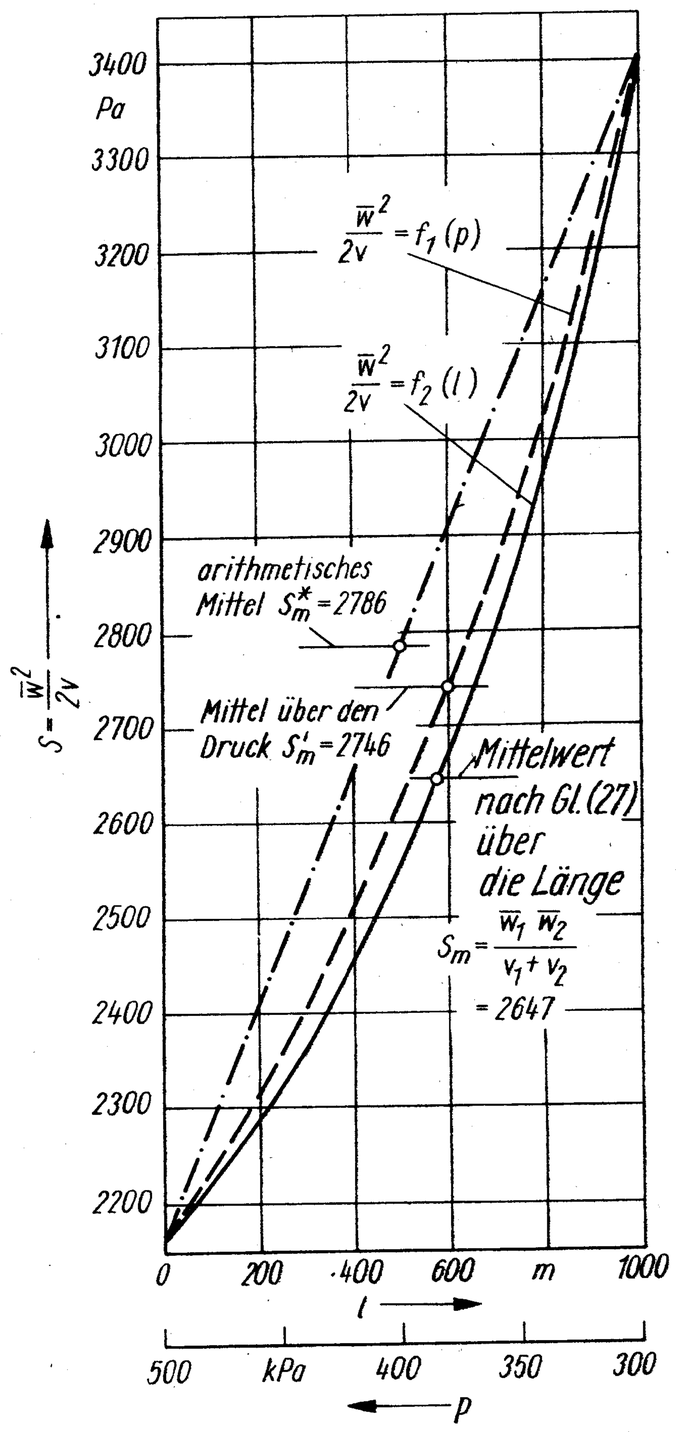
$p_{m,num} = 406\,891$ Pa.

Die Gl. (30) ergibt

$p_m = 407\,789$ Pa (Abweichung 0,2 %).

Der arithmetische Mittelwert

$$p_m^* = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_1}{2}(1 + \pi)$$



6 Staudruck S als Funktion des Strömungsweges und des Drucks mit verschiedenen Mittelwerten (Grundlage: Dampfleitung nach Bild 1)

kann dagegen bei großen Druckunterschieden zu erheblichen Fehlern führen. Der Vergleich beider Mittelwerte liefert:

$$\frac{p_m}{p_m^*} = \frac{4}{3} \frac{1 - \pi^3}{1 - \pi^2} \frac{1}{1 + \pi}$$

π	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\frac{p_m}{p_m^*}$	1,148	1,061	1,021	1,004	1

Mittlerer Rohrreibungsbeiwert

In Gl. (3) ist noch der Rohrreibungsbeiwert λ_m enthalten. Die Berechnung von λ hängt ab von der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{4 \dot{m}}{\eta \pi d}. \tag{31}$$

Diese Form ist am vorteilhaftesten, da hierbei nur eine Größe, die dynamische Viskosität η von den Parametern p und t abhängt. Für diese werden die jeweiligen Mittelwerte p_m nach Gl. (30) und t_m nach Gl. (6) verwendet.

Berechnungsgang

Nach Bereitstellen der mittelwerte können die Gln. (3) und (4) ausgewertet werden. Die explizite Darstellung der Austrittsparameter lautet:

$$p_2 = p_1 - \frac{K_{E,2} \bar{w}_2^2 - K_{E,1} \bar{w}_1^2}{2\sqrt{v_1 v_2}} \frac{\sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}}{\ln \pi} - \lambda_m \frac{l}{d} \frac{\bar{w}_1 \bar{w}_2}{v_1 + v_2} \tag{32}$$

$$h_2 = h_1 + \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{m}} - \frac{K_{E,2} \bar{w}_2^2 - K_{E,1} \bar{w}_1^2}{2}. \tag{33}$$

Bei der Berechnung ist zu beachten, daß $\dot{Q}_{12}$ eine Funktion von $(t_m - t_u)$ nach Gl. (5) ist.
Aus h_2 und p_2 läßt sich dann die Austrittstemperatur t_2 ermitteln. Der Vergleich der Werte (p_2, t_2) mit den Werten der Anfangsschätzung entscheidet, ob weitere Iterationen durchzuführen sind. Die Genauigkeit ist beliebig wählbar.
Intern verbleiben im Algorithmus aber noch Fehler durch Bildung der vorgestellten Mittelwerte v_m, S_m und p_m, die auf einer isothermen Zustandsänderung eines idealen Gases bzw. der Annahme $\mu = 1$ für reale Gase und Dämpfe bei teilweiser Vernachlässigung der Geschwindigkeitsänderung basieren. Wegen der einfachen Errechnung der Mittelwerte und der be-

deutend höheren Genauigkeit gegenüber dem Verwenden der jeweiligen Anfangswerte oder der arithmetischen Mittel werden die Gln. (12), (27) und (30) dennoch ohne Einschränkung empfohlen.
Mit feiner werdender Unterteilung der Rohrstrecke in einzelne Teilstrecken kann dieser interne Fehler beliebig reduziert werden. So könnte bei einer Unterschreitung des Austrittsdrucks (z. B. $p_2 < 0{,}8\, p_1$) oder der Austrittstemperatur (z. B. $T_2 < 0{,}98\ T_1$) eine feinere Unterteilung der Teilstrecken gefordert oder automatisch vorgenommen werden.
Das Gleichungssystem (32) und (33) gilt sowohl für das ideale Gas als auch für reale Gase und Dämpfe. Bei der Auswertung ergeben sich im ersten Fall allerdings starke Vereinfachungen bei der Ermittlung der Zustandsgrößen.
Die detaillierten Algorithmen sind in /1/ dargelegt.

Beispiele

Die folgenden Berechnungsbeispiele sollen die gute Qualität der vorgeschlagenen Näherungen verdeutlichen.

Beispiel 1

Durch eine 400 m lange Rohrleitung mit einem Innendurchmesser $d = 0{,}1$ m und einer Rauhigkeit von $\varepsilon = 0{,}1$ mm strömt Luft ($\dot{m} = 1{,}4$ kg/s). Die Eintrittsparameter betragen
$p_1 = 0{,}6$ MPa; $t_1 = 100$ °C.
Die Luft sei als ideales Gas mit den Gaskonstanten $R = 287$ J/kg K betrachtet, die Rohrleitung adiabat gedämmt. Die Berechnung der Strecken- und Austrittsdaten ergab unter Verwendung der vorgestellten Näherungen für die Längenunterteilungen
8 × 50 m; 4 × 100 m; 2 × 200 m; 1 × 400 m
die in Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnisse. Die spaltenweise Anordnung entspricht der Reihenfolge der Unterteilungen. Erfolgte die Berechnung abschnittsweise, gelten die Teilstrecken-Austrittsparameter p_2; t_2 jeweils als Eingangsdaten p_1, t_1 für die nachfolgende Teilstrecke.
Die Ergebnisse der feinen Längenunterteilung (jeweils erste Tabellenspalte) stimmen sehr gut mit denen der Grobunterteilung überein.

Beispiel 2

Gegeben ist eine wärmegedämmte Rohrleitung, die von einem Dampfstrom
$\dot{m} = 5$ kg/s
beaufschlagt wird. Die Daten lauten zusammengefaßt

Rohrdurchmesser	d	= 0,2 m
Rohrrauhigkeit	ε	= $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ m
Rohrlänge	l	= 600 m
Einzelwiderstände	$\Sigma\zeta$	= 12
Umgebungstemperatur	t_u	= −15 °C
Wärmeübergangskoeffizient		
außen	α_a	= 23 W/m² K
innen	α_i	= 380 W/m² K
Wärmeleitkoeffizient		
Rohr	λ_R	= 50 W/m K
Dämmung	λ_D	= 0,05 W/m K
Dämmdicke	δ	= 0,06 m.

Die Dampfparameter an der Einspeisestelle betragen
$p_1 = 1{,}5 \cdot 10^6$ Pa; $t_1 = 300$ °C.

Tabelle 1: Ergebnisse des Beispiels 1; Adiabate Heißluftleitung

l m	p Pa				v m³/kg				t °C				$\bar{w}$ m/s			
0	600 000				0,1784				100				31,8			
50	570 653				0,1875				99,9				33,4			
100	539 686	539 670			0,1982	0,1983			99,7	99,9			35,3	35,3		
150	506 793				0,2110				99,6				37,6			
200	471 558	471 488	471 469		0,2267	0,2269	0,2269		99,4	99,7	99,7		40,4	40,4	40,4	
250	433 385				0,2465				99,2				43,9			
300	391 372	391 188			0,2728	0,2732			99,0	99,3			48,6	48,7		
350	344 021				0,3101				98,7				55,3			
400	288 503	288 067	287 730	286 544	0,3691	0,3699	0,3703	0,3719	98,1	98,3	98,2	98,3	65,8	65,9	66,0	66,3
Abweichung in %	0	−0,15	−0,27	−0,68	0	0,22	0,33	0,76	0	0,20	0,10	0,20	0	0,15	0,30	0,76

Die Parameter des strömenden Dampfes sind abschnittsweise (je $l' = 100$ m und $\Sigma\zeta' = 2$) und in einem Zuge berechnet worden.
Die Ergebnisse – in Tabelle 2 dargestellt – zeigen gute Übereinstimmung unabhängig von der Intervallunterteilung. Dies bedeutet, daß die vorgeschlagenen Mittelwertbildungen auch für Heißdampfleitungen anwendbar sind.
Da in dem Beispiel der Zustandsverlauf durchweg im überhitzten Gebiet liegt und der Dampf sich somit ähnlich wie ein ideales Gas verhält, war dieses Ergebnis zu erwarten.

Beispiel 3

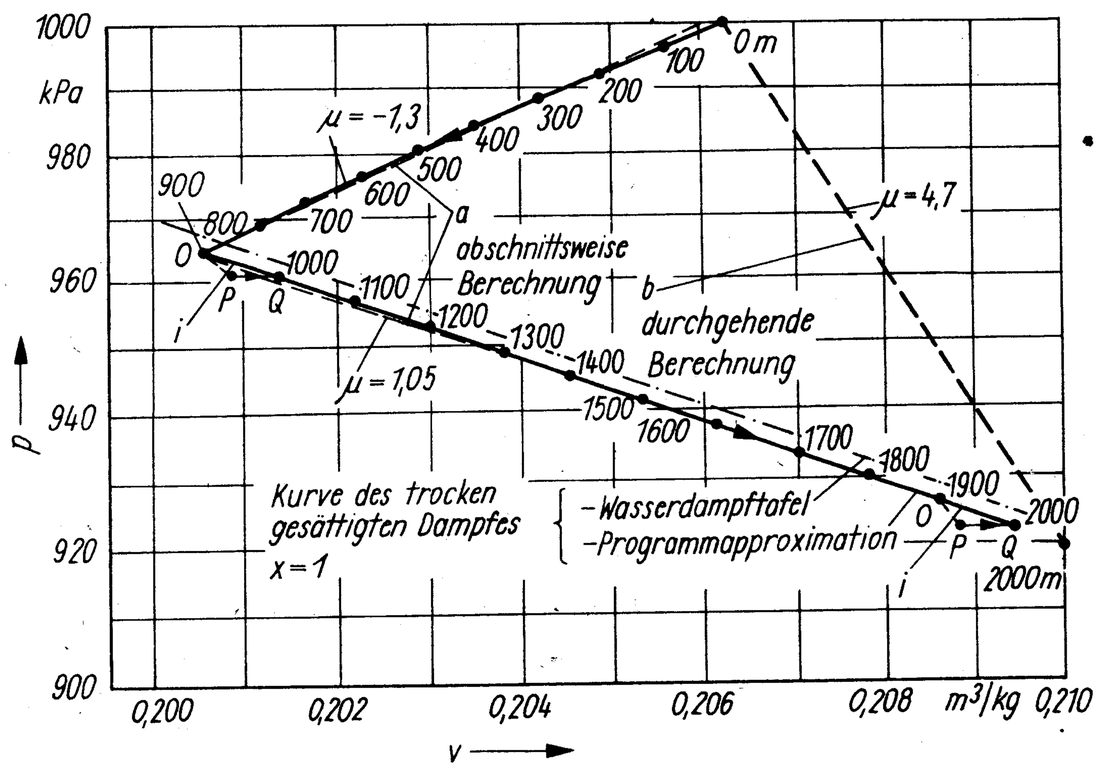
Heißdampf ($\dot{m} = 2$ kg/s) mit dem Zustand
$p_1 = 1\,000\,000$ Pa
$t_1 = 200$ °C
soll durch eine Rohrleitung
$d = 0{,}2$ m
$\varepsilon = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ m
$l = 2\,000$ m
$\Sigma\zeta = 40$
strömen. Die charakteristischen wärmetechnischen Größen lauten
$\delta = 0{,}06$ m
$\lambda_D = 0{,}05$ W/m K
$\lambda_R = 50$ W/m K
$\alpha_i = 10\,000$ W/m² K
$\alpha_a = 20$ W/m² K
$t_u = 0$ °C.
(Der Koeffizient α_i trifft eigentlich erst bei Kondensation des Dampfes an der Wandung zu. Der Wärmeübergangswiderstand ist aber gegenüber dem Wärmeleitwiderstand der Dämmung ohnehin bedeutungslos. Der eventuell zu große Wert sei als Sicherheitszuschlag zu betrachten.)
Das Rechenprogramm mit den abgeleiteten Mittelwerten liefert die in Tabelle 3 zusammengestellten Werte. Die Berechnung erfolgte zunächst schrittweise in Rohrabschnitten von je 100 m mit $\Sigma\zeta = 2$. Das anfallende Kondensat $\dot{m}_K$ wird am Ende eines jeden Intervalls vom Dampfstrom $\dot{m}$ subtrahiert. Die angegebenen Tabellenwerte $\bar{w}$, $\dot{m}_K$ und $\dot{m}$ gelten am Ende des jeweiligen Rohrabschnitts. Die Größe $\dot{m}$ stellt damit den rechnerischen Dampf-Massestrom im nachfolgenden Intervall dar. Das Kondensat wird immer am Ende des Rohrabschnitts „abgeführt".
Die Ergebnisse der durchgehenden Berechnung ($l = 2\,000$ m; $\Sigma\zeta = 40$) sind in der Tabelle – jeweils rechter Wert innerhalb der Spalte – vermerkt. Die Abweichungen erscheinen auf den ersten Blick gering. Der Fehler des Druckabfalls ($p_1 - p_2$) beträgt aber immerhin 3,8 Prozent.
Veranschaulicht man sich die Zustandsänderung im p, v-Diagramm (Bild 7),

Tabelle 2: Ergebnisse des Beispiels 2; Heißdampfleitung

l m	p Pa		v m³/kg		t °C		$\bar{w}$ m/s	
0	1 500 000		0,1697		300		27,0	
100	1 479 845		0,1713		297,8		27,3	
200	1 459 493		0,1730		295,6		27,5	
300	1 438 934		0,1748		293,4		27,8	
400	1 418 160		0,1767		291,3		28,1	
500	1 397 159		0,1786		289,1		28,4	
600	1 375 921	1 375 839	0,1807	0,1807	286,9	286,9	28,8	28,8
Abweichung in %		−0,006		0		0		0

Tabelle 3: Ergebnisse des Beispiels 3; Heißdampf-/Sattdampfleitung

l m	p Pa	v m³/kg	t °C	$\bar{w}$ m/s	$\dot{m}_K$ kg/s	$\dot{m}$ kg/s
0	1 000 000	0,2063	200	13,1	–	2,0000
100	996 016	0,2056	197,1	13,1	–	2,0000
200	992 048	0,2049	194,4	13,0	–	2,0000
300	988 094	0,2042	191,7	13,0	–	2,0000
400	984 155	0,2035	189,1	13,0	–	2,0000
500	980 230	0,2029	186,6	12,9	–	2,0000
600	976 318	0,2023	184,2	12,9	–	2,0000
700	972 419	0,2017	181,8	12,8	–	2,0000
800	968 530	0,2012	179,6	12,8	–	2,0000
900	964 648	0,2006	178,5	12,8	0,0025	1,9975
1000	960 769	0,2014	178,3	12,8	0,0058	1,9917
1100	956 896	0,2022	178,1	12,8	0,0058	1,9859
1200	953 031	0,2030	177,9	12,8	0,0058	1,9801
1300	949 173	0,2038	177,8	12,8	0,0058	1,9743
1400	945 322	0,2045	177,6	12,9	0,0058	1,9685
1500	941 478	0,2053	177,4	12,9	0,0058	1,9627
1600	937 642	0,2061	177,2	12,9	0,0058	1,9569
1700	933 813	0,2070	177,1	12,9	0,0058	1,9511
1800	929 991	0,2078	176,9	12,9	0,0058	1,9454
1900	926 176	0,2086	176,7	12,9	0,0058	1,9396
2000	922 368 919 447	0,2094 0,2100	176,5 176,4	12,9 13,4	0,0057	1,9339 1,9304
Abweichung in %	– 0,32	0,29	– 0,06	3,9		– 0,18



7 Zustandsänderung einer Heißdampfströmung, die im Naßdampfgebiet endet, nach Beispiel 3. Die Achsen des p, v-Diagramms sind beide logarithmisch, jedoch mit unterschiedlicher Größe der Grundeinheit geteilt. Es sind die Ergebnisse der abschnittsweisen und der durchgehenden Berechnung der 2 000 m langen Dampfleitung gegenübergestellt.

so ist das Ergebnis der durchgehenden Rechnung jedoch erstaunlich genau, denn der Weg b weicht vom tatsächlichen Verlauf der Zustandsänderung a erheblich ab. Der Verlauf a ist im Heißdampfgebiet durch die Verringerung des spezifischen Volumens bei gleichzeitig sinkendem Druck gekennzeichnet. Dieses Verhalten wird durch den starken Wärmestrom an die Umgebung verursacht. Im Sattdampfgebiet nimmt das spezifische Volumen mit sinkendem Druck gemäß $v'' = f(p)$ zu. Die Dampfmenge verringert sich jedoch abschnittsweise. Auf die im Intervall i strömende Menge $\dot{m}$ bezogen, würde die Zustandsänderung von O nach P verlaufen. Es ergäbe sich

$$v_P \approx \frac{(\dot{m} - \dot{m}_K)}{\dot{m}} v''_Q .$$

Nach Ausscheiden von $\dot{m}_K$ – z. B. an einer Rohrentwässerung – würde der Punkt Q erreicht. Dieser sägezahnartige Verlauf wird aber gemäß Berechnungsmodell nicht beachtet. Der Einfluß ist auch relativ gering.

Da im Bild 7 die p, v-Koordinaten im doppeltlogarithmischen Netz aufgetragen wurden, ist sofort zu erkennen, daß in guter Näherung für den Zustandsverlauf im Heiß- und im Sattdampfgebiet die Gleichung $p\,v^{\mu} =$ const. benutzt werden kann. Allerdings ist der Exponent bei überhitztem Dampf kaum voraussagbar. Für dieses Beispiel gelten

Heißdampf $\mu = -1{,}3$

Sattdampf $\mu = 1{,}05$.

Bei der direkten Ermittlung der Exponenten aus dem Diagramm ist zu beachten, daß die Teilung der Ordinate $^1/_3$ der Abszissenteilung beträgt.

Es sei noch auf den Unterschied der Kurven $x = 1$ (trocken gesättigter Dampf) nach den Tafelwerten und nach der Programmapproximation hingewiesen. Er entsteht durch die in den Unterprogrammen enthaltenen Näherungen /2/ und durch die im Algorithmus /1/ vorhandenen zulässigen Fehlerschranken bezüglich t_2 und p_2. Zudem entsteht v_2 nicht aus den aktuellen Daten der Iteration, sondern stammt aus dem jeweils vorhergehenden Schritt. Mit 0,2 ... 0,25 Prozent Fehler ist das verwendete Verfahren jedoch akzeptabel.

Literatur

/1/ *Glück, B.:* Bausteine der Heizungstechnik, Hydrodynamische und Gasdynamische Rohrströmungen, Druckverluste.
Berlin: VEB Verlag für Bauwesen (erscheint 1987)

/2/ *Glück, B.:* Bausteine der Heizungstechnik, Stoffwerte von Wasser, Wasserdampf, Luft.
Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1986