

Mit kreuzmäanderförmigen Rohrregistern

Thermische Bauteilaktivierung

Aus technologischen Gründen wurde zur thermischen Aktivierung von Betondecken eine kreuzweise Rohrverlegung mit Verbundrohren aus dem Bereich der Installationstechnik auf den Markt gebracht. Es werden damit Register ohne eine zusätzliche, formgebende Stahlmatte gefertigt, die gut handhabbar sind. Die Kühlleistungen und Speicherwärmen dieser neuartigen Konstruktion waren bisher nicht berechenbar, weshalb die unterschiedlichsten Angaben in die Diskussion gebracht wurden. Es war deshalb wichtig zu wissen, wie sich die geschilderte Konstruktion leistungsmäßig tatsächlich einordnet. Ein spezieller Algorithmus ist dafür entwickelt worden.¹

Die thermische Bauteilaktivierung befindet sich immer noch in einer intensiven Entwicklungsphase. Es erscheinen oft neue Lösungen auf dem Markt, die hauptsächlich mit der Zielstellung einer schnelleren und kostengünstigeren Verlegung konzipiert werden. Leider unterbleiben wegen des großen theoretischen Aufwandes in der Regel die thermodynamischen Untersuchungen. Mutmaßungen über die Leistungen nehmen breiten Raum ein und werden pseudowissenschaftlich diskutiert.

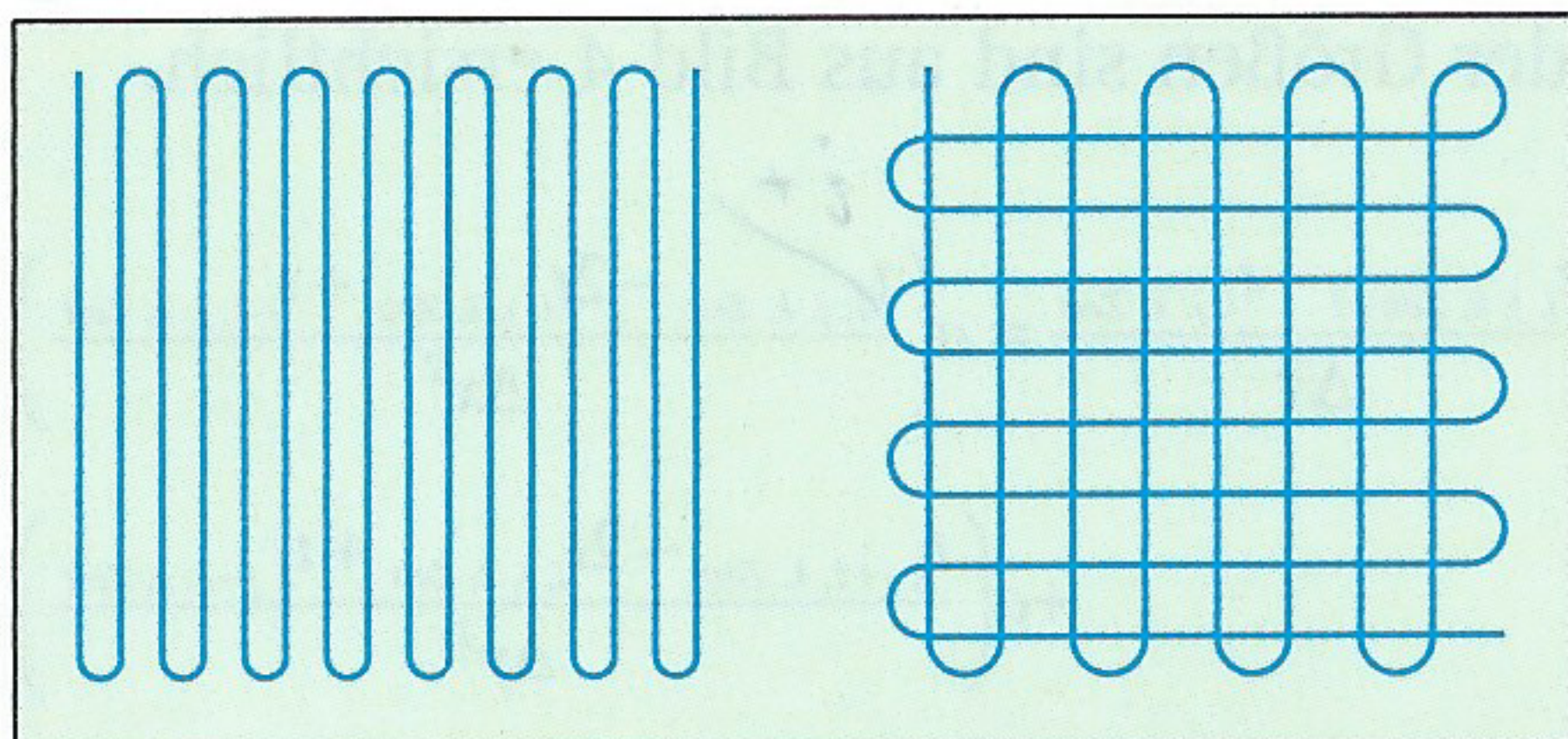


Bild 1: Gegenüberstellung einer mäanderförmigen Rohrverlegung und einer kreuzweisen Verlegung mit doppeltem Rohrabstand

Für konventionelle Rohrverlegungen werden bevorzugt mäanderförmige, seltener auch spiralförmige Rohrschlangen eingesetzt. Ein neuer Konstruktionsvorschlag der Fa. Polytherm geht von einer kreuzweisen Verlegung aus, wobei zwei

mäanderförmige Rohrleitungen rechtwinklig zueinander in zwei Lagen angeordnet werden. Bild 1 zeigt die Gegenüberstellung der bisherigen und der neuen Konstruktion. Die Vorteile der neuen Lösung sind technologisch begründet. Es werden aus relativ dickem

■ Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück

F+E TGA, 08547 Jöbnitz (Plauen) und
Westsächsische Hochschule Zwickau (FH)

Rohr 20,2 x 2,6 mm aus dem Bereich der Installationstechnik Register von etwa 13 m² gefertigt, die infolge der Verlegestruktur und der Rohrsteifigkeit ohne zusätzliche Stahlmatte transportiert, in den Bewehrungskorb eingebracht und mit Beton vergossen werden können.

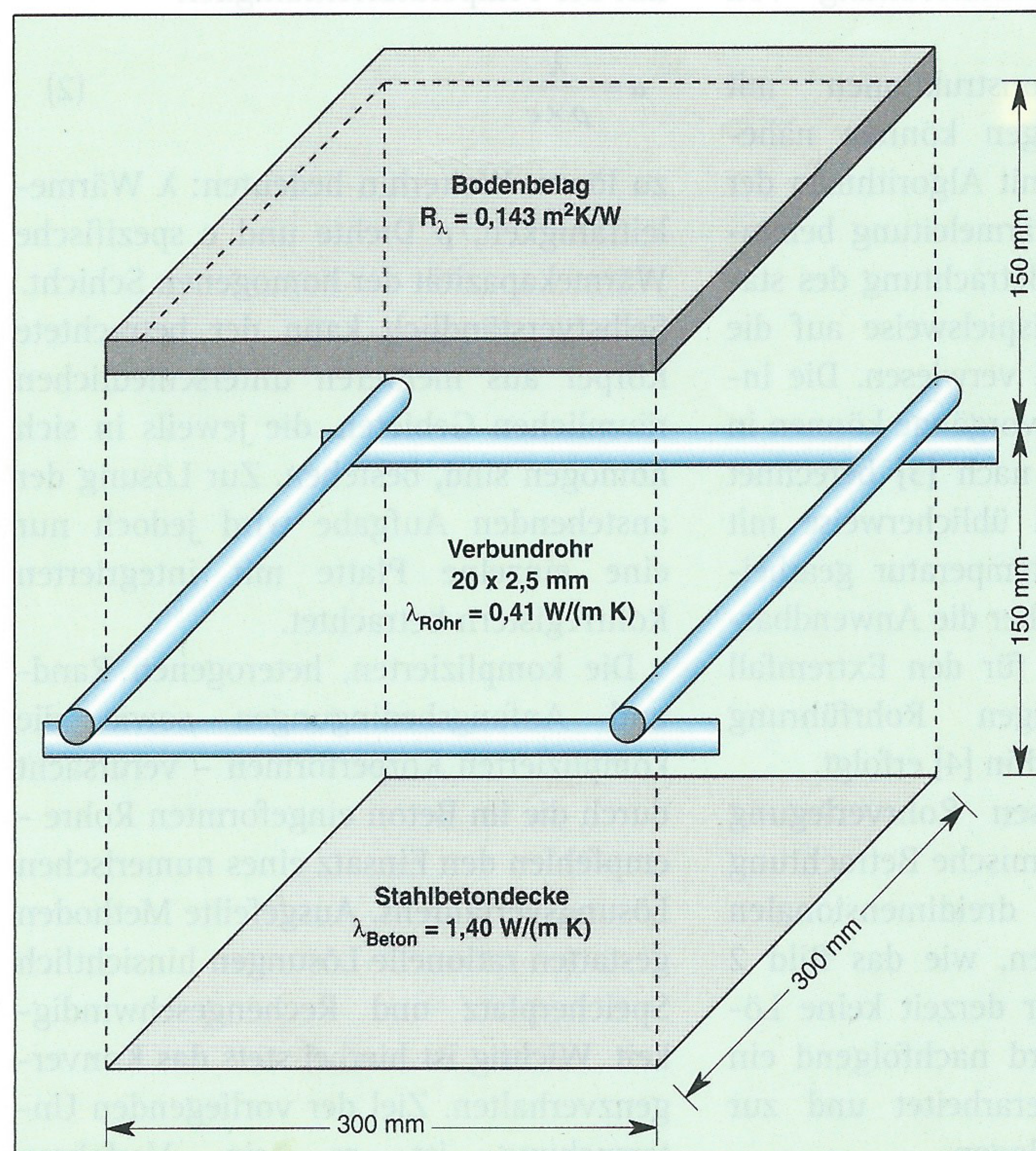


Bild 2: Ausschnitt aus einer Betondecke – hier beispielsweise ein Würfel – mit einem im Quadrat verlegten Rohrregister und Anordnung eines zusätzlichen Fußbodenbelages mit Angabe der Daten für die zu untersuchende Grundvariante

¹ Die Ausarbeitung erfolgte auf Veranlassung der Fa. Polytherm, Ochtrup, die u.a. auf dieser Grundlage eine weitere Entwicklungsarbeit betreibt

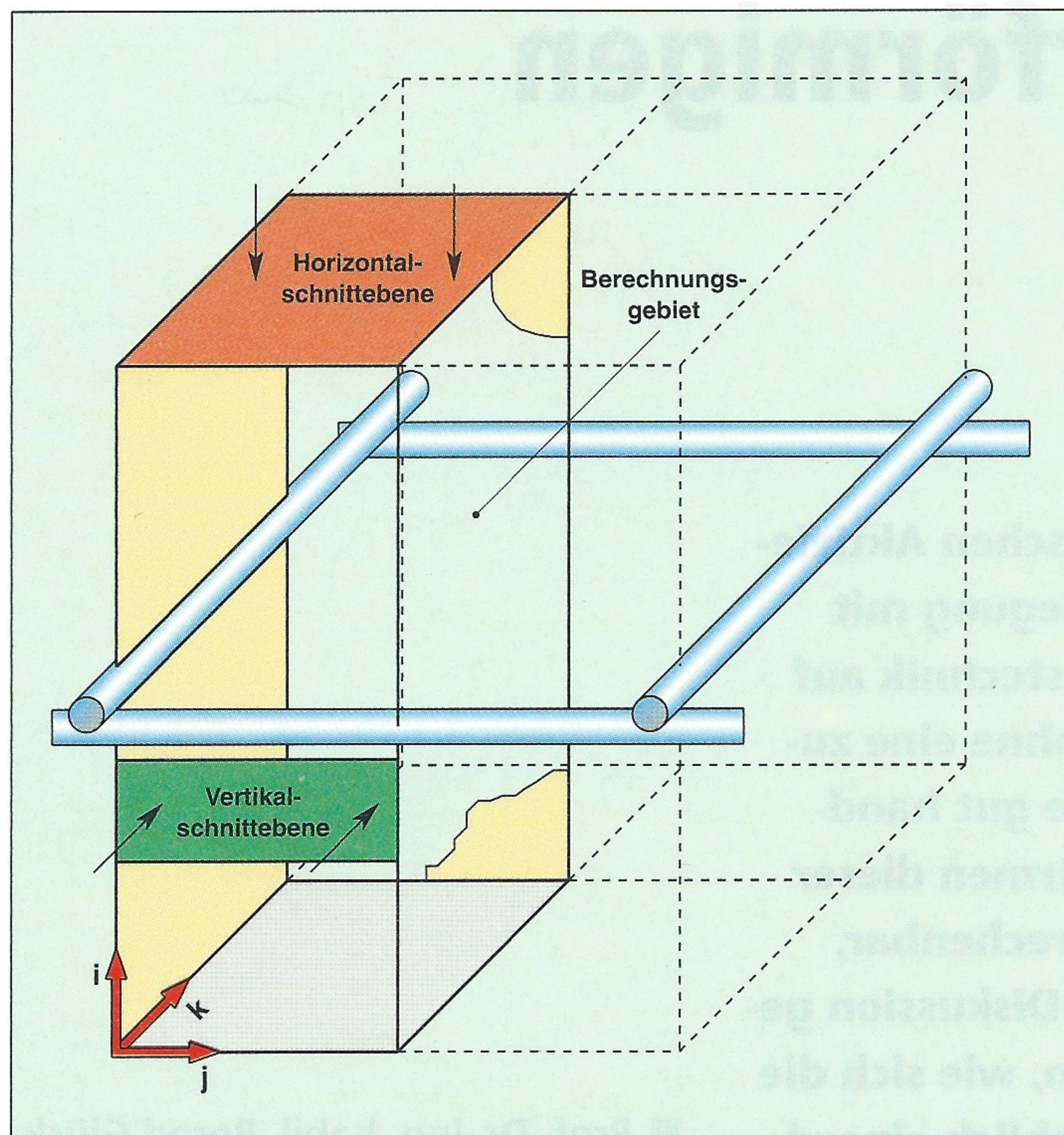


Bild 3: Ausschnitt aus einer Massivdecke mit Rohrquadrat und Darstellung des erforderlichen Berechnungsgebietes

Die Wärmespeicherung ($\equiv$ „Kältespeicherung“) und die Kühlleistung waren nicht bekannt, sie wurden in der Größe wie bei einer mäanderförmigen Lösung mit dem halben Rohrabstand vermutet. Dies bedeutet, dass beispielsweise „wärmetechnische Identität“ zwischen der kreuzweisen Rohrverlegung mit einem Rohrabstand von 300 mm und einer mäanderförmigen Rohranordnung von 150 mm besteht.

Die üblichen Konstruktionen mit parallelen Rohrleitungen können näherungsweise sehr gut mit Algorithmen der zweidimensionalen Wärmeleitung behandelt werden. Für die Betrachtung des stationären Falls sei beispielsweise auf die Verfahren in [1, 2, 3] verwiesen. Die instationären Wärmeleitvorgänge können in einfacher Weise z.B. nach [3] berechnet werden. Hierbei wird üblicherweise mit der mittleren Wassertemperatur gearbeitet. Untersuchungen über die Anwendbarkeit dieser Näherung für den Extremfall einer schleifenförmigen Rohrführung („Haarnadelform“) sind in [4] erfolgt.

Bei der kreuzweisen Rohrverlegung muss die thermodynamische Betrachtung unbedingt auf der dreidimensionalen Wärmeleitung basieren, wie das Bild 2 verdeutlicht. Da dafür derzeit keine Lösung bekannt ist, wird nachfolgend ein neuer Algorithmus erarbeitet und zur Anwendung vorgeschlagen.

Algorithmus

Zur Berechnung der dreidimensionalen, instationären Temperaturverteilung in homogenen, isotropen Körpern ist die Fouriersche Differentialgleichung in dreidimensionaler Form

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit

$$a = \frac{\lambda}{\rho \times c} \quad (2)$$

zu lösen. Weiterhin bedeuten: λ Wärmeleitfähigkeit, ρ Dichte und c spezifische Wärmekapazität der homogenen Schicht. Selbstverständlich kann der betrachtete Körper aus mehreren unterschiedlichen räumlichen Gebieten, die jeweils in sich homogen sind, bestehen. Zur Lösung der anstehenden Aufgabe wird jedoch nur eine einzelne Platte mit integrierten Rohrregistern betrachtet.

Die komplizierten, heterogenen Rand- und Anfangsbedingungen sowie die komplizierten Körperformen – verursacht durch die im Beton eingeformten Rohre – empfehlen den Einsatz eines numerischen Lösungsverfahrens. Ausgefeilte Methoden gestatten rationale Lösungen hinsichtlich Speicherplatz und Rechengeschwindigkeit. Wichtig ist hierbei stets das Konvergenzverhalten. Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, ein Verfahren

vorzustellen, das quasi von jedermann an die spezielle Problematik angepasst werden kann. Aus diesem Grund wird im Weiteren ein sehr einfaches, sofort verständliches Verfahren benutzt. Die besonderen Approximationen, die für das grafische Verfahren an den Bauteilrändern entwickelt wurden, können dabei in anschaulicher Weise in den numerischen Algorithmus integriert werden.

Die Differentialgleichung (1), die das instationäre Temperaturfeld allgemeingültig beschreibt, wird in Vorbereitung auf eine numerische Lösung als Differenzgleichung geschrieben:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \left[\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) + \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) \right] \quad (3)$$

Der Differenzenquotient $\Delta t / \Delta \tau$ ist bei gleicher Ortskoordinate und die Differenzenquotienten $\Delta t / \Delta x$, $\Delta t / \Delta y$ und $\Delta t / \Delta z$ sind bei gleicher Zeitkoordinate zu bilden.

Dem Algorithmus liegt dabei eine fest definierte Gittergestaltung mit den Abständen Δx , Δy und Δz sowie eine bestimmte Zeitschrittweite $\Delta \tau$ zugrunde. Bild 3 zeigt einen Quader mit dem Grundriss des Rohrquadrates. Aus Symmetriegründen ist nur ein Viertel davon zu simulieren (Berechnungsgebiet). Die Begrenzungsflächen sind angedeutet. Die eingetragenen Schnittebenen gelten für Bild 4.

Basisalgorithmus

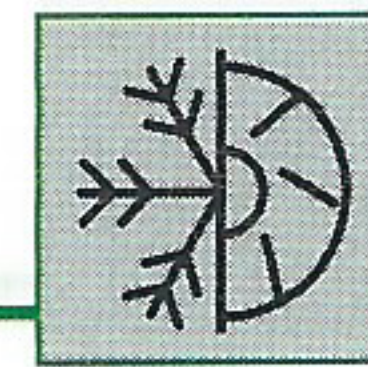
Als Laufvariable gelten i , j und k . Für die Temperatur ergibt sich somit:

$t_{i,j,k, \text{Zeit}}$ (°C) = Temperatur des Bauteils an der Stelle i , j , k zum Zeitpunkt „Zeit“. Die Gittergestaltung und die Zuordnung der Größen sind aus Bild 4 ersichtlich.

$$\begin{aligned} \frac{t_{i,j,k, \text{Zeit}+1} - t_{i,j,k, \text{Zeit}}}{\Delta \tau} = & a \left(\frac{t_{i,j,k, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i-1,j,k, \text{Zeit}}}{\Delta x^2} \right) \\ & + a \left(\frac{t_{i,j+1,k, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i,j-1,k, \text{Zeit}}}{\Delta y^2} \right) \\ & + a \left(\frac{t_{i,j,k+1, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i,j,k-1, \text{Zeit}}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Das Verfahren arbeitet rein explizit im Zeitschritt, weshalb aus Stabilitätsgründen eine Beschränkung für den Zeitschritt

$$\Delta \tau < \frac{1}{2a \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (5)$$



gilt. D.h., die geometrischen Diskretisierungen Δx , Δy und Δz nehmen direkt Einfluss auf die zulässige Größe des Zeitschrittes Δt .

Ausgehend von einer bekannten Temperaturverteilung zum Zeitpunkt „Zeit“, folgt die explizite Darstellung der Temperaturen an jedem Punkt i, j, k am Ende des Zeitintervalls $\Delta \tau$ – also zum Zeitpunkt „Zeit+1“ – sofort aus Gl. (4) zu:

$$t_{i,j,k, \text{Zeit}+1} = t_{i,j,k, \text{Zeit}} + \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{i+1,j,k, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i-1,j,k, \text{Zeit}}) + \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2} (t_{i,j+1,k, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i,j-1,k, \text{Zeit}}) + \frac{a\Delta\tau}{\Delta z^2} (t_{i,j,k+1, \text{Zeit}} - 2t_{i,j,k, \text{Zeit}} + t_{i,j,k-1, \text{Zeit}}) \quad (6)$$

Als Besonderheiten werden bei der Algorithmusgestaltung berücksichtigt (vgl. Bild 4):

- Es wird stets ein Bauteilabschnitt von Rohrmitte bis zur Symmetrieachse zwischen zwei Rohren der gleichen Rohrregisterrichtung j bzw. k betrachtet. Damit gelten für die Temperaturen, abgeleitet aus den vier Symmetriebedingungen, die Zusammenhänge zu jeder Zeit und für alle i, k

$$t_{i,j=0,k, \text{Zeit}} = t_{i,j=1,k, \text{Zeit}} ; t_{i,j=\text{imax},k, \text{Zeit}} = t_{i,j=\text{imax}-1,k, \text{Zeit}} \quad (7)$$

q sowie für alle i, j

$$t_{i,j,k=0, \text{Zeit}} = t_{i,j,k=1, \text{Zeit}} ; t_{i,j,k=\text{kmax}, \text{Zeit}} = t_{i,j,k=\text{kmax}-1, \text{Zeit}} \quad (8)$$

- Das Rohr wird als Quader, d. h. mit rechteckigem Querschnitt – vorzugsweise als Quadrat – approximiert.
- Die Achse des Rohres k liegt zwischen den j -Gitterlinien $j = 0$ und $j = 1$. Das Rohr j hat seine Symmetrielinie zwischen den k -Gitterlinien $k = 0$ und $k = 1$.
- Die Rohrquerschnitte werden aus minimal vier Gitterpunkten aufgespannt.
- Die äußere und die innere Bauteiloberfläche (beispielsweise die Deckenober- und Deckenunterseite) liegen jeweils auf einer Symmetrielinie zwischen zwei i -Gitterlinien, d. h., die begrenzenden Gitterlinien $i = 0$ und $i = \text{imax}$ liegen um eine halbe Schichtdicke außerhalb des Bauteils. Dadurch wird die Genauigkeit bei Randbedingungen 3. Art (Wärmeübergangsbedingung) erhöht. Es wird darauf noch separat eingegangen.

Randbedingung dritter Art (Wärmeübergangskoeffizient) an den Bauteiloberflächen

Der Wärmestrom, der durch die Bauteilbegrenzung an der Deckenoberseite mit der Oberflächentemperatur t_{Do} nach außen (oben) tritt, lautet unter der Bedingung gleicher Temperatur t_{Ro} auf der Raumseite in x -Richtung (Richtung der Laufvariablen i) für jeden Zeitpunkt

$$\dot{q}_a = -\lambda \frac{dt}{dx} = \alpha_a (t_{Do} - t_{Ro}). \quad (9)$$

Die Umsetzung in die Differenzenform veranschaulicht das Bild 5. Der Wärmeübergangskoeffizient α_a stellt im vorliegenden Anwendungsfall eigentlich einen Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ_o – bezogen auf den oberen Deckenaufbau – dar, da außer dem Wärmeübergangskoeffizient zum oberen Raum α_{Ro} auch noch ein Belag oder sogar ein aufwendiger Fußbodenaufbau mit mehreren Schichten vorhanden ist. Damit gilt im Weiteren

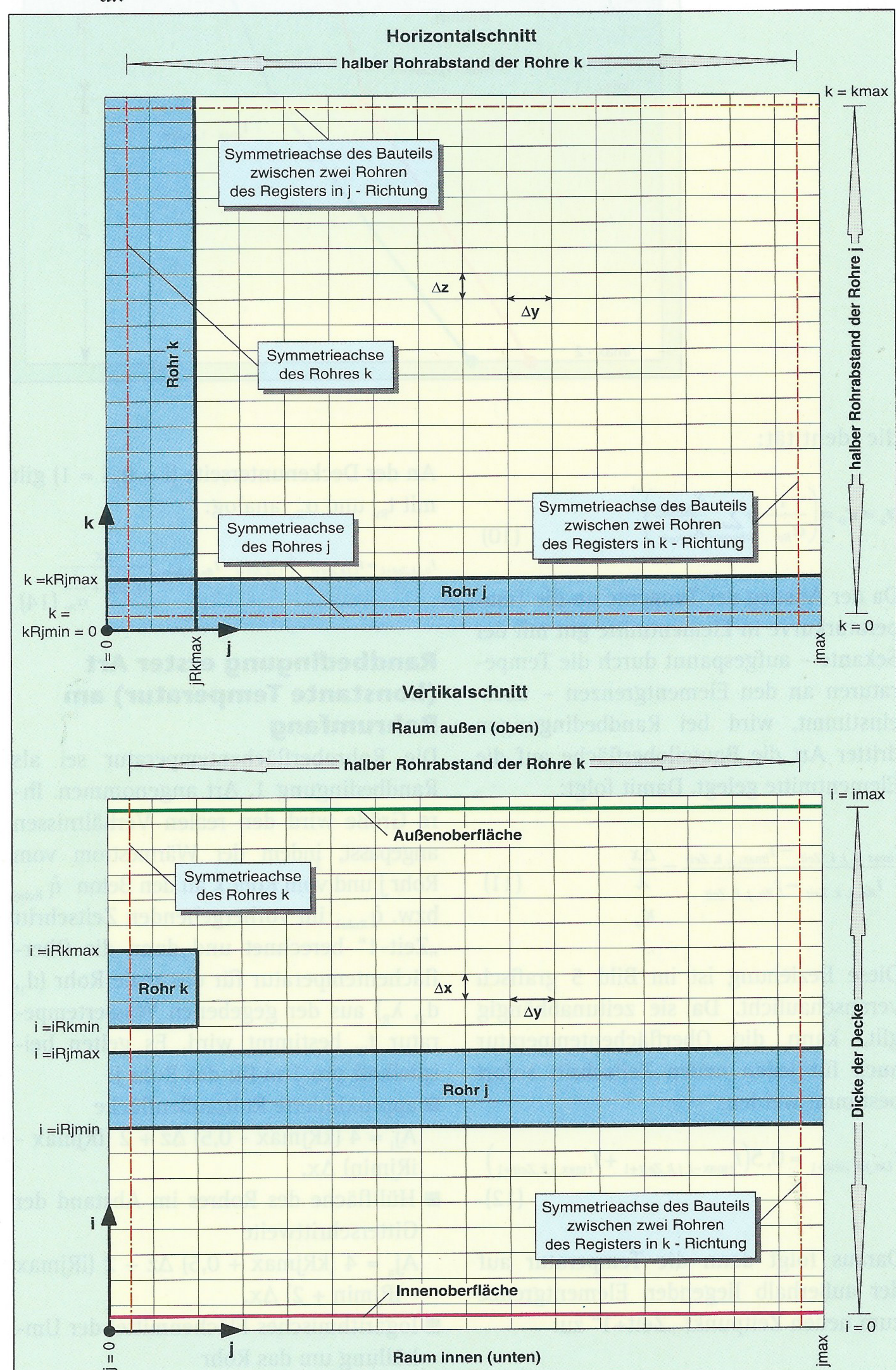
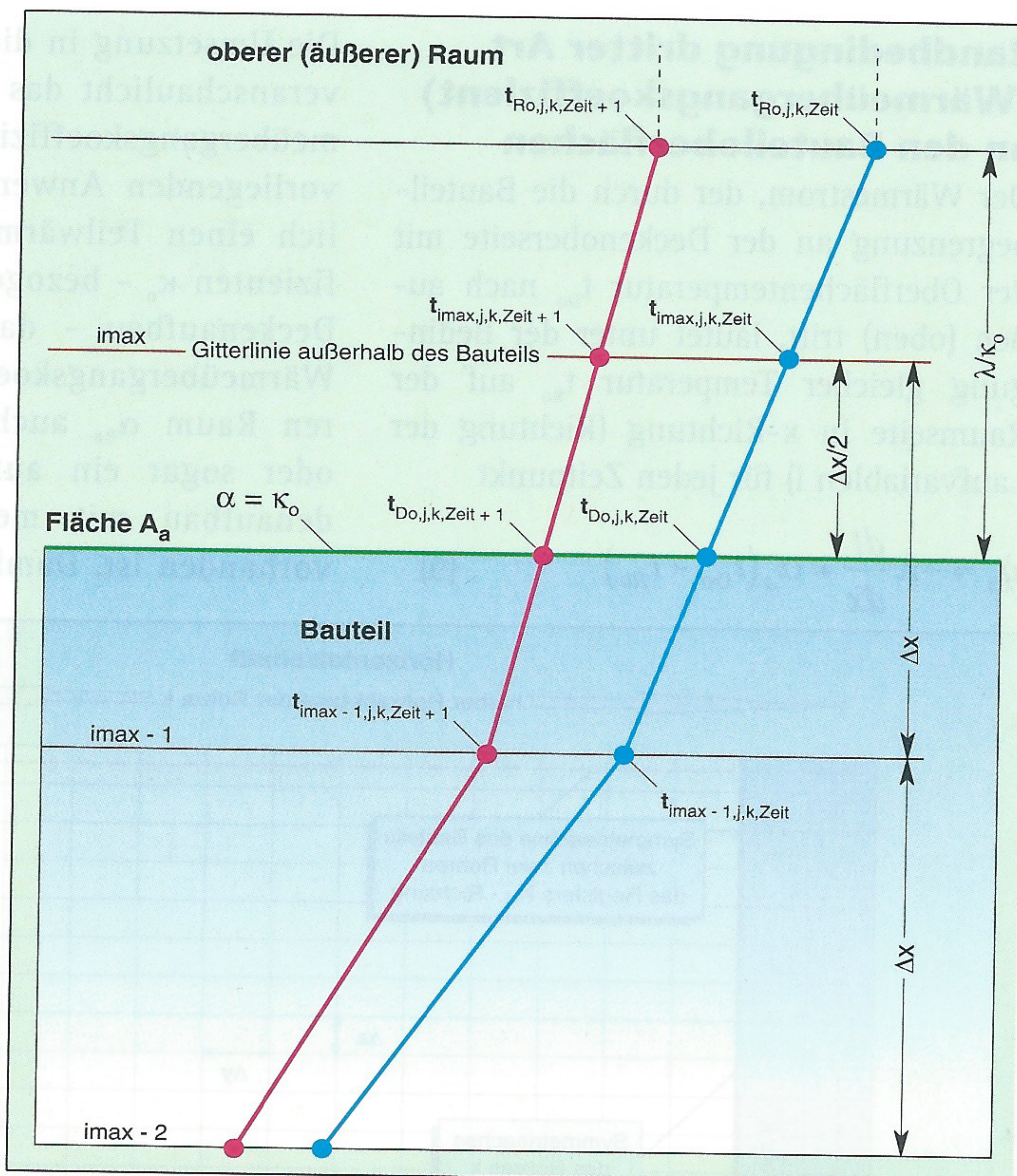


Bild 4: Gitter in zwei Schnittebenen (vgl. Bild 3) für die dynamische, dreidimensionale Berechnung des Temperaturfeldes im Bauteil nach einem numerischen Verfahren mit Darstellung der verwendeten Approximationen für die Rohre und Bauteilbegrenzungen



Bild 5: Temperaturverhältnisse zu den Zeitschritten „Zeit“ und „Zeit+1“ beim Übergang von der Deckenoberseite an den oberen Raum (Richtung i) für eine Randbedingung dritter Art an jeder Stelle j, k; anstelle von α_a steht bei einem Fußbodenaufbau κ_o nach Gl. (10)



die Identität:

$$\alpha_a \equiv \kappa_o = \left(\frac{1}{\alpha_{Ro}} + \sum_{\text{Schichten}} \frac{\delta_{\text{Schicht}}}{\lambda_{\text{Schicht}}} \right)^{-1} \quad (10)$$

Da der Anstieg der Tangente an die Temperaturkurve in Elementmitte gut mit der Sekante – aufgespannt durch die Temperaturen an den Elementgrenzen – übereinstimmt, wird bei Randbedingungen dritter Art die Bauteiloberfläche auf die Elementmitte gelegt. Damit folgt:

$$\frac{t_{\text{imax}-1,j,k,\text{Zeit}} - t_{\text{imax},j,k,\text{Zeit}}}{t_{\text{Ro},j,k,\text{Zeit}} - t_{\text{Do},j,k,\text{Zeit}}} = \frac{\Delta x}{\kappa_o} \quad (11)$$

Diese Beziehung ist im Bild 5 grafisch veranschaulicht. Da sie zeitunabhängig gilt, kann die Oberflächentemperatur auch für jeden neuen Zeitschritt sofort bestimmt werden:

$$t_{\text{Do},j,k,\text{Zeit}+1} = 0,5(t_{\text{imax}-1,j,k,\text{Zeit}+1} + t_{\text{imax},j,k,\text{Zeit}+1}) \quad (12)$$

Daraus folgt dann die Temperatur auf der außerhalb liegenden Elementgrenze zum neuen Zeitpunkt „Zeit+1“ zu:

$$t_{\text{imax},j,k,\text{Zeit}+1} = t_{\text{imax}-1,j,k,\text{Zeit}+1} - \left(t_{\text{imax}-1,j,k,\text{Zeit}+1} - t_{\text{Ro},j,k,\text{Zeit}+1} \right) \frac{\Delta x}{0,5\Delta x + \frac{\lambda}{\kappa_o}} \quad (13)$$

An der Deckenunterseite ($i = 0$; $i = 1$) gilt mit t_{Ru} und α_{Ru} analog:

$$t_{0,j,k,\text{Zeit}+1} = t_{1,j,k,\text{Zeit}+1} - \left(t_{1,j,k,\text{Zeit}+1} - t_{\text{Ru},j,k,\text{Zeit}+1} \right) \frac{\Delta x}{0,5\Delta x + \frac{\lambda}{\alpha_{\text{Ru}}}} \quad (14)$$

Randbedingung erster Art (konstante Temperatur) am Rohrumfang

Die Rohroberflächentemperatur sei als Randbedingung 1. Art angenommen. Ihre Größe wird den realen Verhältnissen angepasst, indem der Wärmestrom vom Rohr j und vom Rohr k an den Beton $\dot{q}_{\text{Rohrj}}$ bzw. $\dot{q}_{\text{Rohrk}}$ im vorhergehenden Zeitschritt „Zeit-1“ berechnet und dann die Oberflächentemperatur für das reale Rohr (d_1 , d_2 , λ_R) aus der gegebenen Wassertemperatur t_w bestimmt wird. Es gelten beispielhaft pro 1 m für das Rohr j:

- approximierte Rohraußenfläche $A_{j_i} = 4 (kR_{j\text{max}} - 0,5) \Delta z + 2 (iR_{j\text{max}} - iR_{j\text{min}}) \Delta x$,
- Hüllfläche des Rohres im Abstand der Gitterschrittweite $A_{j_a} = 4 (kR_{j\text{max}} + 0,5) \Delta z + 2 (iR_{j\text{max}} - iR_{j\text{min}} + 2) \Delta x$,
- logarithmisches Flächenmittel der Umhüllung um das Rohr

$$A_{R_{jm}} = \frac{A_{j_a} - A_{j_i}}{\ln \frac{A_{j_a}}{A_{j_i}}} \quad (15)$$

Es werden zunächst die Produkte aus der Wärmeleitfähigkeit des Betons λ und der Gradienten zwischen dem Rohrgitter und dem Gitter der Hüllfläche

$$\lambda (t_{iR_{j\text{min}},j,k,\text{Zeit}-1} - t_{iR_{j\text{min}},j,k,\text{Zeit}}) / \Delta x$$

für alle $k = 1$ bis $kR_{j\text{max}}$ und $j = 0$ bis j_{max}

$$\lambda (t_{iR_{j\text{max}},j,k,\text{Zeit}-1} - t_{iR_{j\text{max}},j,k,\text{Zeit}}) / \Delta x$$

für alle $k = 1$ bis $kR_{j\text{max}}$ und $j = 0$ bis j_{max}

$$\lambda (t_{i,kR_{j\text{max}},k,\text{Zeit}-1} - t_{i,kR_{j\text{max}},k,\text{Zeit}}) / \Delta z$$

für alle $i = iR_{j\text{min}}$ bis $iR_{j\text{max}}$ und $j = 0$ bis j_{max} gebildet und arithmetisch zu q_{Rj} gemittelt und mit der mittleren Gitterfläche $A_{R_{jm}}$ multipliziert:

$$\dot{q}_{\text{Rohrj}} = q_{Rj} A_{R_{jm}} \quad (16)$$

Für das reale Rohr j kann mit dem wasserseitigen Wärmeübergangskoeffizienten α_F , dem Rohrrinnendurchmesser d_1 , dem Rohraußendurchmesser d_2 und der Wärmeleitfähigkeit der Rohrwand λ_R der Teilwärmedurchgangskoeffizient

$$\kappa_R = \left(\frac{1}{\alpha_F} + \frac{d_1}{2\lambda_R} \ln \frac{d_2}{d_1} \right)^{-1} \quad (17)$$

gebildet werden, woraus mit der Wassertemperatur $t_{w,\text{Zeit}} \equiv t_w(\tau)$ die Rohrtemperatur zum Zeitpunkt „Zeit“ folgt:

$$t_{Rj,\text{Zeit}} = t_{w,\text{Zeit}} - \frac{\dot{q}_{\text{Rohrj}}}{\pi d_1 \kappa_R} \quad (18)$$

Bei Sprüngen der Wassertemperatur ist eine Dämpfung eingebaut, da entsprechend der Eigenart von Differenzenverfahren zunächst sehr große Wärmestromdichten entstehen könnten.

Raumseitige Wärmeübergangskoeffizienten

Die Wärmeübergangskoeffizienten (Konvektion und Strahlung) vom Bauteil zum unteren und oberen Raum α_{Ru} bzw. α_{Ro} können beliebig formuliert werden. Es gelten folgende praxisrelevante Angaben mit ϑ (K) Übertemperatur der Bauteiloberfläche gegenüber dem Raum α (W/(m²K)) Wärmeübergangskoeffizient (gesamt):

- Wärmestrom nach oben:
Für Bauteile mit einem Wärmestrom von unten nach oben (Fußbodenheizungen, Kühldecken) gilt nach DIN EN 1264 T2 die sogenannte „Basiskennlinie“ $\alpha = 8,92 |\vartheta|^{0,1}$ in W/(m²K). (19)



■ Wärmestrom nach unten:

Gemäß spezieller Berechnungen mit dem Raummodell [5] folgt als statistisches Mittel

$$\alpha = 6,7 \text{ W/(m}^2\text{K)}. \quad (20)$$

Wärmedämmungen bzw. schlecht wärmeleitende Schichten auf den Bauteilaußenseiten werden vereinfachend analog Gl. (10) in Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ zusammengefasst:

$$\kappa_o = \left(\frac{1}{\alpha_{Ro}} + \frac{\delta_{a1}}{\lambda_{a1}} + \frac{\delta_{a2}}{\lambda_{a2}} + \frac{\delta_{a3}}{\lambda_{a3}} \right)^{-1} \quad (21)$$

Wärmestromdichten in die Räume

Die Wärmeströme in die angrenzenden Räume (unten und oben) ergeben sich aus der Beziehung für den Wärmetransport durch Leitung im Festkörper mit x der Koordinate in i -Richtung

$$\dot{q} = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (22)$$

Zur Genauigkeitsverbesserung an Bauteiloberflächen liegen die Bauteilberandungen innerhalb des Gitters (vgl. Bilder 4 und 5), woraus beispielsweise folgt:

$$\dot{q}_u = \lambda \frac{t_{l,j,k, \text{Zeit}} - t_{o,j,k, \text{Zeit}}}{\Delta x} \quad (23)$$

Speicherwärme

Die im Bauteil gespeicherte Wärme wird für die Übertemperatur eines jeden Gitterpunktes berechnet, wobei auf die Raumtemperatur des unteren Raumes $t_{R\text{Bezug, Zeit}} = t_{Ru}(\tau)$ bezogen wird. Es gilt für die Speicherwärme in einem Element:

$$q_s = \rho \times c \Delta x \times \Delta y \times \Delta z \times (t_{l,j,k, \text{Zeit}} - t_{R\text{Bezug, Zeit}}) \quad (24)$$

Zeitliche Verläufe der Wassertemperatur und der Raumtemperatur

Die Wassertemperatur t_w und die Temperaturen des unteren sowie des oberen Raumes t_{Ru} bzw. t_{Ro} können als Zeitfunktionen vorgegeben und in Unterprogrammen formuliert werden.

Um die dynamische Leistungsfähigkeit der Systeme unter praxisnahen Bedingungen vergleichen zu können, wäre es sinnvoll, eine Art „Normvergleich“ rechnerisch zu

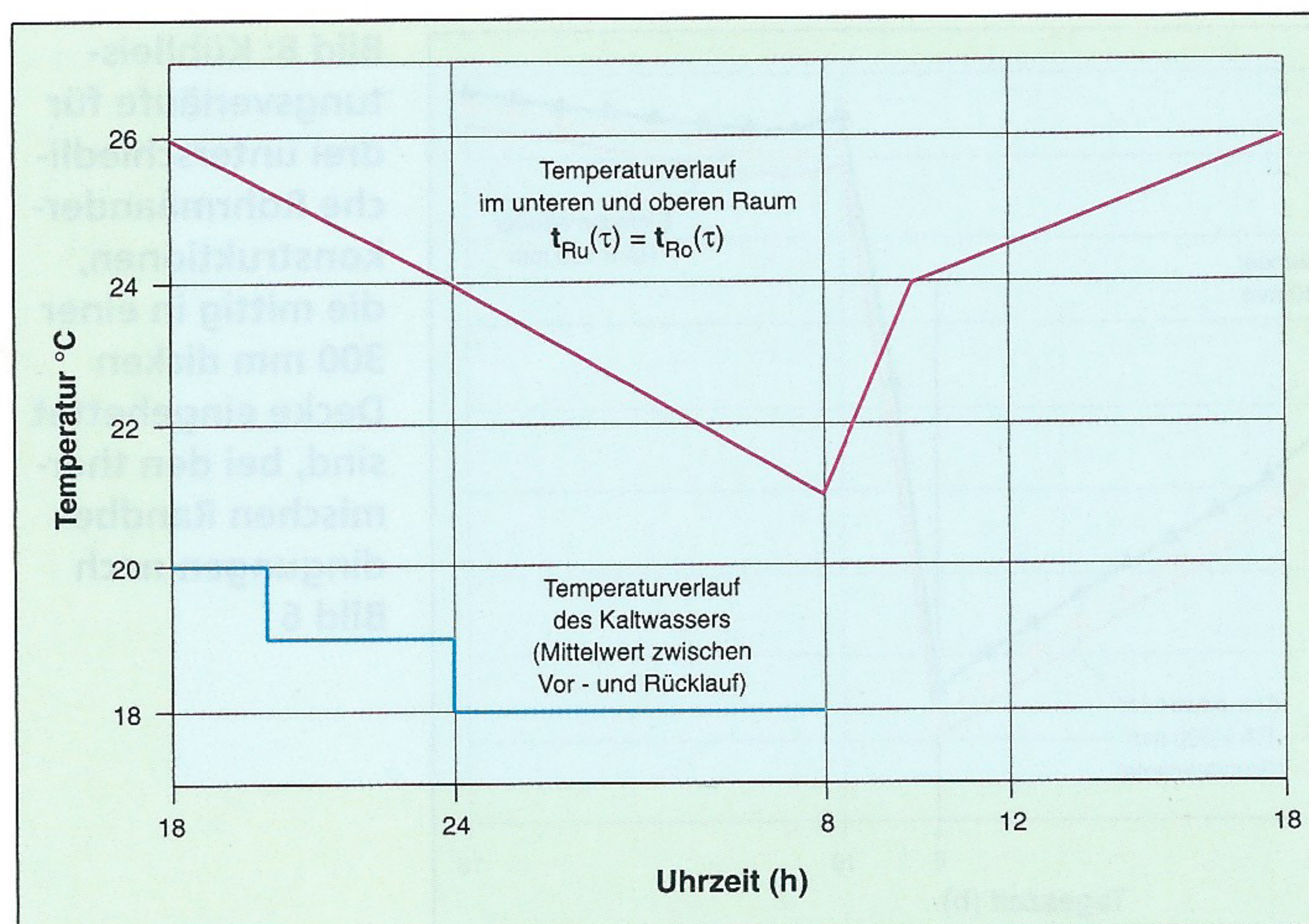


Bild 6: Vorschlag für einen „Normverlauf“ der Raumtemperaturen und der Wassertemperatur als Grundlage für die Simulationsrechnungen

simulieren. Bild 6 zeigt einen entsprechenden Vorschlag. Von 8.00 ... 18.00 Uhr ist der Wasserkreislauf nicht in Betrieb.

Bei Durchfluss der Rohre werden die Gitterpunkte im jeweiligen Rohrquerschnitt mit den Temperaturen der Rohroberfläche gefüllt. In den Zeiträumen, in denen kein Durchfluss erfolgt (passiv), wird das Bauteil auch im Rohrbereich näherungsweise als homogen (Beton) betrachtet.

Testrechnungen

Abschnittsweise Überprüfungen, Plausibilitätskontrollen und ein umfassender Programmtest wurden durchgeführt. Im letzten Fall ist nur ein Rohr k in mittlerer Lage implementiert und eine Rechnung ausgehend von der Deckentemperatur 24°C unter konstanten Randbedingungen $t_{Ru}(\tau) = t_{Ro}(\tau) = 24^\circ\text{C}$ sowie $t_w(\tau) = 18^\circ\text{C}$ über den Zeitraum von 72 h betrachtet worden. Am Ende dieses Zeitraumes sind stationäre Bedingungen erreicht. Deshalb erfolgt ein Vergleich mit dem Berechnungsmodell nach Faxén [1], das in [3]

programmtechnisch hinterlegt ist.

Einflussreich bei diesen Berechnungen kann die Wahl des Gitters sein. Deshalb wurden Berechnungen mit einem groben Gitter $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 15 \text{ mm}$ und mit einem feinen Gitter $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ mm}$, $\Delta z = 75 \text{ mm}$ (bei fehlendem Rohr j ist Δz bedeutungslos) durchgeführt.

Der Verlauf der Speicherladung ist im Bild 7 dargestellt. Die sehr gute asymptotische Annäherung der dynamischen Berechnungsergebnisse an den stationären Endwert zeigt, dass der vorgeschlagene Algorithmus sehr leistungsfähig ist und auch das grobe Gitter gute Ergebnisse liefert.

Ergebnisgegenüberstellung der Nutzrechnungen I

Alle Untersuchungen sind über einen Zeitraum von drei Tagen (72 h) geführt worden. Bei der Auswertung wird nur der jeweils dritte Betriebstag, gerechnet von 18.00 Uhr bis wiederum 18.00 Uhr, betrachtet. Es liegt somit ein thermody-

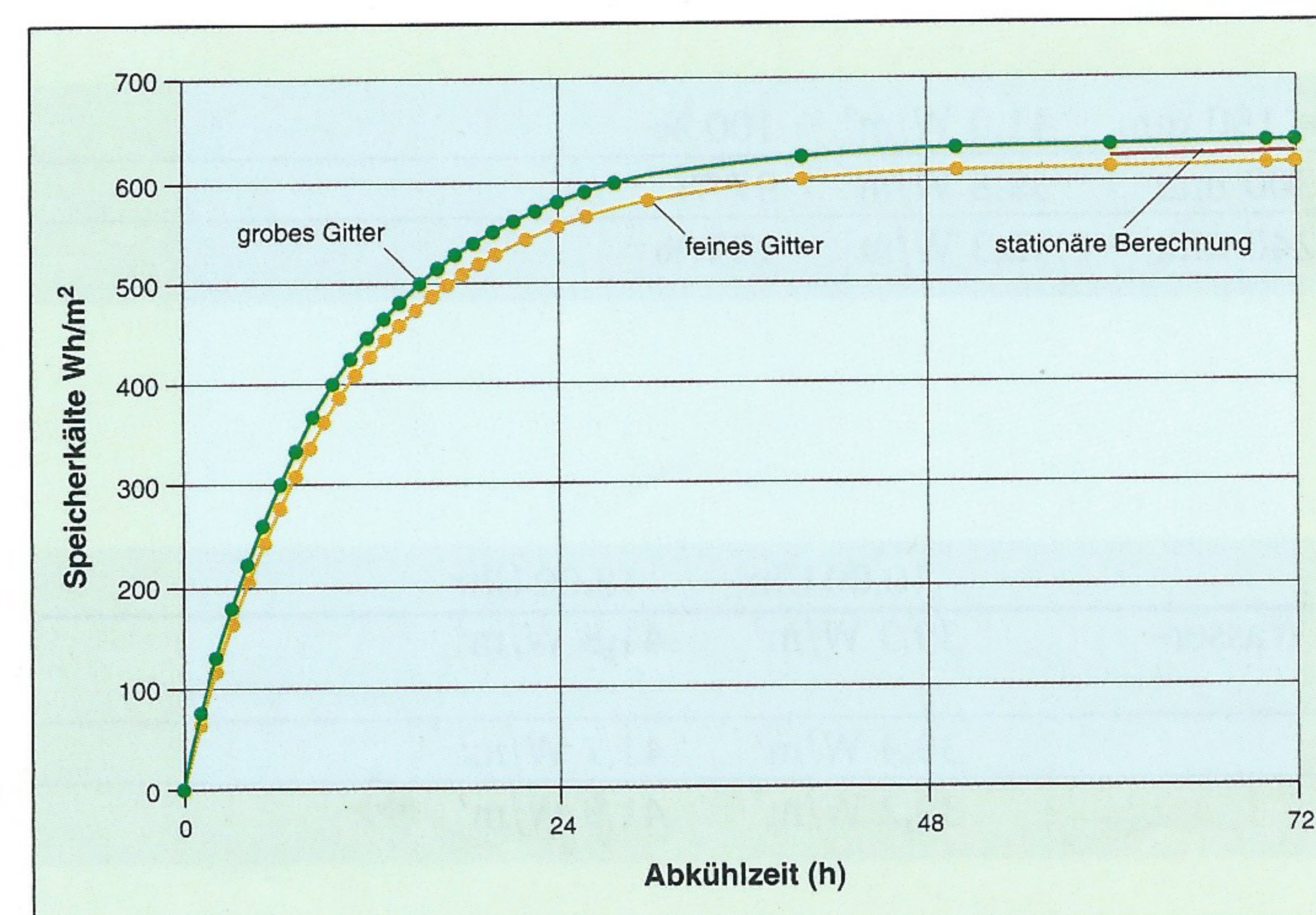


Bild 7: Verlauf der Speicherladung mit „Kälte“ in Abhängigkeit der Abkühlzeit unter Variation der verwendeten Gittergeometrie. Betrachtet wurde jeweils eine Betondecke mit 300 mm Dicke und einfachem, mittig angeordnetem Rohrgitter 20 x 2,5 mm des Rohrabstandes 300 mm

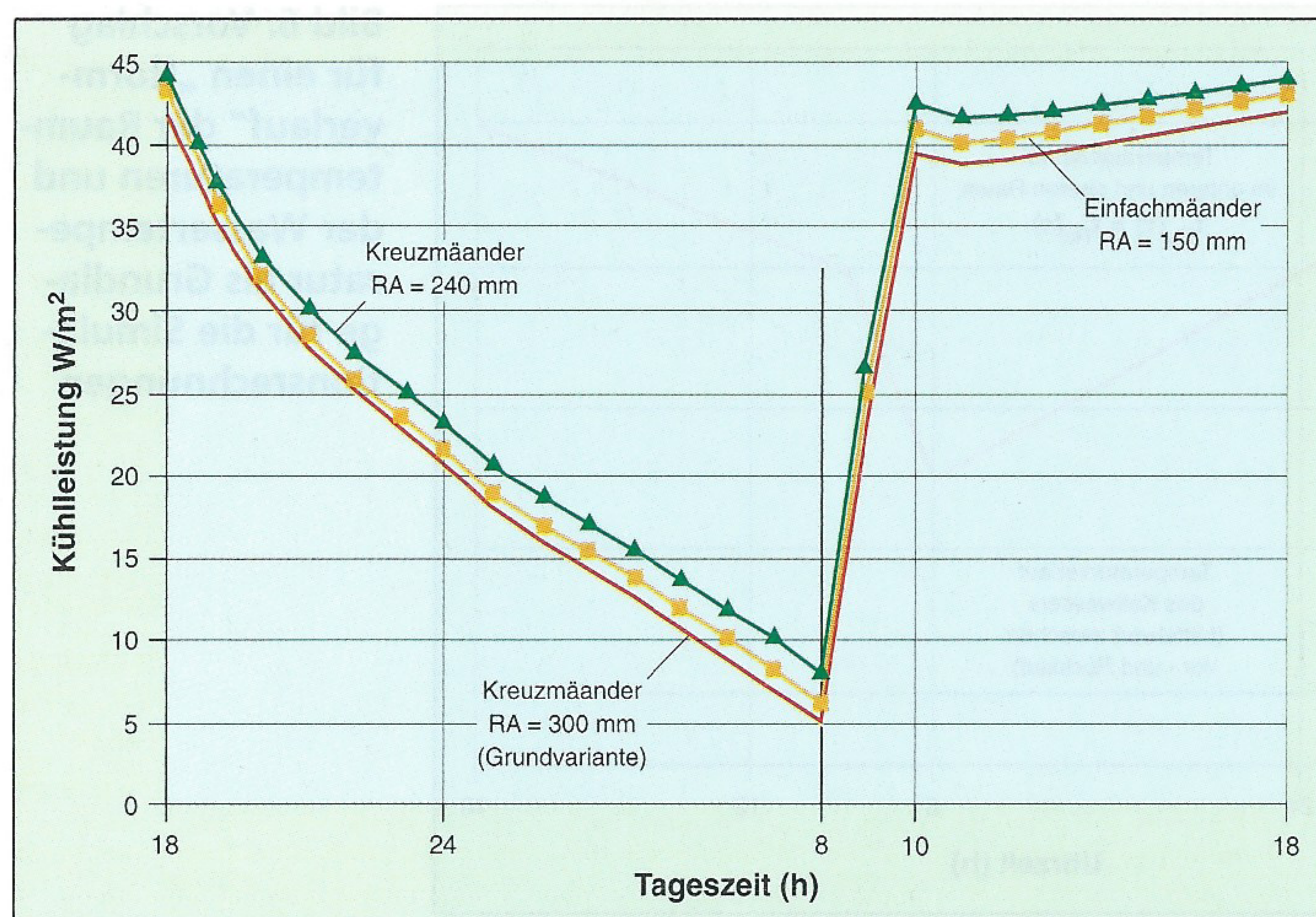


Bild 8: Kühlleistungsverläufe für drei unterschiedliche Rohrmäanderkonstruktionen, die mittig in einer 300 mm dicken Decke eingebettet sind, bei den thermischen Randbedingungen nach Bild 6

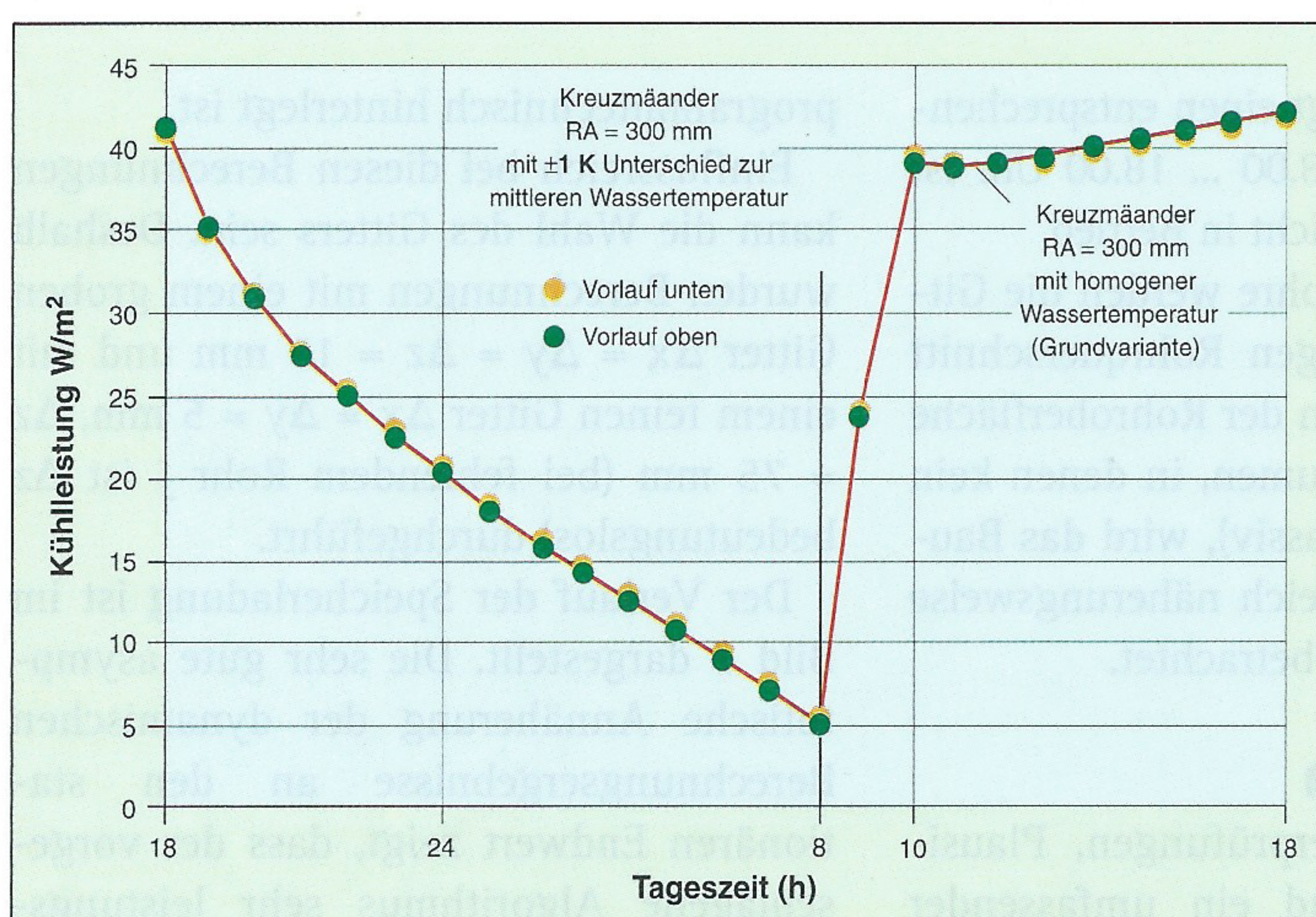


Bild 9: Kühlleistungsverläufe für drei Variationen der Wassertemperaturen bei stets gleichem Mittelwert für eine Rohrmäanderkonstruktion (Kreuzmäander RA = 300 mm), die mittig in einer 300 mm dicken Decke eingebettet ist, bei den thermischen Randbedingungen nach Bild 6

namisch eingeschwungener Zustandsverlauf vor. Die thermischen Randbedingungen entsprechen den Temperaturverläufen im Bild 6.

Zuerst werden die Unterschiede der Rohrregister betrachtet, wobei alle Mäander mittig in der Decke (300 mm, Fußbodenbelag $R_{\lambda} = 0,143 \text{ m}^2\text{K/W}$) liegen. Es handelt sich hierbei um den

- Kreuzmäander mit RA = 300 mm (Grundvariante),

- Einfachmäander mit RA = 150 mm,

- Kreuzmäander mit RA = 240 mm.

Es gelten weiterhin die im Bild 2 vermerkten Daten.

Die Kühlleistungsverläufe zeigt das Bild 8. Feststellungen:

- Die Kühlleistungen steigen im Tagesgang an bzw. halten sich näherungsweise konstant. Dies ist sehr vorteilhaft für eine erfolgreiche Kühlung beispielsweise von Büroräumen.

Einfachmäander RA = 150 mm	41,0 W/m ²	100 %
Kreuzmäander RA = 300 mm	39,8 W/m ²	97 %
Kreuzmäander RA = 240 mm	42,3 W/m ²	103 %

Tabelle 1

Kühlleistung bei	10.00 Uhr	18.00 Uhr
Homogener mittlerer Wassertemperatur	39,3 W/m ²	41,8 W/m ²
Vorlauf unten	39,4 W/m ²	41,7 W/m ²
Vorlauf oben	39,2 W/m ²	41,9 W/m ²

Tabelle 2

- Die Kühlleistungen sind am Nachmittag mit ca. 40 W/m² sehr hoch.

- Die konstruktionsabhängige Kühlleistung stellt sich um 14.00 Uhr folgendermaßen dar: (siehe Tabelle 1)

In erster Näherung sind unter praktischen Gesichtspunkten die Kühlleistungen der drei Varianten gleichwertig ($\pm 3 \%$).

Die verringerte Rohrteilung bringt nur einen verhältnismäßig kleinen Leistungsgewinn.

Ergebnisgegenüberstellung der Nutzrechnungen II

Im Weiteren werden die detaillierten Untersuchungen zur Beaufschlagung der Rohrregister betrachtet (Vorlauf unten bzw. obenliegend). Die Unterschiede wurden programmintern realisiert, indem man die Wassertemperaturen für die einzelnen Rohre j bzw. k um eine Temperaturdifferenz von $\pm 1 \text{ K}$ zur mittleren Wassertemperatur verstellte. Die beiden Rohrregisterlagen haben dann wiederum eine einheitliche Wassertemperatur. Trotz der Detaillierung liegen damit auch wieder partielle Vereinheitlichungen vor. Die Ergebnisse der Veränderungen sind im Vergleich zu einer einheitlichen mittleren Wassertemperatur im Bild 9 aufgezeichnet. Feststellungen:

- Bei den kleinen betrachteten Temperaturunterschieden (Spreizungen) unterscheiden sich die Kühlleistungen praktisch nicht.

- Die Kühlleistungen werden um 10⁰⁰ Uhr und um 18⁰⁰ Uhr gegenübergestellt: (siehe Tabelle 2)

Aus theoretischer Sicht sind die kleinen Leistungsunterschiede dennoch logisch erklärbar.

Bei unterem Vorlaufeintritt ist der untere Teil der Decke nachts stärker abgekühlt worden als der obere Deckenabschnitt, weshalb die Leistungen vormittags größer sind.

Bei oberem Vorlaufeintritt ist der obere Deckenabschnitt stärker abgekühlt worden, die Phasenverschiebung der Wärmeaufnahme aus dem unteren Raum ist aber größer, so dass nachmittags die Kühlleistungen höher sind.

Ergebnisgegenüberstellung der Nutzrechnungen III

Zusätzlich sei noch eine konstruktive Sonderform der Kreuzmäander betrach-



Bild 10: Kühlleistungsverläufe für zwei Konstruktionsvarianten von Kreuzmäandern mit $RA = 300 \text{ mm}$, die in einer 300 mm dicken Decke eingebettet sind

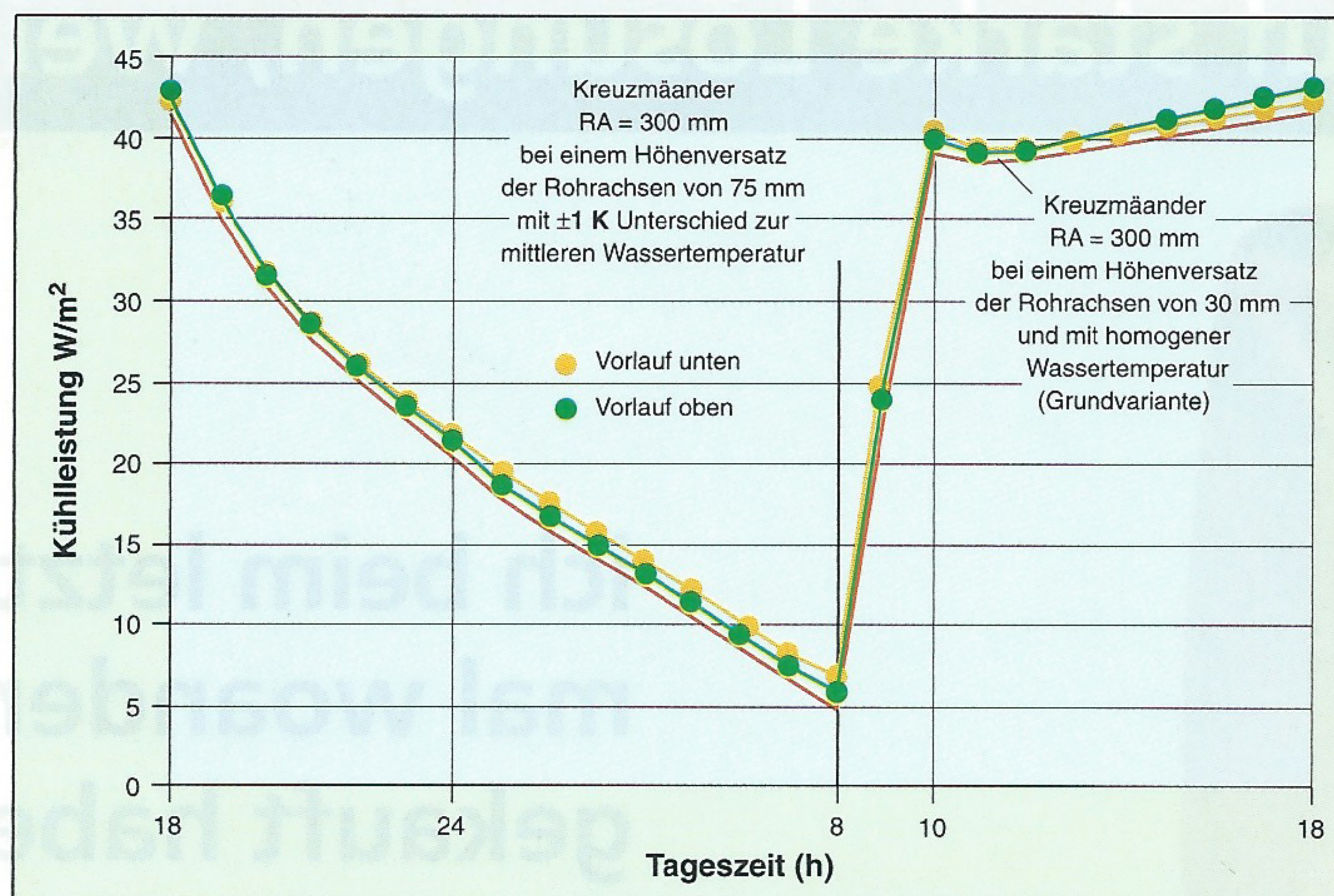
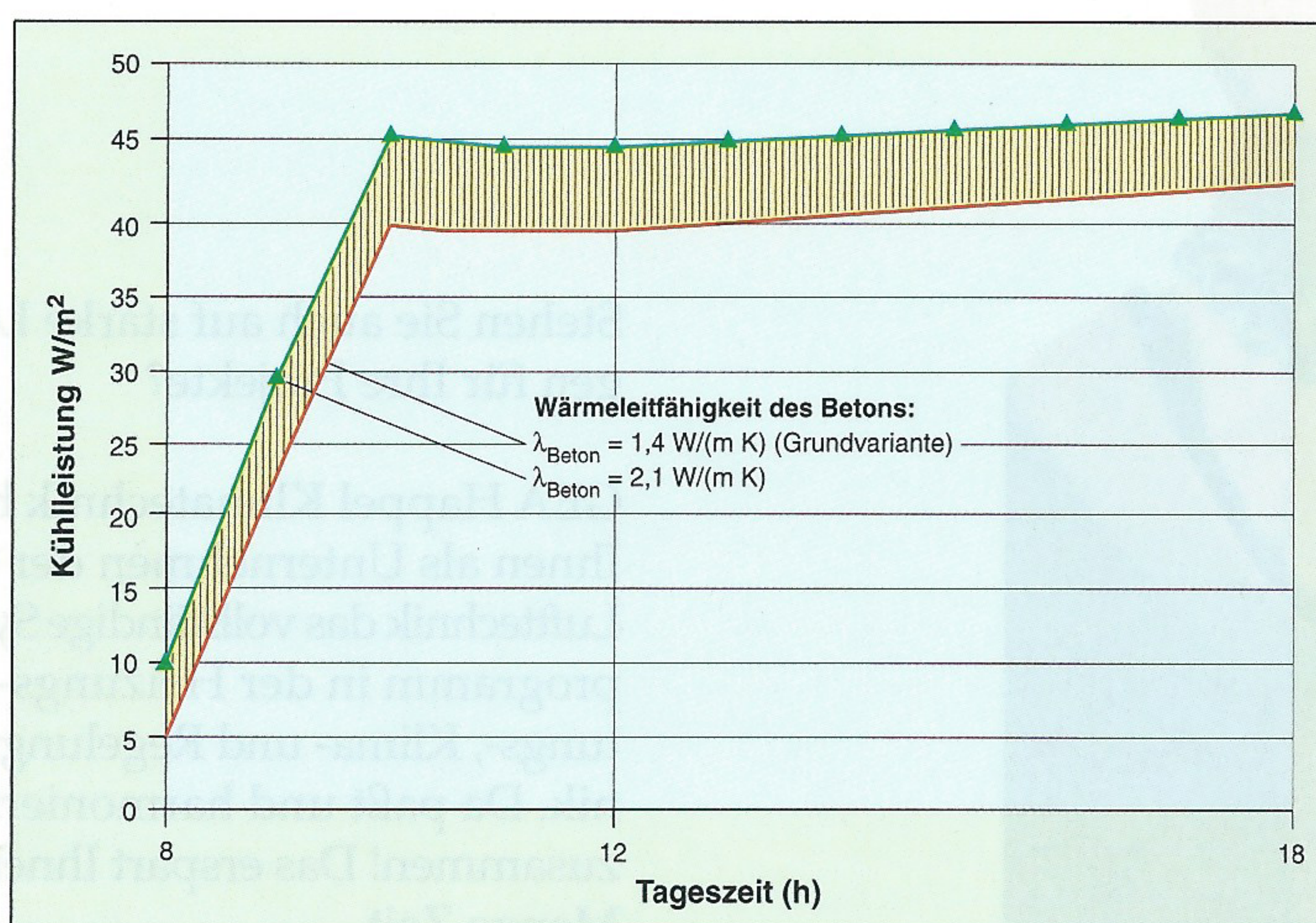


Bild 11: Kühlleistungsverläufe im täglichen Nutzzeitraum von 8.00 bis 18.00 Uhr für eine Rohrmäanderkonstruktion (Kreuzmäander $RA = 300 \text{ mm}$). Die Wärmeleitfähigkeit des Betons wurde variiert. Für $\lambda_{\text{Beton}} = 2,1 \text{ W/(m K)}$ ergeben sich um ca. 13 % höhere Leistungen als bei $\lambda_{\text{Beton}} = 1,4 \text{ W/(m K)}$



tet. Zwischen den beiden Rohrlagen wird ein größerer vertikaler Abstand untersucht, als dieser aus technologischen Gründen erforderlich ist. Es wird damit die Zielstellung verfolgt, dass eine gleichmäßigere Temperatur über den Deckenquerschnitt erreichbar ist. Wegen des vergrößerten Vertikalabstandes (Rohrachse zu Rohrachse 75 mm) erfolgt

gleichzeitig eine unterschiedliche Temperaturannahme für die beiden Ebenen (Vorlauf unten bzw. oben). Die Ergebnisse werden der Ursprungsversion gegenübergestellt (Bild 10).

Feststellungen:

■ Bei einem vertikalen Höhenversatz der Rohrregisterlagen ist eine Leistungser-

höhung erkennbar. Sie ist allerdings relativ klein, dennoch sind weitere Untersuchungen durchaus sinnvoll, beispielsweise bei tieferliegenden Registern und evtl. größerem Höhenversatz der Rohrlagen.

■ Die Kühlleistungen werden um 10.00 Uhr und um 18.00 Uhr gegenübergestellt: (Tabelle 3)

Die Kühlleistungen unterscheiden sich nur um maximal 2 % ... 3 %.

Bei unterem Vorlaufeintritt ist die Leistung vormittags höher, bei oberem Vorlaufeintritt ist die Leistung nachmittags gesteigert.

Ergebnisgegenüberstellung der Nutzrechnungen IV

Abschließend werde der Einfluss der Wärmeleitfähigkeit des Betons auf die Kühlleistung überprüft. Bei den bisherigen Berechnungen ist $\lambda_{\text{Beton}} = 1,4 \text{ W/(m K)}$ angesetzt worden. Bei Schwerbeton mit entsprechenden Zuschlagstoffen kann beispielsweise $\lambda_{\text{Beton}} = 2,1 \text{ W/(m K)}$ erreicht werden. Die Gegenüberstellung der Variation für die Geometrie der Grundvariante (symmetrisch eingebetteter Kreuzmäander mit $RA = 300 \text{ mm}$) zeigt das Bild 11.

Feststellungen:

■ Mit steigender Wärmeleitfähigkeit des Betons nimmt die Kühlleistung der Massivdecke mit nächtlicher Einspeicherung zu.

■ Die Kühlleistungen werden um 10.00 Uhr und um 18.00 Uhr gegenübergestellt:

(siehe Tabelle 4)

Obwohl die Wärmeleitfähigkeit des Betons um 50 % stieg, wuchs die Kühlleistung aber nur um ca. 13 %. Die Annahme der Wärmeleitfähigkeit darf also in gewissen Toleranzen schwanken, ohne dass ein merklicher Einfluss auf das Ergebnis „Kühlleistung“ entsteht.

Einen tieferen Einblick in die thermischen Verhältnisse gestattet das Bild 12. Es zeigt die Temperaturen in drei ausgewählten Ebenen der Decke bei der Grundvariante und bei der höheren Wärmeleitfähigkeit des Betons. Im Inneren des Rohrquadrates betragen die maximalen Unterschiede der Betontemperaturen $1,8 \text{ K}$ bei $\lambda_{\text{Beton}} = 1,4 \text{ W/(m K)}$ und $1,3 \text{ K}$ bei $\lambda_{\text{Beton}} = 2,1 \text{ W/(m K)}$. An den Ober- und Unterseiten des Betons sind die Temperaturunterschiede in beiden Fällen nur noch maximal $0,2 \text{ K}$. Logischerweise

Kühlleistung bei	10.00 Uhr	18.00 Uhr
normalem Kreuzmäander mit homogener mittlerer Wassertemperatur	39,3 W/m ²	41,8 W/m ²
höhenversetztem Kreuzmäander Vorlauf unten	40,4 W/m ²	42,3 W/m ²
höhenversetztem Kreuzmäander Vorlauf oben	39,7 W/m ²	42,6 W/m ²

Tabelle 3

Kühlleistung für normale Kreuzmäander bei	10.00 Uhr	18.00 Uhr
Wärmeleitfähigkeit Beton $1,4 \text{ W/(m K)}$	39,3 W/m ²	41,8 W/m ²
Wärmeleitfähigkeit Beton $2,1 \text{ W/(m K)}$	45,0 W/m ²	46,2 W/m ²

Tabelle 4



liegt das gesamte Temperaturniveau in den rohrfernen Bereichen infolge der besseren Wärmeleitfähigkeit des Betons tiefer, was die höhere Kühlleistung bewirkt. Dass die Betonoberseite stets eine niedrigere Temperatur als die Unterseite aufweist, wird durch den schlechteren Wärmeübergang zum Raum (Wärmestrom von oben nach unten) und durch den Bodenbelag verursacht.

Fazit

Der neu erstellte Algorithmus mit einem zugehörigen Rechenprogramm zeichnet sich durch nachfolgende Eigenschaften aus:

- numerische Lösung des instationären, dreidimensionalen Wärmeleitproblems speziell für homogene Betonplatten mit integrierten Rohrregistern (thermische Bauteilaktivierung),
- flexible Gestaltung der Geometrie,

- austauschbare Programmteile zur Approximation der Wärmeübergangskoeffizienten an den Bauteiloberflächen und des wasserseitigen Wärmeübergangs,
- frei programmierbare thermische Randbedingungen (Zeitverläufe der Raumtemperaturen und der Wassertemperatur),
- Nachbildung von Rohrregistern in Form von Kreuzmäandern und in üblicher Mäanderform.

Da das Rechenprogramm wegen seines Neuheitswertes nicht an einer bekannten Lösung verifizierbar ist, wurde eine ausführliche Vergleichsrechnung mit dem stationären, zweidimensionalen Algorithmus für in Beton eingebettete Rohrregister (Lösung von Faxén nach [1] und nach [3]) vorgenommen. Die Untersuchungen für sehr lange Zeiträume mit konstanten Randbedingungen über die Zeit ergaben eine sehr gute Übereinstimmung mit den stationären Werten. In diesem Zusammenhang konnten auch Aussagen zur Gitterabhängigkeit getroffen werden.

Abschließend sind mit dem Rechenprogramm zahlreiche Nutzrechnungen für unterschiedliche Geometrievariationen und thermische Besonderheiten durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind für umfassende, teilweise allgemeingültige Bewertungen herangezogen worden, aus denen sich auch Trendaussagen treffen lassen.

Generell ist bemerkenswert, dass die untersuchten Konstruktionen unter den betrachteten thermischen Randbedingungen nur verhältnismäßig geringe Kühlleistungsunterschiede im Tagesverlauf zeigen. Dies liegt an der relativ gleichmäßigen Temperaturverteilung am Ende der Beladung.

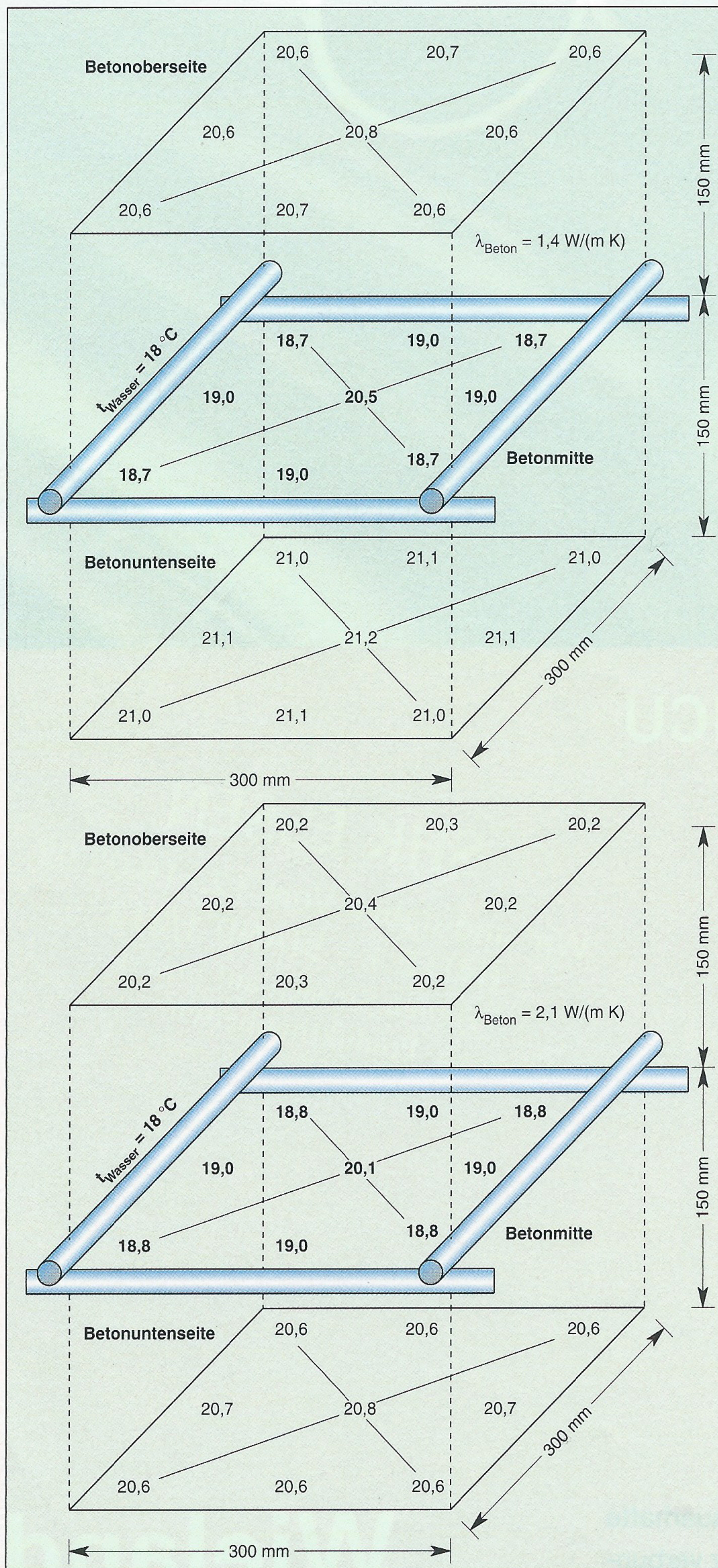


Bild 12: Temperaturverteilung in einer Betondecke mit kreuzweiser Rohrbelegung (Grundvariante) nach Bild 2 und den Berechnungsergebnissen für eine gleichverteilte mittlere Wassertemperatur nach Bild 6, aufgenommen um 6.00 Uhr (zwei Stunden vor Ende der täglichen Abkühlzeit) bei Variation der Wärmeleitfähigkeit des Betons;
Bild oben: $\lambda_{\text{Beton}} = 1,4 \text{ W/(m K)}$;
Bild unten: $\lambda_{\text{Beton}} = 2,1 \text{ W/(m K)}$

Literatur

- [1] Faxén: Beräkning av värmeavgivning från rör, ingjutna i betonplattor. Teknisk Tidskrift Mekanik 1937, Heft 3
- [2] Glück, B.: Strahlungsheizung-Theorie und Praxis. Berlin: Verlag für Bauwesen und Karlsruhe: C. F. Müller-Verlag 1981
- [3] Glück, B.: Thermische Bauteilaktivierung. Heidelberg: C. F. Müller Verlag 1999
- [4] Glück, B.: Ortsabhängige Kühlleistung von Massivbauteilen mit integrierten Rohrregistern. Heizung - Lüftung - Haustechnik 2001, Heft 5
- [5] Glück, B.: Wärmetechnisches Raummodell. Heidelberg: C. F. Müller Verlag