

Die Kettenlinie in der Mechanik und ihr Pendant bei der Wärmeleitung in Rippen

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Glück, 2022

Eine nicht dehnbare Kette und ein nicht dehnbares völlig biegsames Seil (Fachausdrücke: dehnstarr und biegeschlaff) ohne zusätzlich angehängte Last nehmen eine Kurve ein, die als Kettenlinie bezeichnet wird. Diese Form stand über Jahrhunderte im Interesse der Naturwissenschaftler und Mathematiker. GALILEI (1564 – 1642) nahm an, dass es sich um eine Parabel handelt. Aber bald stellte man Abweichungen davon fest. HUYGENS, LEIBNIZ und J. I. BERNOULLI formulierten dann um 1690 die Kettenlinie als mathematisch eigenständige Funktion. Während HUYGENS mit grafischen Methoden arbeitete, da er die aufkommende Infinitesimalrechnung noch nicht voll beherrschte und sie etwas skeptisch betrachtete, sah LEIBNIZ in seiner Ableitung eine Bestätigung seiner neuen Methode.

In früher Zeit beschäftigte man sich vor allem mit der Geometrie und entwickelte diese zu einem wichtigen Teilgebiet der Mathematik. Demzufolge war die Anschaulichkeit auch sehr stark auf die Darstellung der Aufgaben und deren Lösung ausgerichtet. Diese Denkschule prägt teilweise noch die heutige Zeit und wird von mir auch immer wieder gerne genutzt.

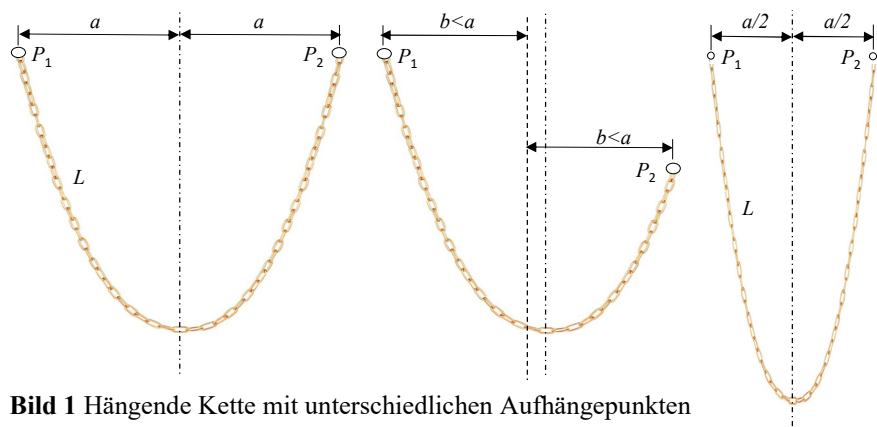
Demgegenüber erschrak ich, als ich die "Analytische Mechanik" von LAGRANGE in die Hände bekam, denn dort wurden die Aufgabenstellungen wortreich beschrieben anstelle eine einfache Skizze anzufertigen. Ich fand dies als sehr negativ, denn die Sprache des Ingenieurs ist bekanntlich die Zeichnung.

Dieser Bruch vollzog sich offenbar mit der Einführung der Infinitesimalrechnung, denn als LEIBNIZ den älteren HUYGENS in die Feinheiten der Differenzial- und Integralrechnung einwies und dabei auch die Ermittlung der Kettenlinie beispielhaft hervorhob, schrieb er: "Am besten gefällt mir an der Differenzialrechnung, dass sie uns davon befreit, mit der *Vorstellung* arbeiten zu müssen."

Aber dies ist meines Erachtens gerade eine Gefahr, dass sich die Mathematik "verselbstständigt" und ihre Ergebnisse dann nicht mehr anschaulich interpretierbar sind.

Bezüglich der Kettenlinie sind vorab einige anschauliche Erkenntnisse genannt:

- Die Form der hängenden Kette ist vom Abstand $2a$ der Befestigungspunkte P_1 und P_2 und von der Länge L der Kette abhängig.

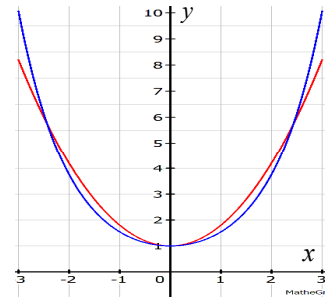


- Verändert man beispielsweise einen Aufhängenpunkt so, dass er aber weiter auf der früheren Kettenlinie liegt, ändert sich die übrige Kettenform nicht. Dies ist ein Indiz dafür, dass entlang der Kette stets nur tangentielle Kräfte wirken. Deren Richtung stimmt also mit dem Anstieg der Kettenlinie überein. Die Symmetrieachse der Kurve ist dann logischerweise gegenüber der Mitte zwischen den Aufhängenpunkten verschoben.
- Könnte man bei den beiden linken Kettenformen im Bild 1 noch eine Parabelform vermuten,

ergibt sich beim engen Zusammenrücken der Aufhängepunkte (rechte Form) ein so steiler seitlicher Kurvenverlauf, der die Parabelform ausschließt. Der Verlauf lässt eine Exponentialform e^x bzw. e^{-x} für den rechts- und linksseitigen Ast vermuten.

- Bild 2 zeigt den Unterschied zwischen den Funktionen nach dem Hyperbelcosinus und nach einer quadratischen Parabel. Bei langer Kette und geringem Abstand der Aufhängepunkte erscheint die erstgenannte Funktion zutreffender zu sein.

Bild 2 Gegenüberstellung Kettenlinie $y = \cosh x = 0,5 (e^x + e^{-x})$ (blaue Kurve) und der Näherungsparabel $y = 0,8 x^2 + 1$ (rote Kurve)



Verwirrung bezüglich der Termini

Oft wird die Funktion $y = \cosh x$ als Kettenlinie bezeichnet. Sie ist auch *eine*, aber nur ein Sonderfall ($a = 1$), denn für die *allgemeine* Kettenlinie gilt die Beziehung $y = a \cosh(x/a)$.

Eine ganz ähnliche Beziehung beschreibt die Übertemperaturfunktion ϑ in einer wärmeleitenden Rippe mit an den Stirnseiten gleichen Übertemperaturen ϑ_0 . Sie lautet beispielsweise

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh(mx)}{\cosh(ml/2)} = z \cosh(mx).$$

Umgangssprachlich wird sie oftmals mit einer Kettenlinie verglichen. Ich tat dies früher auch, was aber nur im Sonderfall $z = 1/m$ der mathematischen Definition entspricht. Dennoch ist eine Analogie unverkennbar, weshalb im Folgenden die exakten Ableitungen und die Unterschiede vorgestellt werden.

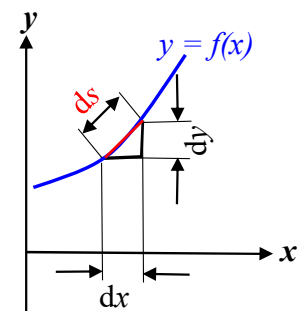
1. Herleitung der Kettenlinie

Generell handelt es sich um ein Variationsproblem, denn die Kettenlinie ist als Funktion zu finden und die Kettenlänge ist einzupassen.

Zuerst ist von einem infinitesimalen Abschnitt ds der Kette auszugehen. Für ihn gilt in Verbindung mit Bild 3 die Beziehung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{= y'^2}} dx. \quad (1)$$

Bild 3 Kurvenelement ds als Teil einer Funktionskurve $y = f(x)$

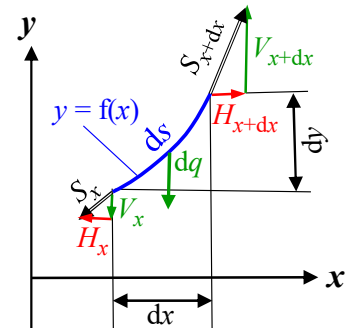


Die Kurvenlänge L im Bereich von x_1 bis x_2 ergibt sich dann zu

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2)$$

Bezüglich der Herleitung der Kettenlinie gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. die Minimierung der potentiellen Energie, wobei die EULER-LAGRANGE-Gleichung benutzt wird. Anschaulicher ist es von den Kräften an einem infinitesimal kleinen Seilstück gemäß Bild 4 auszugehen.

Bild 4 Freigeschnittenes Seilstück ds mit den angreifenden Kräften



An dem Seilstück mit der Masse $dm = \rho A ds$ wirkt vertikal die Schwerkraft $dq = g dm$. Damit sich das Seilstück ds im Gleichgewicht befindet muss für die Bilanz der vertikalen Kräfte gelten:

$$V_{x+dx} - dq - V_x = 0 \rightarrow V_{x+dx} - g \rho A ds - V_x = 0$$

$$V_{x+dx} - g \rho A \sqrt{1 + y'^2} dx - V_x = 0. \quad (3)$$

Für die Bilanz der Horizontalkräfte ergibt sich

$$H_{x+dx} - H_x = 0 \rightarrow H_{x+dx} = H_x = H, \quad (4)$$

d. h., die Horizontalkraft ändert sich im Seil nicht. Ansonsten müsste sich der Abschnitt ds horizontal verschieben. Gl. (3) ergibt nach Umformung

$$\frac{V_{x+dx} - V_x}{dx} = g \rho A \sqrt{1 + y'^2},$$

sodass nach Grenzwertbildung $dx \rightarrow 0$ die 1. Ableitung der Vertikalkraft folgt:

$$V' = g \rho A \sqrt{1 + y'^2}. \quad (5)$$

Da das Seil wegen seiner Biegeschlaffheit nur Zugspannungen aufnehmen kann, verläuft die Seilkraft S immer tangential zur Seilkurve $y = f(x)$. Somit ist der Anstieg an jeder Stelle des Seils auch mit den Kraftkomponenten V und H darstellbar ist:

$$y' = \frac{V}{H} \rightarrow y'' = \frac{V'}{H} = \underbrace{\frac{g \rho A}{H}}_{=k} \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow y'' = k \sqrt{1 + y'^2}. \quad (6)$$

Um diese Differenzialgleichung zu lösen, erfolgt zunächst die Substitution

$$v = y' \rightarrow v' = \frac{dy'}{dx} = y'', \quad (7)$$

sodass Gl. (6) die folgende Form annimmt

$$v' = k \sqrt{1 + v^2} = \frac{dv}{dx}. \quad (8)$$

Die Trennung der Variablen, Integration und Umformungen liefern

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = k \int dx \rightarrow \operatorname{arsinh} v + C = kx + D$$

$v = \sinh(kx + D) - C$ und nach Substitution der Gl. (7)

$y' = \sinh(kx + D) - C$, woraus nach nochmaliger Integration folgt:

$$y = f(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx + D) - C + E = \frac{1}{k} \cosh(kx + D) + F. \quad (9)$$

In der Literatur ist es üblich die Kettenlinie in der nachfolgenden Form zu schreiben

$$y = f(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0, \quad (10)$$

wobei x_0 und y_0 eine horizontale bzw. vertikale Verschiebung darstellen (y_0 ist aber nicht der messbare Tiefstpunkt, siehe Zahlenbeispiel 1). Der Krümmungshalbmesser im Scheitel ist a und gleichzeitig stellt er den Vergrößerungsfaktor der Funktion dar. Nur wenn a in dieser Verbindung vorkommt, handelt es sich um die Kettenlinie.

Die genannten Parameter sind so zu bestimmen, dass die Aufhängepunkte des Seils und seine Länge richtig wiedergegeben werden. Leider handelt es sich bei den Bestimmungsgleichungen in der Regel um transzente Gleichungen, die nur numerisch lösbar sind.

2. Beispielfall der Mechanik

In der Praxis können selbstverständlich unterschiedliche Aufgabenstellen auftreten. Beispielsweise sind die Aufhängepunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) und die Seillänge L gegeben, Damit sind die drei Unbekannten a, x_0, y_0 grundsätzlich bestimmbar. Gl. (10) liefert für die gegebenen Größen nachfolgende Zusammenhänge:

$$y_1 = a \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) + y_0 \quad (11)$$

$$y_2 = a \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) + y_0 \quad (12)$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)\right]^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left[\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right)\right]^2} dx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) dx = a \left[\sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$L = a \left[\sinh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) \right]. \quad (13)$$

Da es sich um transzente Gleichungen handelt, können die üblichen algebraischen Methoden nicht zielführend angewendet werden. Verschiedene Tricks sind im Laufe der Zeit erarbeitet und publiziert worden, die es ermöglichen stets nur *eine* Gleichung mit *einer* Unbekannten numerisch lösen zu müssen. So wurde beispielsweise nachfolgendes Verfahren entwickelt:

Man bildet die Differenz der Aufhängeshöhen h , um y_0 zu eliminieren:

$$h = y_1 - y_2 = a \left[\cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) \right]. \quad (14)$$

Die Kombination mit der Seillänge L nach Gl. (13) ergibt nach zahlreichen Umformungen [Quelle: WIKIPEDIA]:

$$L^2 - h^2 = 4 a^2 \left[\sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \right]^2. \quad (15)$$

Berechnungsweg:

Da L und h als gegebene Größen bekannt sind, ist mit Gl. (15) ein Einstieg zur Lösung des Gleichungssystems möglich. Natürlich ist a numerisch zu bestimmen. Aus Gl. (13) oder Gl. (14) kann x_0 wiederum numerisch und dann aus Gl. (11) oder Gl. (12) y_0 ermittelt werden.

Im Internet sind Lösungsprogramme für die Kettenlinie verfügbar, z. B.

<https://www.peacesoftware.de/einigewerte/seile.html>

Zahlenbeispiel 1:

Ein dehnstarres, biegeschlaffes Seil der Länge $L = 6$ m ist an zwei Stangen mit den Haltepunkten $(x_1, y_1) = (0, 4)$ und $(x_2, y_2) = (4, 2)$ – Angaben in m – befestigt.

Es sind der Verlauf der Seilkurve gemäß Gl. (10) und der Seiltiefpunkt (x^0, y^0) zu bestimmen.

Lösung:

Bis auf die letzte Bestimmung von y_0 erfolgten die Berechnungen der impliziten Größen numerisch mit Hilfe der angegebenen Software. Die Ergebnisse werden mitgeteilt und Überprüfungen durchgeführt.

Aus Gl. (15) folgt $a = 1,3410$. Kontrolle:

$$L^2 - h^2 = 4 a^2 \left[\sinh\left(\frac{x_2 - x_1}{2a}\right) \right]^2 \rightarrow 6^2 - 2^2 = 4 \cdot 1,3410^2 \left[\sinh\left(\frac{4 - 0}{2 \cdot 1,3410}\right) \right]^2 \rightarrow 32 = 32$$

Aus Gl. (13) folgt $x_0 = 2,4648$. Kontrolle:

$$L = a \left[\sinh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) \right] \rightarrow$$

$$6 = 1,3410 \left[\sinh\left(\frac{4 - 2,4648}{1,3410}\right) - \sinh\left(\frac{0 - 2,4648}{1,3410}\right) \right] \rightarrow 6 = 6$$

Oder aus Gl. (14) folgt $x_0 = 2,4648$. Kontrolle:

$$h = y_1 - y_2 = a \left[\cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) \right] \rightarrow$$

$$2 = 1,3410 \left[\cosh\left(\frac{0 - 2,4648}{1,3410}\right) - \cosh\left(\frac{4 - 2,4648}{1,3410}\right) \right] \rightarrow 2 = 2$$

Aus Gl. (11) oder aus Gl. (12) folgt:

$$y_0 = y_1 - a \cosh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) \rightarrow y_0 = 4 - 1,3410 \cosh\left(\frac{0 - 2,4648}{1,3410}\right) = -0,320$$

$$y_0 = y_2 - a \cosh\left(\frac{x_2 - x_0}{a}\right) \rightarrow y_0 = 2 - 1,3410 \cosh\left(\frac{4 - 2,4648}{1,3410}\right) = -0,320.$$

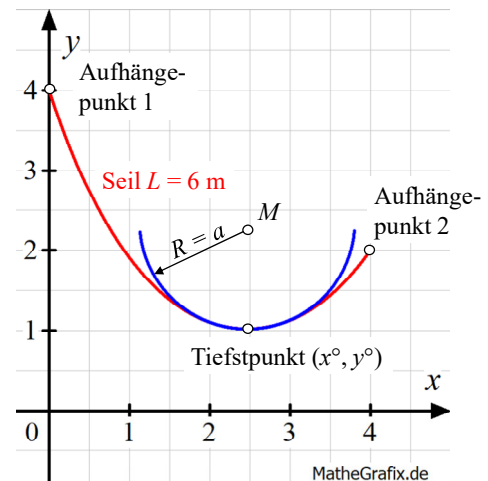
Am Seiltiefpunkt gilt $y' = 0$. Aus Gl. (10) berechnet sich dann:

$$y' = \sinh\left(\frac{x^\circ - x_0}{a}\right) = 0 \rightarrow x^\circ = x_0 = 2,4648$$

$$y^\circ = a \cosh\left(\frac{x^\circ - x_0}{a}\right) + y_0$$

$$y^\circ = 1,3410 \underbrace{\cosh\left(\frac{x^\circ - x_0}{a}\right)}_{=1} - 0,320 = 1,021$$

Bild 5 Ermittelte Seilcurve für Zahlenbeispiel 1 und Darstellung des Krümmungsradius im Scheitel



3. Besonderheiten der Kettenlinie

■ Es ist auffallend, dass bei den Berechnungen der Kurvengeometrie gemäß Gl. (10) die Masse $\rho \cdot A$ [kg/m] des Seiles und die Erdbeschleunigung g [m/s²] – wie in Gl. (3) eingeführt – überhaupt nicht mehr vorkommen.

Dies bedeutet, dass sich die Geometrie der Kettenlinie unabhängig vom Gewicht der Kette und vom Anbringungsort (Erde oder Mond) ausbildet.

In Gl. (6) bedeutete

$$k = \frac{g \rho A}{H}, \quad (16)$$

das beim Übergang von Gl. (9) zu Gl. (10) zu $a = 1/k$ wurde.

■ Die Schwerkraft formt die Kette so, dass zwar an jeder Stelle ein anderes Kräfteparallelogramm entsteht, aber bei gleichen Aufhängepunkten und gleicher Kettenlänge sind die Kräfteparallelogramme an gleichen Kettenorten verhältnismäßig unabhängig vom Gewicht der Kette. Das Gewicht stellt lediglich einen Skalierungsfaktor des Parallelogramms dar. – Weil die Kette nur tangentielle Kräfte weiterleiten kann, entspricht ihre Form der Kraftlinie.

■ Eine weitere Erklärungshilfe gibt folgendes Experiment: Verzieht man eine einseitig aufgehängte Kette horizontal, so ist die benötigte Kraft H *proportional* zum Kettengewicht. Dadurch erklärt sich die Konstanz von k unabhängig vom Kettengewicht.

Fortsetzung Zahlenbeispiel 1:

Es sind die Kräfte an den Aufhängepunkten zu bestimmen, wenn die Seilmasse $m = 1$ kg/m beträgt. Selbstverständlich sind diese Kräfte vom Gewicht des Seils ($m g$) abhängig.

Lösung:

Die Seillängen bis zum Tiefpunkt lassen sich mit Gl. (13) berechnen, wobei der Tiefpunkt bei $x^\circ = x_0 = 2,4648$ m liegt. Es gelten mit den Längen in m:

linksseitig

$$L_1 = a \left[\sinh\left(\frac{x^\circ - x_0}{a}\right) - \sinh\left(\frac{x_1 - x_0}{a}\right) \right] = 1,3410 \left[0 - \sinh\left(\frac{0 - 2,4648}{1,3410}\right) \right] = 4,1068$$

rechtsseitig

$$L_2 = a \left[\sinh \left(\frac{x_2 - x_0}{a} \right) - \sinh \left(\frac{x^\circ - x_0}{a} \right) \right] = 1,3410 \left[\sinh \left(\frac{4 - 2,4648}{1,3410} \right) - 0 \right] = 1,8932.$$

Probe: $L_1 + L_2 = 6$

Vertikale Kräfte an den Aufhängenpunkten:

$$V_1 = g m L_1 = 40,29 \text{ N}; \quad V_2 = g m L_2 = 18,57 \text{ N}.$$

Um die weiteren Kräfte zu bestimmen, müssen die Winkel im Kräfteparallelogramm bekannt sein. Die Anstiege der Kettenlinie an den Aufhängenpunkten betragen:

$$\tan \alpha = y' = \sinh \left(\frac{x - x_0}{a} \right)$$

linksseitig

$$y'_1 = \sinh \left(\frac{0 - 2,4648}{1,3410} \right) = -3,0625 \rightarrow \alpha_1 = 71,9^\circ$$

rechtsseitig

$$y'_2 = \sinh \left(\frac{4 - 2,4648}{1,3410} \right) = 1,4118 \rightarrow \alpha_2 = 54,7^\circ.$$

Horizontalkräfte (sind betragsmäßig gleich):

$$y' = \tan \alpha = \frac{V}{H} \rightarrow H = \frac{V}{y'}$$

*linksseitig**rechtsseitig*

$$H_1 = \frac{40,29 \text{ N}}{-3,0625} = -13,16 \text{ N}; \quad H_2 = \frac{18,57 \text{ N}}{1,4118} = 13,15 \text{ N}.$$

Seilkräfte:

$$\sin \alpha = \frac{V}{S} \rightarrow S = \frac{V}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad S = \sqrt{V^2 + H^2}$$

*linksseitig**rechtsseitig*

$$S_1 = \frac{40,29 \text{ N}}{\sin 71,9} = 42,38 \text{ N}; \quad S_2 = \frac{18,57 \text{ N}}{\sin 54,7} = 22,75 \text{ N}.$$

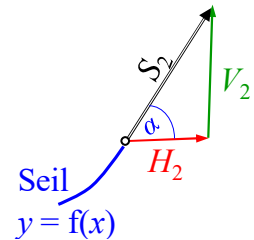


Bild 6 Kräfte am rechten Aufhängenpunkt 2 ($x_2 = 4 \text{ m}$)

■ Es sei nochmals erwähnt, dass sich die Kettenlinie nur unter der Wirkung des Eigengewichtes einstellt. Wirken zusätzlich weitere Lasten, dann ergibt sich beispielsweise eine Parabel usw.

■ Eine weitere Besonderheit der Kettenlinie stellt noch die spezielle Anwendung im Bauwesen dar, indem man Bogen gestaltet, die die Umkehrung der Kettenlinie sind. Auch hier gilt wieder, dass das Eigengewicht andere aufgeprägte Kräfte bedeutend überwiegen muss, damit die Kettenlinie eine optimale Form darstellt. Aus dem Eigengewicht resultieren bei dieser Form nur Druckkräfte entlang der Bogenlinie. Theoretisch brauchte man zur Errichtung keinen Mörtel.

Torbogen in ST. LOUIS (Höhe 192 m)



Quelle: WIKIPEDIA

4. Herleitung des Temperaturverlaufs in einer Rippe

Eine Massivrippe der Länge l mit konstantem Querschnitt A wird an ihren Enden auf den Temperaturen t_0 und t_E gehalten. Von der Rippe – bestehend aus homogenem Material mit der Wärmeleitfähigkeit λ – erfolgt ein Wärmestrom an die Umgebung mit den Temperaturen t_a und t_i (Bild 7). Im Rippenquerschnitt herrscht unabhängig von der Dicke δ stets eine einheitliche, nur von der Koordinate x abhängige Temperatur t (eindimensionale Wärmeleitung in x -Richtung).

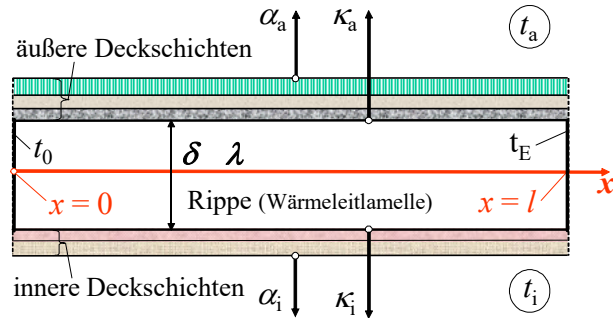


Bild 7 Wärmeleitrippe der Länge l mit Deckschichten zwischen zwei temperierten Stirnflächen (Rippenfußtemperaturen t_0 und t_E)

Der Wärmeleitwiderstand der Deckschichten und des Wärmeübergangs wird zu Teilwärmedurchgangskoeffizienten κ_a und κ_i zusammengefasst, sodass an den beiden Rippenoberflächen jeweils eine Randbedingung dritter Art vorliegt.

$$\kappa_a = \left[\frac{1}{\alpha_a} + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{a,k}}{\lambda_{a,k}} \right]^{-1} ; \quad \kappa_i = \left[\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{k=1}^m \frac{\delta_{i,k}}{\lambda_{i,k}} \right]^{-1} \quad (17)$$

Bei der weiteren Ableitung wird die Rippenbreite $b = 1$ m angenommen. Die allgemeine Gleichung für den Temperaturverlauf in der Rippe wird anhand der speziellen Darstellung für den Wärmetransport und den Temperaturverlauf (Bild 8) abgeleitet.

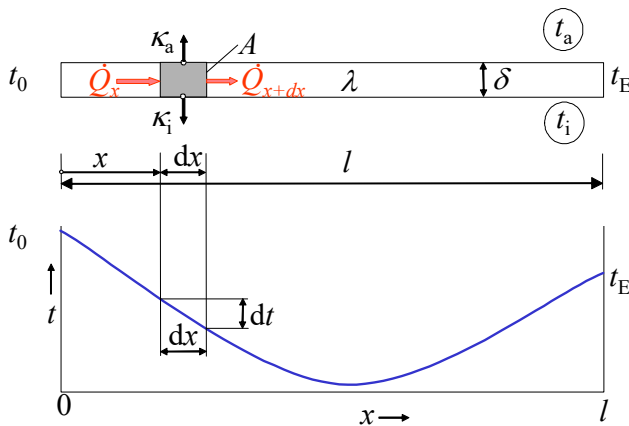


Bild 8 Temperaturverlauf und Wärmetransport in der Wärmeleitrippe zwischen zwei Querschnitten mit unterschiedlicher Temperatur sowie bei verschiedenen Umgebungstemperaturen

Es gelten für das gekennzeichnete Volumenelement die ein- und austretenden Wärmeströme

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{dt}{dx} ; \quad \dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(t + \frac{dt}{dx} dx \right) \quad (18)$$

und für den Wärmestrom an die Umgebung

$$d\dot{Q} = [\kappa_a(t - t_a) + \kappa_i(t - t_i)] b dx = [(\kappa_a + \kappa_i) t - \kappa_a t_a - \kappa_i t_i] b dx, \quad (19)$$

sodass die Wärmebilanz folgt:

$$d\dot{Q} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}. \quad (20)$$

Das Einsetzen und Umformen liefert die inhomogene, lineare Differentialgleichung für $t = t(x)$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\kappa_a + \kappa_i}{\lambda \vartheta} t = - \frac{\kappa_a t_a + \kappa_i t_i}{\lambda \vartheta}. \quad (21)$$

Zunächst wird die homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstantem Koeffizienten gelöst

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\kappa_a + \kappa_i}{\lambda \vartheta} t = 0, \quad (22)$$

wobei die Abkürzung

$$m = \sqrt{\frac{\kappa_a + \kappa_i}{\lambda \vartheta}} \quad (23)$$

und der Lösungsansatz

$$t = e^{\beta x} \quad (24)$$

verwendet werden. Es folgt dann die charakteristische Gleichung $\beta^2 - m^2 = 0$, woraus sich mit $\beta_1 = m$ und $\beta_2 = -m$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ergibt:

$$t = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x}. \quad (25)$$

Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist noch eine spezielle Lösung hinzuzufügen. Eine solche lautet beispielsweise

$$t (\equiv t_B) = \frac{\kappa_a t_a + \kappa_i t_i}{\kappa_a + \kappa_i}. \quad (26)$$

Sie stellt physikalisch die Rippentemperatur t_B aufgrund der Umgebungstemperaturen und der Teilwärmedurchgangskoeffizienten dar. D. h., sie würde sich einstellen, wenn in der Rippe kein Wärmefluss in x -Richtung erfolgte. Die allgemeine Lösung nimmt dann die Form an:

$$t = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x} + \frac{\kappa_a t_a + \kappa_i t_i}{\kappa_a + \kappa_i} t = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x} + t_B. \quad (27)$$

Definiert man die Temperaturen als *Übertemperaturen* über t_B , so folgt mit $\vartheta = t - t_B$ die Form:

$$\vartheta = t - t_B = C_1 e^{m x} + C_2 e^{-m x}. \quad (28)$$

Die Konstanten bestimmen sich aus den Randbedingungen

$$t = t_0 \text{ bzw. } \vartheta = \vartheta_0 \text{ für } x = 0 \quad \text{und} \quad t = t_E \text{ bzw. } \vartheta = \vartheta_E \text{ für } x = l.$$

Mit den Randbedingungen sind die Konstanten bestimmbar. Es gelten mit Gl. (28)

$$\vartheta_0 = C_1 + C_2; \quad \vartheta_E = C_1 e^{m l} + C_2 e^{-m l}$$

$$C_1 = \frac{\vartheta_E - \vartheta_0 e^{m l}}{e^{m l} - e^{-m l}}$$

$$C_2 = \frac{\vartheta_0 e^{m l} - \vartheta_E}{e^{m l} - e^{-m l}}.$$

Das Einsetzen in Gl. (28) ergibt den Verlauf der Übertemperatur in der Rippe

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_E - \vartheta_0 e^{m l}}{e^{m l} - e^{-m l}} e^{m x} + \frac{\vartheta_0 e^{m l} - \vartheta_E}{e^{m l} - e^{-m l}} e^{-m x},$$

und nach einiger Umrechnung

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{\sinh[m(l-x)]}{\sinh[ml]} + \vartheta_E \frac{\sinh[mx]}{\sinh[ml]}. \quad (29)$$

Es können sofort die Übertemperaturen am jeweiligen Rippenfuß überprüft werden:

$$x = 0 \rightarrow \vartheta = \vartheta_0; \quad x = l \rightarrow \vartheta = \vartheta_E.$$

Weiterhin ergibt sich für die Tangente an den Temperaturverlauf:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta_0 \frac{-m \cosh[m(l-x)]}{\sinh[ml]} + \vartheta_E \frac{m \cosh[mx]}{\sinh[ml]}. \quad (30)$$

Das Minimum der Kurve liegt bei x° , das sich schrittweise aus $d\vartheta/dx = 0$ ermitteln lässt:

$$\begin{aligned} \cosh[m(l-x^\circ)] &= \frac{\vartheta_E}{\vartheta_0} \cosh[mx^\circ] \\ \cosh[ml] \cosh[mx^\circ] - \sinh[ml] \sinh[mx^\circ] &= \frac{\vartheta_E}{\vartheta_0} \cosh[mx^\circ] \\ x^\circ &= \frac{1}{m} \operatorname{artanh} \left(\tanh[ml] - \frac{\vartheta_E}{\vartheta_0} \frac{1}{\sinh[ml]} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Für *gleiche Rippenfußtemperaturen* $t_{RF} = t_0 = t_E$ bzw. $\vartheta_{RF} = \vartheta_0 = \vartheta_E$, folgt nach langer Umformung der Gl. (29) unter Verwenden der Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen der Übertemperaturverlauf in der Rippe zwischen den Stirnflächen zu:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]}{\cosh \left[m \frac{l}{2} \right]}. \quad (32)$$

Für den Sonderfall gleicher Rippenfußtemperaturen $t_0 = t_E$ hätte man durch Einführen der Symmetriebedingung $d\vartheta/dx = 0$ für $x = l/2$ auf kürzerem Wege vorstehende Gleichung erhalten.

Die *mittlere Übertemperatur der Rippe* folgt aus Gl. (29) gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung zu:

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= \frac{1}{l} \int_0^l \vartheta dx = \frac{1}{l \sinh[ml]} \int_0^l (\vartheta_0 \sinh[m(l-x)] + \vartheta_E \sinh[mx]) dx \\ \vartheta_m &= \frac{1}{l \sinh[ml]} \left[-\frac{\vartheta_0}{m} \cosh[m(l-x)] + \frac{\vartheta_E}{m} \cosh[mx] \right]_0^l \\ \vartheta_m &= \frac{1}{l \sinh[ml]} \left[-\frac{\vartheta_0}{m} (1 - \cosh[ml]) + \frac{\vartheta_E}{m} (\cosh[ml] - 1) \right] = \frac{\cosh[ml] - 1}{ml \sinh[ml]} (\vartheta_0 + \vartheta_E) \end{aligned}$$

Substitution nachfolgender Terme

$$\begin{aligned}
\cosh\left[2m\frac{l}{2}\right] &= \left(\cosh\left[m\frac{l}{2}\right]\right)^2 + \left(\sinh\left[m\frac{l}{2}\right]\right)^2; \quad \sinh\left[2m\frac{l}{2}\right] = 2 \cosh\left[m\frac{l}{2}\right] \sinh\left[m\frac{l}{2}\right] \\
\vartheta_m &= \frac{\left(\cosh\left[m\frac{l}{2}\right]\right)^2 + \left(\sinh\left[m\frac{l}{2}\right]\right)^2 - 1}{2ml \cosh\left[m\frac{l}{2}\right] \sinh\left[m\frac{l}{2}\right]} (\vartheta_0 + \vartheta_E) = \frac{\left(\sinh\left[m\frac{l}{2}\right]\right)^2}{ml \cosh\left[m\frac{l}{2}\right] \sinh\left[m\frac{l}{2}\right]} (\vartheta_0 + \vartheta_E) \\
\vartheta_m &= \frac{\tanh\left[m\frac{l}{2}\right]}{ml} (\vartheta_0 + \vartheta_E) = \frac{\tanh\left[m\frac{l}{2}\right]}{\frac{ml}{2}} \frac{\vartheta_0 + \vartheta_E}{2}. \quad (33)
\end{aligned}$$

Diese aufwändige Umformung liefert eine sehr wichtige Erkenntnis:

Die mittlere Rippentemperatur bei real ungleichen Fußtemperaturen ($t_0 \neq t_E$) entspricht dem Fall gleicher Rippenfußtemperaturen, wenn als Fußtemperaturen der arithmetische Mittelwert $t_{RF} = 0,5 (t_0 + t_E)$ eingesetzt wird.

Bei Rohrregistern in Mäanderform liegen stets ungleich temperierte Rohre nebeneinander, so beispielsweise bei den üblichen Fußbodenheizungen. Somit darf generell mit dem Mittel zwischen Vor- und Rücklauftemperatur gearbeitet werden, wie dies auch in praxi üblich ist.

Für den Sonderfall gleicher Rippenfußtemperaturen $t_0 = t_E$ hätte man aus Gl. (32) die mittlere Rippentemperatur sehr schnell ermitteln können:

$$\vartheta_m = \vartheta_0 \frac{\tanh\left[m\frac{l}{2}\right]}{\frac{ml}{2}}. \quad (34)$$

Ergänzende Hinweise:

Die vorgestellte Ableitung des Temperaturverlaufs längs der Rippe ist in ähnlicher Form in <https://berndglueck.de/lowex.php> → Bericht_LowEx S. 88 ff. enthalten.

In <https://berndglueck.de/strahlungsheizung.php> → Strahlungsheizung S. 41 ff. wurden andere Definitionen der Übertemperatur bzw. der Temperaturdifferenzen gewählt. Demzufolge haben die Berechnungsgleichungen auch ein völlig verändertes Aussehen trotz gleichen Temperaturverlaufs. Es galten $\vartheta = t - t_i$; $\Delta = t_a - t_i$; $\vartheta^* = t_0 - t_E$, womit folgten:

$$\vartheta(x) = \left(\vartheta_0 - \frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_i} \Delta\right) \frac{\cosh\left[m\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]}{\cosh\left[m\frac{l}{2}\right]} + \frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_i} \Delta - \vartheta^* \frac{\sinh[mx]}{\sinh[ml]}. \quad (35)$$

5. Beispielfall der Wärmeleitung

Die praktischen Aufgabenstellungen bei wärmetechnischen Berechnungen sind in der Regel so geartet, dass eine iterationsfreie Abarbeitung möglich ist. Im Beispiel Kettenlinie musste die Kettenlänge eingepasst werden. Dies wäre eventuell damit vergleichbar, dass man die Wärmeabgabe der Rippe vorgeben würde. Aber diese Aufgabenstellung wäre über die mittlere Rippentemperatur auch iterationsfrei lösbar.

Zahlenbeispiel 2:

(Entnommen aus <https://berndglueck.de/strahlungsheizung.php> → Strahlungsheizung → S. 42 ff.)

Es ist der Temperaturverlauf und sein integraler Mittelwert in der mit einem Rohrregister beheizten

abgehängten Deckenkonstruktion zu berechnen. Der konstruktive Rohranschluss an die Rippe erlaubt es, dass vereinfachend von einer eindimensionalen Wärmeleitung in der Rippe ausgegangen werden kann. Die Rippenfußtemperaturen betragen $t_0 = 50^\circ\text{C}$ und $t_E = 40^\circ\text{C}$. Die Raumtemperaturen sind mit $t_i = 20^\circ\text{C}$ und $t_a = 10^\circ\text{C}$ determiniert. Für die Spezialrippe gelten: Dicke $\delta = 0,04\text{ m}$ und Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 1,16\text{ W/(m K)}$. Der Rohrabstand sei $l = 0,3\text{ m}$ und die Teilwärmegangskoeffizienten $\kappa_i = 6,3\text{ W/(m K)}$ bzw. $\kappa_a = 1,4\text{ W/(m K)}$ wurden vorab ermittelt.

Die Ergebnisse sind denen bei gleichen Rippenfußtemperaturen $t_0 = t_E = 45^\circ\text{C}$ gegenüberzustellen.

Lösung:

Für den charakteristischen Wert m ergibt sich nach Gl. (23)

$$m = \sqrt{\frac{1,4 + 6,3}{1,16 \cdot 0,04}} = 12,88\text{ m}^{-1}.$$

Die Temperatur der unbeheizten Rippe t_B berechnet sich aus einer Wärmestrombilanz für eine beliebig große Fläche A' . Dabei wird angenommen, dass über die Dicke der Rippe die Temperatur einheitlich ist, d. h., sie besitzt über die Dicke keinen Wärmeleitwiderstand. Dies war ja eine Annahme bei der Betrachtung der Wärmeleitung längs der Rippe. Es folgt daraus die bereits bekannte Gl. (26):

$$\kappa_a(t_B - t_a) A' = \kappa_i(t_i - t_B) A' \rightarrow t_B = \frac{\kappa_a t_a + \kappa_i t_i}{\kappa_a + \kappa_i} \rightarrow t_B = \frac{1,4 \cdot 10 + 6,3 \cdot 20}{1,4 + 6,3}^\circ\text{C} = 18,18^\circ\text{C}.$$

Damit betragen die Übertemperaturen:

$$\vartheta_0 = 50^\circ\text{C} - 18,18^\circ\text{C} = 31,82\text{ K}; \quad \vartheta_E = 40^\circ\text{C} - 18,18^\circ\text{C} = 21,82\text{ K}.$$

Gl. (29) liefert dann den Übertemperaturverlauf zu

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \vartheta_0 \frac{\sinh[m(l-x)]}{\sinh[ml]} + \vartheta_E \frac{\sinh[mx]}{\sinh[ml]} \\ \vartheta(x) &= 31,82 \frac{\sinh[12,88(0,3-x)]}{\sinh[12,88 \cdot 0,3]} + 21,82 \frac{\sinh[12,88x]}{\sinh[12,88 \cdot 0,3]}\text{ K}. \end{aligned}$$

Der Temperaturverlauf $t(x) = \vartheta(x) + t_B$ ist im Bild 9 dargestellt (rote Kurve). Gl. (35) liefert den gleichen Verlauf.

Das Minimum liegt bei x° . Es folgen aus Gl. (31) und Gl. (29):

$$\begin{aligned} x^\circ &= \frac{1}{m} \operatorname{artanh} \left(\tanh[ml] - \frac{\vartheta_E}{\vartheta_0} \frac{1}{\sinh[ml]} \right) \\ x^\circ &= \frac{1}{12,88} \operatorname{artanh} \left(\tanh[12,88 \cdot 0,3] - \frac{21,82}{31,82} \frac{1}{\sinh[12,88 \cdot 0,3]} \right) \text{ m} = 0,163\text{ m} \\ \vartheta^\circ &= \vartheta_0 \frac{\sinh[m(l-x^\circ)]}{\sinh[ml]} + \vartheta_E \frac{\sinh[mx^\circ]}{\sinh[ml]} \\ \vartheta^\circ &= 31,82 \frac{\sinh[12,88(0,3-0,163)]}{\sinh[12,88 \cdot 0,3]} + 21,82 \frac{\sinh[12,88 \cdot 0,163]}{\sinh[12,88 \cdot 0,3]}\text{ K} = 7,5\text{ K} \rightarrow t^\circ = 25,7^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Die mittlere Temperatur berechnet sich nach Gl. (33) zu

$$\vartheta_m = \frac{\tanh\left[m \frac{l}{2}\right]}{\frac{ml}{2}} \frac{\vartheta_0 + \vartheta_E}{2} = \frac{\tanh[12,88 \cdot 0,15]}{12,88 \cdot 0,15} \frac{31,82 + 21,82}{2}\text{ K} = 13,31\text{ K} \rightarrow t_m = 31,5^\circ\text{C}.$$

Betrachtet man den Sonderfall gleicher Rippenfußtemperaturen $t_0 = t_E = 45^\circ\text{C}$, so gilt nach Gl. (32)

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{\cosh\left[m\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]}{\cosh\left[m\frac{l}{2}\right]} = 26,82 \frac{\cosh[12,88(0,15 - x)]}{\cosh[12,88 \cdot 0,15]} \text{ K.}$$

Der Temperaturverlauf ist ebenfalls im Bild 9 eingetragen. Die mittlere Rippentemperatur gilt nach Gl. (33) unverändert mit $t_m = 31,5^\circ\text{C}$. Das Minimum der Temperatur liegt logischerweise bei $x^\circ = 0,15 \text{ m}$, wozu nach Gl. (32) folgende Übertemperatur gehört:

$$\vartheta^\circ(x = 0,15) = 26,82 \frac{1}{\cosh[12,88 \cdot 0,15]} \text{ K} = 7,6 \text{ K} \rightarrow t^\circ = 25,8^\circ\text{C}.$$

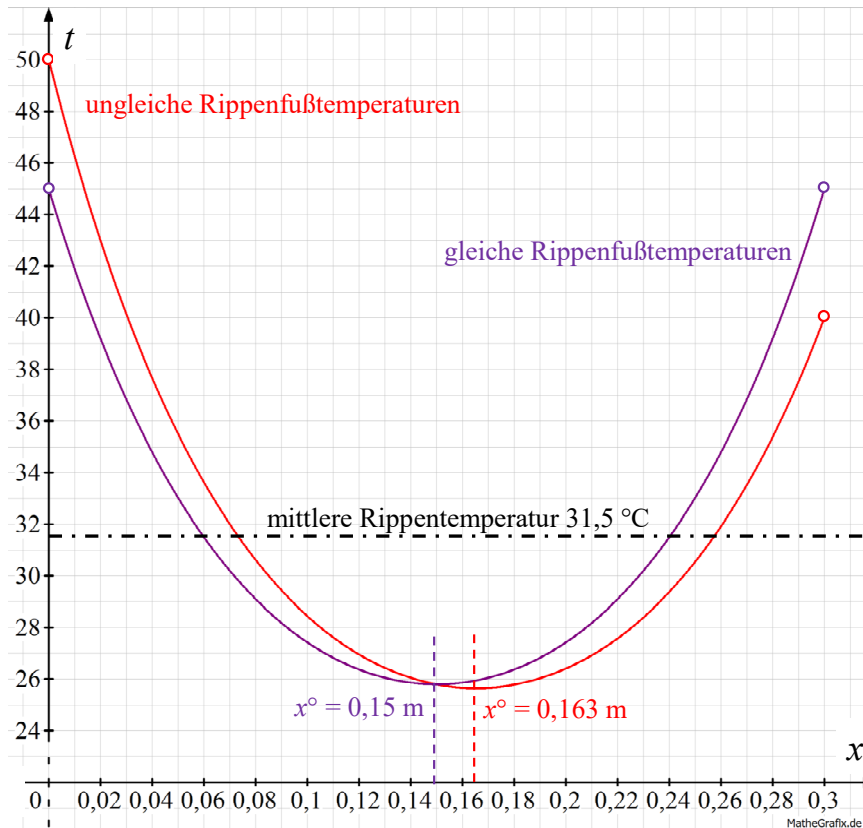


Bild 9 Temperaturverläufe in der Rippe bei ungleichen und bei gleichen Fußtemperaturen bei arithmetischer Mittelung der Ausgangswerte mit dem Ergebnis einer übereinstimmenden Mitteltemperatur

6. Besonderheiten des Temperaturverlauf längs einer Rippe

■ Kennzeichnend für den Temperaturverlauf längs einer Rippe sind Hyperbelfunktionen in der Regel handelt es sich um die Cosinus-hyperbolicus-Funktion mit dem Argument (ml). Damit sind die wärmetechnischen Eigenschaften bezüglich Wärmeleit- und Wärmeabgabestrom sowie die Rippenlänge berücksichtigt. Ähnlichkeiten zur Kettenlinie treten deutlich hervor.

■ Führt man in Gl. (32), die für gleiche Rippenfußtemperaturen gilt, die Abkürzung

$$z = \frac{\vartheta_0}{\cosh\left[m\frac{l}{2}\right]} \quad \text{mit} \quad \vartheta_0 = t_0 - t_B = t_0 - \frac{\kappa_a t_a + \kappa_i t_i}{\kappa_a + \kappa_i} \quad (36)$$

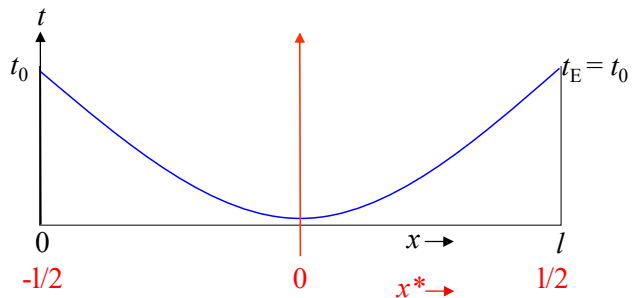
ein, erhält man

$$\vartheta = z \cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right]. \quad (37)$$

Überprüfungen: $x = 0 \rightarrow \vartheta = \vartheta_0$; $x = l/2 \rightarrow \vartheta = z$; $x = l \rightarrow \vartheta = \vartheta_0$.

Transformiert man das im Bild 8 vorgestellte Koordinatensystem wie im Bild 10 dargestellt (rote Achse), sodass $x = 0$ beim früheren $x = l/2$ liegt, gilt $x^* = x - l/2$.

Bild 10 Transformiertes Koordinatensystem (rote Achse) und gleiche Rippenfußtemperaturen



Damit erhält man unter Beachten, dass cosh eine gerade Funktion ist, Gl. (37) in der Form:

$$\vartheta = z \cosh \left(\frac{x^*}{\frac{1}{m}} \right). \quad (38)$$

Überprüfungen: $x^* = -l/2 \rightarrow \vartheta = \vartheta_0$; $x^* = 0 \rightarrow \vartheta = z$; $x = l/2 \rightarrow \vartheta = \vartheta_0$.

Dies ist eine *Analogie zur Kettenlinie* in symmetrischer Mittenlage ohne Verschiebungsterme (Gl. (10))

$$y = f(x) = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right). \quad (39)$$

Der definierten Kettenlinie entspricht sie aber nur im theoretischen Sonderfall: $z = 1 / m$.

■ Konnte man bei Bild 9 eventuell noch annehmen, dass die beiden Kurven durch Verschieben zur Deckung gebracht werden könnten und dass die Unterschiede der beiden Tiefpunkte ϑ_0 lediglich auf numerischen Ungenauigkeiten beruhten, zeigt Bild 11 bei verändertem m deutliche Unterschiede.

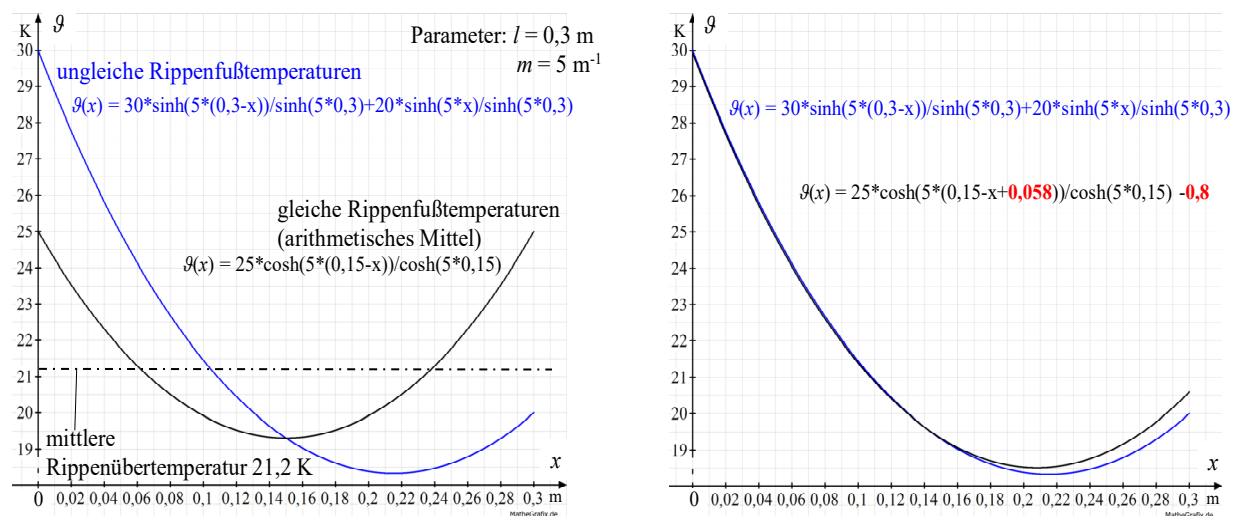


Bild 11 Kurven für die Parameter $m = 5 \text{ m}^{-1}$ und $l = 0,3 \text{ m}$: blaue Kurve für ungleiche Übertemperaturen (30 K; 20 K); schwarze Kurven für die mittlere Rippenfußübertemperatur (25 K)

links: Originalverläufe;

rechts: schwarze Kurve horizontal und vertikal verschoben mit dem Ziel eine Anpassung an die blaue Kurve zu erreichen

Ohne mathematischem Beweis ist visuell ersichtlich, dass Deckungsgleichheit durch Koordinatenverschiebung nicht herstellbar ist. Eine analoge Darstellung zu Gl. (10), die für die Kettenlinie gilt, ist somit nicht sinnvoll.

■ In der mathematischen Geometrie ist es üblich die *Krümmungsradien der Kurvenscheitel* anzugeben, so beispielsweise für alle Kegelschnitte. Bei der Kettenlinie ist bekannterweise der Radius $R = a$ direkt aus Gl. (10) bzw. Gl. (39) entnehmbar. Bild 5 zeigt den eingepassten Scheitelkreis. Die Größe a kommt in den genannten Gleichungen zweimal vor, in Gl. (38) stehen an den analogen Stellen die unterschiedlichen Größen z und $1/m$. Wie groß ist hier R ?

Allgemein gilt für den sogenannten Schmiegeradius ($\equiv$ Krümmungskreis) an einem Punkt $P(x_P)$ einer beliebigen Kurve die Bestimmungsgleichung:

$$R = \left| \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} \right| \quad \text{hier} \quad R = \left| \frac{[1 + (\vartheta')^2]^{3/2}}{\vartheta''} \right|. \quad (40)$$

Aus Gl. (37) folgen

$$\vartheta' = -m z \sinh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] \quad \rightarrow \quad \vartheta'' = m^2 z \cosh \left[m \left(\frac{l}{2} - x \right) \right].$$

Im vorliegenden Fall handelt es sich bei P um den Scheitelpunkt, der gleichzeitig das Minimum der Kurve darstellt, sodass $\vartheta' = 0$ gilt. Schließlich folgt aus Gl. (40) für gleiche Fußtemperaturen $\vartheta_0 = \vartheta_E$ an der Stelle $x = l/2$

$$R = \frac{1}{m^2 z} = \frac{\cosh \left[m \frac{l}{2} \right]}{m^2 \vartheta_0}. \quad (41)$$

Da der theoretische Sonderfall $z = 1/m$ in praxi nicht auftreten wird, errechnet sich der Krümmungskreis im Scheitelpunkt aus beiden Termen z und $1/m$, wobei der letzte Term dominiert. Bei der Berechnung von R verdeutlicht sich wieder der Unterschied zwischen der Kettenlinie und ihrem Pendant, der Temperaturkurve längs einer wärmeleitenden Rippe.

Fortsetzung Zahlenbeispiel 2:

Es ist der Krümmungsradius für die Kurve mit den arithmetischen gemittelten Fußtemperaturen zu bestimmen und dem im Bild 9 gezeigten Kurvenverlauf gegenüberzustellen.

Lösung:

Nach Gl. (41) ergibt sich mit anschließender Einarbeitung des Maßstabsfaktors $\beta = 100$

$$R = \frac{1}{m^2 z} = \frac{\cosh \left[m \frac{l}{2} \right]}{m^2 \vartheta_0} = \frac{\cosh \left[12,88 \frac{0,3}{2} \right] \text{ m}^2}{12,88^2 \cdot 26,82 \text{ K}} = 0,000792 \frac{\text{m}^2}{\text{K}} = 0,000792 \frac{\text{m } 50 \text{ LE}}{0,5 \text{ LE}} = 0,0792 \text{ m}.$$

Für die grafische Darstellung gilt Ordinate $2 \text{ K} \hat{=} 1 \text{ LE}$; Abszisse $0,02 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ LE} \rightarrow \beta = 100$.

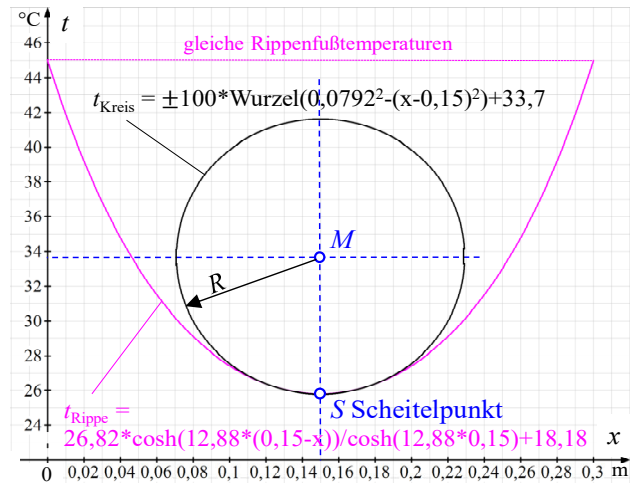
Für die Kreisgleichung gilt mit dem bereits vorhandenen Ergebnis ϑ° aus dem Zahlenbeispiel 2:

$$\vartheta(x) = \pm \sqrt{R^2 - (x - 0,15)^2} + \vartheta_M = \pm \sqrt{R^2 - (x - 0,15)^2} + \vartheta^\circ + R$$

$$t(x)_{\text{Kreis}} = \pm \underbrace{100 \sqrt{0,0792^2 - (x - 0,15)^2}}_{\text{im Ordinatenmaßstab}} + \underbrace{7,6 \text{ K} + 18,18 \text{ }^\circ\text{C}}_{t_0} + \underbrace{0,0792 \cdot 100}_{\text{im Ordinatenmaßstab}}$$

$$t(x)_{\text{Kreis}} = \pm 100 \sqrt{0,0792^2 - (x - 0,15)^2} + 33,7.$$

Bild 12 Verlauf der Rippentemperatur bei gleichen Rippenfußtemperaturen und anliegender Scheitelkreis nach vorheriger Berechnung des Radius R und der Lage des Mittelpunktes M



■ Entscheidend für wärmetechnische Berechnungen ist die mittlere Rippentemperatur, denn mit ihr sind die Wärmeströme von der Rippe an die beiden Umgebungen sofort berechenbar. Die mittlere Temperatur kann auch bei ungleichen Rippenfußtemperaturen bekanntlich durch Mittelung vereinfacht berechnet werden (Gl. (33)).

■ Die abgeleiteten Algorithmen sind auch bei nur einseitig beheizten Rippen anwendbar, wenn Symmetriebedingungen genutzt werden können.

Zahlenbeispiel 3:

(Entnommen aus <https://berndglueck.de/waermeuebertragung.php>
→ Wärmeübertragung → S. 263 ff.)

Eine Kreisringrippe aus Wickelband der Abmessungen 40 mm × 1 mm, die mit einem Rohr (Außenradius 10 mm) stoffschlüssig verbunden ist, weist eine Fußtemperatur von 80 °C auf. Die umgebende Luft hat eine Temperatur von 20 °C. Der Wärmeübergangskoeffizient betrage 30 W/(m²K), die Wärmeleitfähigkeit 50 W/(m K). Es ist der Wärmestrom *einer* Lamelle an die Umgebungsluft zu bestimmen, wenn angenommen wird, dass am Fuß lediglich eine Wellenkontur ohne Dickenänderung des Materials auftritt und die Steigung der Rippenwicklung vernachlässigt wird.

Lösung:

Da die Rippe unabhängig vom Radius überall den gleichen Querschnitt besitzt, kann diese theoretisch als Rechteckrippe berechnet werden. Nach Gl. (23) gilt

$$m = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{50 \cdot 0,001}} \frac{1}{\text{m}} = 34,64 \text{ m}^{-1}$$

Eine Symmetrie bestünde, wenn die Lamelle doppelt so hoch und am anderen Ende auf ebenfalls 80 °C temperiert wäre. In der Mitte würde dann kein Wärmestrom in der Lamelle auftreten ($dt/dx = 0$). Gleiches passiert bei der realen Lamelle an deren Stirnseite, wenn diese als wärmeabgebende Fläche vernachlässigt wird. Für die mittlere Temperatur gilt dann nach Gl. (33)

$$\vartheta_m = \frac{\tanh\left[m \frac{l}{2}\right]}{ml} (\vartheta_0 + \vartheta_E) = \frac{\tanh[34,64 \cdot 0,04]}{34,64 \cdot 0,04} 60 \text{ K} = 38,20 \text{ K}.$$

Die wärmeübertragende Lamellenfläche ergibt sich unter der Bedingung, dass das Material an der Stirnseite weder gestaucht noch gedehnt ist zu:

$$A = 2 U H = 2 \cdot 2\pi(0,010 + 0,040) 0,040 \text{ m}^2 = 0,025133 \text{ m}^2.$$

Damit wird von der Lamellen Oberfläche folgender Wärmestrom abgegeben:

$$\dot{Q} = \alpha A \vartheta_m = 30 \cdot 0,025133 \cdot 38,20 \text{ W} = 28,8 \text{ W}.$$

7. Fazit

■ Die völlig unterschiedlichen Herleitungen der mechanischen bzw. wärmetechnischen Sachverhalte führen zu *fast* identischen Funktionskurven. Zwischen der *Kettenlinie* und der *Über-temperaturfunktion in einer wärmeleitenden Rippe* besteht eine *sehr große Ähnlichkeit* aber *keine völlige Übereinstimmung*.

Es gilt die auf Seite 2 unter "Termini" aufgeführte Darlegung vollumfänglich. Die Variante völliger Übereinstimmung durch gleiche Koeffizienten $z = 1/m$ bei der Rippentheorie ist in praktischen Fällen nicht zu erwarten.

■ Ein interessantes Analogon besteht beispielsweise auch zwischen der Vertikalkraft V , die entlang der Kette auftritt, und dem Wärmestrom $\dot{Q}$ längs der Rippe. Der besseren Übersichtlichkeit werden eine *symmetrisch aufgehängte Kette* und eine *symmetrische Rippe mit gleichen Fußtemperaturen und thermisch gleicher Umgebung* betrachtet. Damit liegt der Tiefpunkt der Kurven jeweils bei $x = 0$.

Für die *Kettenlinie* galt gemäß Gl. (5)

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{V_{x+dx} - V_x}{dx} = V' = g \rho A \sqrt{1 + y'^2}$$

und aus Gl. (10) folgte für y'

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right),$$

sodass endgültig geschrieben werden kann:

$$V' = g \rho A \sqrt{1 + \left[\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2} = g \rho A \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = K_1 \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad \text{z. B. in N/m} \quad (42)$$

Für den *Temperaturverlauf entlang der Rippe* folgt nach Gl. (18) bis Gl. (20) unter Beachten der Definition gemäß Gl. (38)

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{x+dx} - \dot{Q}_x}{dx} = \dot{Q}' = (\kappa_a + \kappa_i) \vartheta b$$

$$\dot{Q}' = (\kappa_a + \kappa_i) \frac{\vartheta_0}{\cosh\left[m \frac{l}{2}\right]} b \cosh\left[\frac{x}{1/m}\right] = K_2 \cosh\left(\frac{x}{1/m}\right). \quad \text{z. B. in W/m} \quad (43)$$

■ Die praxisüblichen Aufgabenstellungen unterscheiden sich stark. So müssen die Berechnungen zur Kettenlinie in der Regel numerisch erfolgen. Vorhandene Algorithmen erlauben jedoch, dass nur einzelne Gleichungen (keine Gleichungssysteme) numerisch zu lösen sind. Demgegenüber können die wärmetechnischen Aufgaben meistens mit üblichen analytischen Methoden bearbeitet werden.